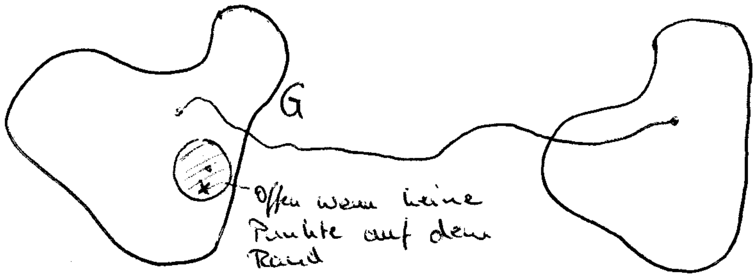
$f = f(\underline{x})$; $\underline{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

Def. $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet

$:\Leftrightarrow \begin{cases} G \text{ ist offen} \\ G \text{ zusammenhängend} \end{cases}$

"offen" heißt "jeder Punkt in der Menge ist ein innerer Punkt"



G zusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall \underline{x}, \underline{y} \in G \; \exists \Gamma \subset G$ stetige Kurve $\underline{x}, \underline{y} \in \Gamma$

$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$; $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

diff'bar bei $\underline{x} \in G$

$:\Leftrightarrow \exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \underline{v} \cdot \underline{h} + r(\underline{x}, \underline{h}); \quad |r(\underline{x}, \underline{h})| = o(\|\underline{h}\|)$$

$$\underline{v} = \nabla f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Vorsicht: Diff'barkeit $\Rightarrow$ partielle Diff'barkeit

— " — $\not\Leftarrow$ — " —

- **Eigenschaften des Gradienten:**

$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar

$\gamma: I \longrightarrow G$ diff'bare Kurve

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{f(\gamma(t))}_{F(t);\; F: I \to \mathbb{R}} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\frac{f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))}{h} = \underbrace{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \left(\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right) + r\left(\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right)}_{|\cdot| = o\left(\|\underbrace{\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}}_{\text{beschränkt}}\|\right)}$$

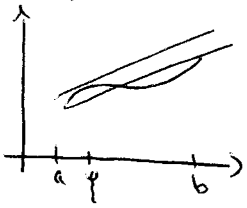
$\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} \to \gamma'(t)$

$\downarrow$

$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$

Mittelwertsatz:

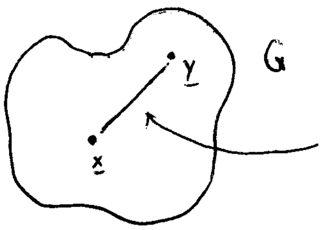
1D: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a,b)



$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

nD:

$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar



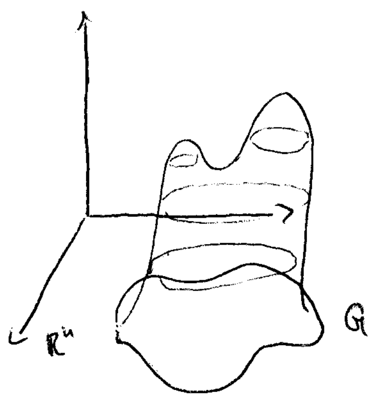
$\gamma(t) = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x})$
$\gamma(0) = \underline{x}$
$\gamma(1) = \underline{y}$

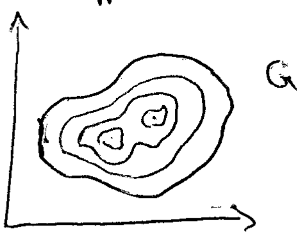
$F(t) := f(\gamma(t))$ $\exists \tau \in (0,1): F'(\tau) = \frac{F(1) - F(0)}{1-0}$

$$F'(\tau) = \boxed{\nabla f(\underline{x} + \tau(\underline{y} - \underline{x})) \cdot (\underline{y} - \underline{x}) \overset{!}{=} f(\underline{y}) - f(\underline{x})}$$

