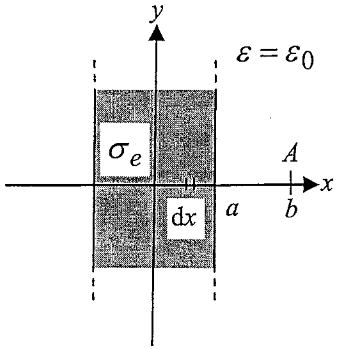
Übung zu
Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll

WS 09/10 - Blatt 2

Aufgabe 7



Ein in y-Richtung unendlich ausgedehntes Band der Breite $2a$ befindet sich in der x-y-Ebene symmetrisch zur y-Achse (s.Abb.). Das Band trägt die Flächenladungsdichte $\sigma_e > 0$. Gesucht ist die elektrostatische Feldstärke $\vec{E}$ in einem Punkt $A(b,0,0)$ auf der x-Achse.

a) Welchen Ladungsbelag trägt ein in y-Richtung ebenfalls unendlich ausgedehntes Stück des Bandes der infinitesimalen Breite dx?

b) Geben Sie einen Ausdruck für den Betrag dE des von einem solchen Teilstück hervorgerufenen elektrostatischen Feldes im Punkt A an. Verwenden Sie dazu den bekannten Ausdruck für das elektrostatische Feld einer unendlich langen, geraden Linienladung.

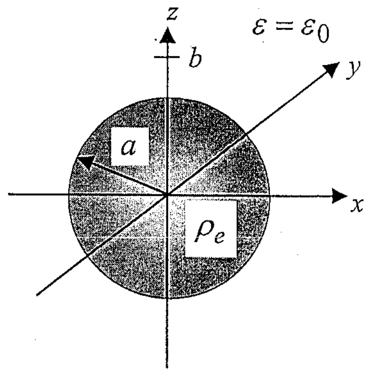
c) Bestimmen Sie $\vec{E}$ durch Integration über $\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E \cdot \vec{e}_x$.

d) Zeigen Sie, dass sich für $b >> a$ wiederum das Feld einer Linienladung ergibt. Wie groß ist der äquivalente Ladungsbelag q_L?

HINWEIS: Verwenden Sie die folgende Näherung für $x = \pm \frac{a}{b}$

$$\ln(1+x) \approx x \quad \text{für} \; |x| << 1$$

Aufgabe 8



Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ außerhalb einer kugelförmigen, homogenen Raumladungsverteilung ρ_e mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung soll mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5 bestimmt werden. Aus Symmetriegründen kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Aufpunkt $A(0,0,b)$ mit $b > a$ gewählt werden.

a) Die Kugel soll zunächst in Kreisscheiben parallel zur x-y-Ebene mit der infinitesimalen Dicke dz zerlegt werden. Geben Sie für eine solche Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $(0, 0, z)$ den Radius $R(z)$ und die äquivalente Flächenladungsdichte $\mathrm{d}\sigma_e$ an.

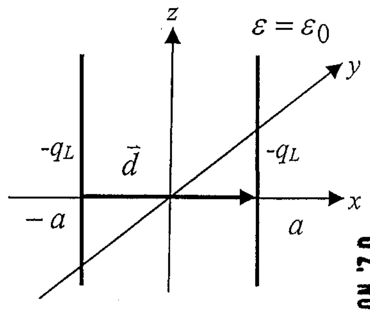
b) Wie groß ist der von dieser Kreisscheibe erzeugte Feldstärkebeitrag $\mathrm{d}\vec{E}$ im Aufpunkt $A(0,0,b)$?

c) Berechnen Sie $\vec{E}(0,0,b)$ durch Integration über $\mathrm{d}\vec{E}$.

HINWEIS:

$$\int \frac{B-x}{\sqrt{A^2+B^2-2Bx}} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{3B} \cdot \left(x + \frac{A^2-2B^2}{B} \right) \cdot \sqrt{A^2+B^2-2Bx}$$

Aufgabe 9



Bestimmen Sie in kartesischen Koordinaten das elektrische Feld eines Liniendipols als Grenzübergang einer Anordnung mit zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Linienladungen mit Ladungsbelägen entgegengesetzten Vorzeichens (s. Abb.):

$d = |\vec{d}| \to 0, \quad q_L \to \infty,$

$p_L = |\vec{p}_L| = |q_L \cdot \vec{d}| = \text{const};$

($\vec{p}_L$ heisst Liniendipolmoment, $a = d/2$).

Aufgabe 10

Die Feldlinien der elektrischen Feldstärke lassen sich für ein ebenes Problem ($z = 0, E_z = 0$) durch die Differentialgleichung $E_\varphi \cdot d\rho = \rho \cdot d\varphi \cdot E_\rho$ in Zylinderkoordinaten beschreiben.

a) Formulieren Sie die elektrische Feldstärke des idealen Liniendipols aus Aufgabe 9 in Zylinderkoordinaten.

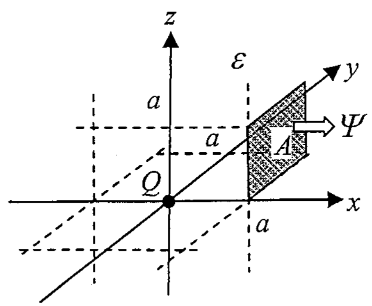
HINWEIS: $\vec{E} = p_L \cdot \left((x^2 - y^2) \cdot \vec{e}_x + 2xy \cdot \vec{e}_y\right) / \left(2\pi\varepsilon_0 \cdot (x^2 + y^2)^2\right)$

b) Setzen Sie dieses Ergebnis in die Differentialgleichung ein und ermitteln Sie durch Trennung der Variablen und Integration einen Ausdruck für die Punkte der Feldlinien in Zylinderkoordinaten.

c) Transformieren Sie dieses Ergebnis in kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass die Feldlinien Kreise in der x-y-Ebene sind.

Aufgabe 11

Im Ursprung des Koordinatensystems befindet sich eine Punktladung Q, der Raum hat überall die Permittivität ε (s. Abb.).



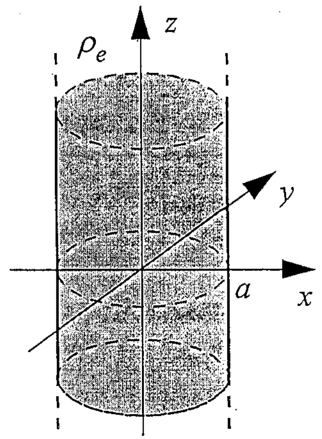
a) Bestimmen Sie den elektrischen Fluss Ψ durch eine quadratische Fläche A der Kantenlänge a ($x = a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$).

b) Was gilt für den elektrischen Fluss durch die geschlossene Hüllfläche eines Würfels mit der Kantenlänge $2a$?

HINWEIS: $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \pi/3$, $\int \frac{1}{\left(x^2 + B^2\right)^{3/2}} \cdot dx = \frac{x}{B^2 \cdot \sqrt{x^2 + B^2}}$,

$$\int \frac{1}{\left(x^2 + B^2\right) \cdot \sqrt{x^2 + 2B^2}} \cdot dx = \frac{1}{2B^2} \cdot \arctan\left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 2B^2}}{B^2}\right).$$

Aufgabe 12



a) Bestimmen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 8 und Aufgabe 11, diesmal mithilfe des Gauß'schen Satzes der Elektrostatik.

b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel aus Aufgabe 8 ?

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld einer in der x-y-Ebene unendlich ausgedehnten, homogenen Flächenladung mit der Flächenladungsdichte σ_e.

d) Bestimmen Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ einer axial unendlich ausgedehnten, zylinderförmigen, homogenen Raumladungsverteilung mit dem Radius a und der Raumladungsdichte ρ_e (s. Abb.) im Innen- und Außenraum.

Aufgabe 13

a) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_e der kugelförmigen Raumladungsverteilung aus Aufgabe 8 durch Integration der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$. Legen Sie dabei den Bezugspunkt P_0 in den Ursprung des Koordinatensystems.

b) Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie durch Gradientenbildung aus φ_e wieder $\vec{E}$ berechnen.