GEOMETRISCHE INTERPRETATION DES GRADIENTEN

Niveaulinien: $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar

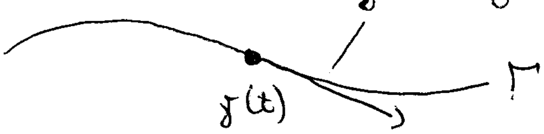




Γ ist Niveaulinie, wenn $f|_\Gamma = \text{const.}$

Ist $x \in G$ ein regulärer Punkt d.h. $\nabla f(\underline{x}) \neq 0$ dann lässt sich die Niveaulinie deren $\underline{x}$ (lokal) durch eine diff'bare Kurve parametrisiert werden:

$f(\underline{x}) = f(\gamma(t)) = \text{const.}$ $\forall t \in (-1,1)$; $\gamma(0) = \underline{x}$



$\gamma : (-1;1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(0))\cdot \gamma'(0) = \nabla f(\underline{x})\cdot \underline{\tau}$$ tangential an Niveaulinie

$\Rightarrow$ $\nabla f(\underline{x})$ steht senkrecht auf Niveaulinie

HÖHERE ABLEITUNGEN

$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar; $G \subset \mathbb{R}^2$

betr.: $\frac{df}{dx}$; $\frac{df}{dy}$: $G \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar

bilde: $\frac{d}{dy}\frac{df}{dx} \overset{?}{=} \frac{d}{dx}\frac{df}{dy}$

Allgemein vertauschen höhere partielle Ableitungen nicht.* $(\neq)$

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad f(0,0) = 0$

$f(x,y) = \frac{x y^3 - x^3 y}{x^2+y^2}$

Satz: $f: G \to \mathbb{R}$ 2x stetig diff'bar
(d.h. alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 existieren und sind stetig)
dann gilt: $\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{d^2 f}{dy\,dx}$

* auf deutsch:
Allgemein kann man höhere partielle Ableitungen nicht vertauschen

TAYLOR IN HÖHEREN DIMENSIONEN

1D: $F: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff'bar; $0 \in I$

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t)$$

Lagrange Restglied: $R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} t^{n+1}$ $\quad \tau \in (0,t)$

Def.: $f: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-mal stetig diff'bar
$:\Leftrightarrow$ alle partiellen Abl. der Ordnung k und kleiner existieren und sind stetig in G.

$G \subset \mathbb{R}^2$, $f: G \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff'bar

$$F(t) := f(\underline{x} + t\underline{h}) \; ; \qquad \gamma(t) = \underline{x} + t\underline{h}$$

$$F'(t) = \nabla f(\underline{x} + t\underline{h}) \cdot \underline{h} = h_1 \frac{df}{dx_1}(\underline{x} + t\underline{h}) + h_2 \frac{df}{dx_2}(\underline{x} + t\underline{h})$$

$$F''(t) = h_1 \nabla \frac{df}{dx_1}(\ldots) \cdot \underline{h} + h_2 \nabla \frac{df}{dx_2}(\ldots) \cdot \underline{h}$$

$$= h_1^2 \frac{d^2 f}{dx_1^2}(\ldots) + 2 h_1 h_2 \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2}(\ldots) + \cancel{h_1 h_2 \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2}}(\ldots) + h_2^2 \frac{d^2 f}{dx_2^2}(\ldots)$$

$$F'(t) = (h \cdot \nabla) f(\underline{x} + t\underline{h})$$

$$F''(t) = (h \cdot \nabla)^2 f(\underline{x} + t\underline{h})$$

$$\vdots$$

$$F^{(k)}(t) = (h \cdot \nabla)^k f(\underline{x} + t\underline{h})$$

$t = 1$

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + R_n(1) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (h \cdot \nabla)^k f(\underline{x}) + \mathcal{R}_n(\underline{x}, \underline{h}) = f(\underline{x} + \underline{h})}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_n(\underline{x}, \underline{h}) = \frac{1}{(n+1)!} (h \cdot \nabla)^{n+1} f(\underline{x} + \tau \underline{h}); \quad \tau \in (0,1)}$$