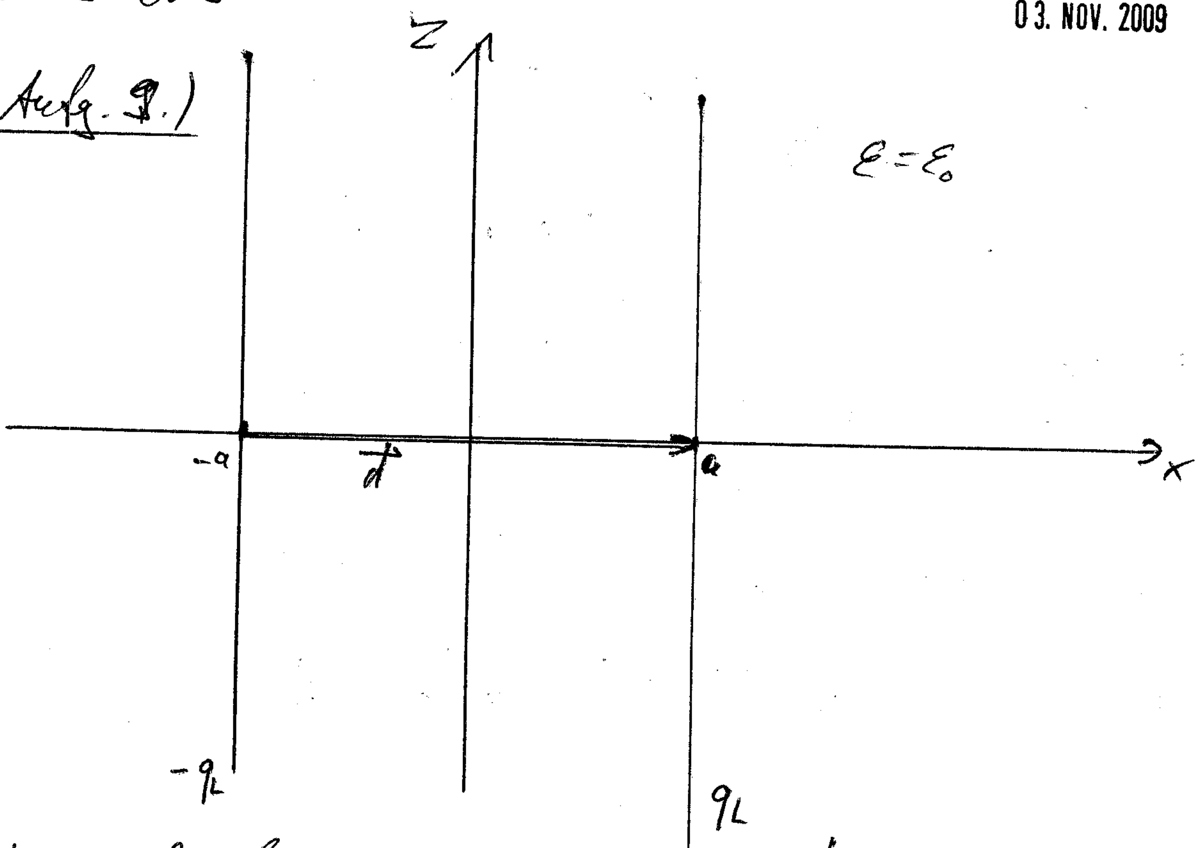
c) Was ergibt sich, wenn P_0 auf dem Kugelrand bzw. im Unendlichen liegt?

d) Skizzieren Sie $\left|\vec{E}\right|$ und φ_e in Abhängigkeit von r für die drei verschiedenen Bezugspunkte.

GET3 GÜS

03. NOV. 2009

Aufg. 9.)



$\varepsilon = \varepsilon_0$

Liniendipolmoment $\vec{p_L} = q_L \cdot \vec{d} \stackrel{!}{=} const.$

Feld einer Linienladung q_L in der z-Achse in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{E_0}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e_\varrho}}{\varrho}$$

Hier: Zwei Linienladungen, parallel zur z-Achse, sind aber verschoben um $\pm a \cdot \vec{e_x}$

! Zylinderkoordinaten ungeeignet

Umwandlung in kartesische Koordinaten:

eine Linienladung in der z-Achse:

$$\vec{E_0}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varrho \cdot \vec{e_\varrho}}{\varrho^2} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x \cdot \vec{e_x} + y \cdot \vec{e_y}}{x^2 + y^2}$$

Damit (rechte Linienladung):

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-a)\cdot\vec{e_x} + y\cdot\vec{e_y}}{(x-a)^2 + y^2}$$

Zur Erinnerung: $\vec{r_{Aa}} = \vec{r_A} - \vec{r_a}$

Entsprechend linke Linienladung:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x+a)\cdot\vec{e_x} + y\cdot\vec{e_y}}{(x+a)^2 + y^2}$$

Superposition: $\vec{E}_{ges}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$

$$E_{ges,x}(\vec{r}) = \vec{E}_{ges}(\vec{r})\cdot\vec{e_x} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}\right)$$

Abkürzungen: $\rho_1^2 = (x-a)^2 + y^2$

$\rho_2^2 = (x+a)^2 + y^2$

$$E_{ges,x} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(x-a)\left[(x+a)^2+y^2\right] - (x+a)\left[(x-a)^2+y^2\right]}{\rho_1^2\cdot\rho_2^2}$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(x^2-a^2-y^2)\cdot 2a}{\rho_1^2\cdot\rho_2^2}$$

Abkürzung: $p_L = q_L\cdot d = q_L\cdot 2a$

$$\rightarrow E_{ges,x}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x^2-a^2-y^2}{\rho_1^2\cdot\rho_2^2}$$

$$E_{ges,y}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{y}{(x+a)^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y\left[(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2\right]}{\rho_1^2\cdot\rho_2^2}$$

$\vdots$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y\cdot 4x\cdot a}{\rho_1^2\cdot\rho_2^2}$$

$$= \frac{p_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2xy}{\rho_1^2\cdot\rho_2^2}$$

03. NOV. 2009

Jetzt Grenzübergang: $\rho_L = \text{const.}$

$q_L \to \infty$

$d \to 0$

$a \to 0$

$$\lim_{a \to 0} \varrho_1^2 = x^2 + y^2$$

$$\lim_{a \to 0} \varrho_2^2 = x^2 + y^2$$

$$\to \lim_{a \to 0} E_{ges,x}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\to \lim_{a \to 0} E_{ges,y}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\to \vec{E}_{ges}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x^2-y^2)\cdot\vec{e_x} + 2xy \cdot \vec{e_y}}{(x^2+y^2)^2}$$

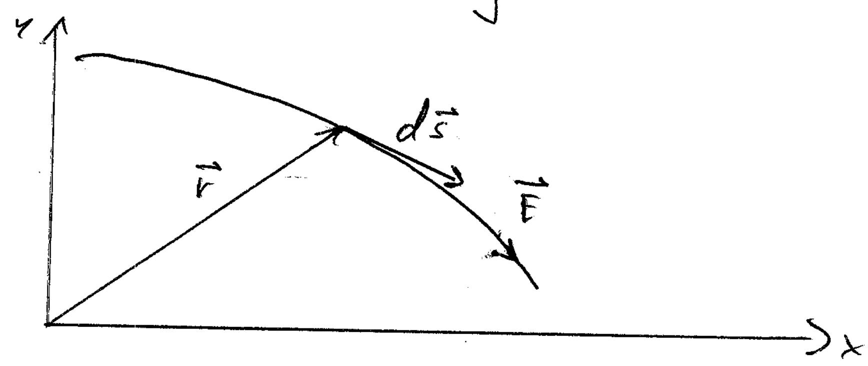
<u>Aufg. 10.)</u>

Vorbemerkung:

Die DGL $E_\phi \cdot d\varrho = \varrho \cdot d\phi \cdot E_\varrho$

beschreibt den Weg einer Feldlinie

über die Richtung von $d\vec{s}$



Ebenes Problem in kartesischen Koordinaten:

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e_x} + dy \cdot \vec{e_y} + \cancel{\underbrace{dz}_{=0} \cdot \vec{e_z}}$$

$d\vec{s} \uparrow\uparrow \vec{E}$ (gilt für jeden Punkt auf der Feldlinie)

$\rightarrow d\vec{s} = \alpha \cdot \vec{E}(\vec{r})$ mit $\alpha(\vec{r}) > 0$

$\rightarrow d\vec{s} \times \vec{E} \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow (d_x \cdot \vec{e_x} + d_y \cdot \vec{e_y}) \times (E_x \cdot \vec{e_x} + E_y \cdot \vec{e_y})$

$\rightarrow (d_x \cdot \vec{e_y} - d_y \cdot \vec{e_x})(\vec{e_z}) \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow d_x \cdot E_y \stackrel{!}{=} d_y \cdot E_x$

oder: $\frac{dx}{Ex} = \frac{dy}{Ey} \left(= \frac{dz}{E_z} \right)$

In Zylinderkoordinaten:

Wegelement $d\vec{s} = d\varrho \cdot \vec{e_\varrho} + \varrho \cdot d\phi \cdot \vec{e_\phi} \cancel{+ dz \cdot \vec{e_z}}$

$\stackrel{!}{=} \alpha \left(E_\varrho \cdot \vec{e_\varrho} + E_\phi \cdot \vec{e_\phi} \cancel{+ E_z \cdot \vec{e_z}} \right)$

Komponentenvergleich:

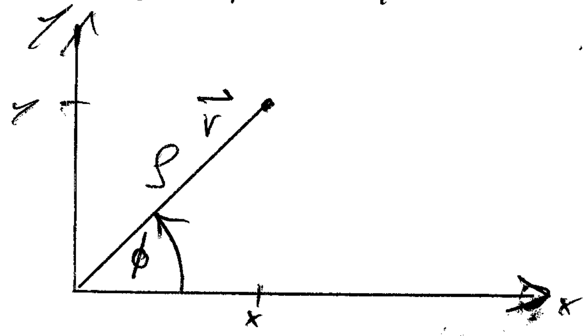
$\alpha = \frac{d\varrho}{E_\varrho} = \frac{\varrho \cdot d\phi}{E_\phi}$

$\rightarrow E_\phi \cdot d\varrho = \varrho \cdot d\phi \cdot E_\varrho$

03. NOV. 2009

Aufg. 10.)

a) Ersetze $\vec{e}_x, \vec{e}_y, x, y$ durch $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \rho, \phi$



In der x-y-Ebene: $|\vec{r}| = \rho$

$$x = \rho \cdot \cos(\phi) = \rho \cdot \frac{x}{\rho}$$

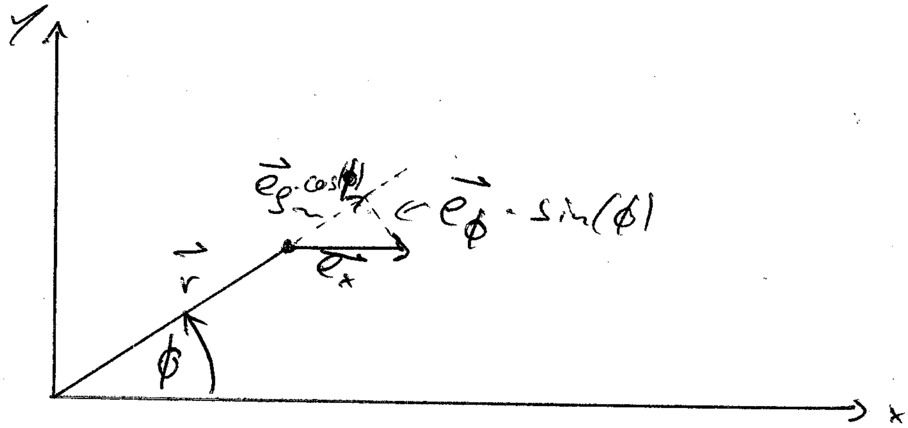
$$y = \rho \cdot \sin(\phi) = \rho \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cdot \cos(\phi) - \vec{e}_\phi \cdot \sin(\phi)$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_\rho \cdot \sin(\phi) + \vec{e}_\phi \cdot \cos(\phi)$$

Aus der Formelsammlung



$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi \varepsilon_0 \rho^4} \Big[\left(\rho^2 \cos^2(\phi) - \rho^2 \sin^2(\phi)\right)\left(\cos(\phi) \cdot \vec{e}_\rho - \sin(\phi) \vec{e}_\phi\right)$$

$$+ 2\rho^2 \cos(\phi) \left(\sin(\phi) \cdot \vec{e}_\rho + \cos(\phi) \cdot \vec{e}_\phi\right) \Big]$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi \varepsilon_0 \rho^2} \Big[\left(\cos^3(\phi) - \underline{\sin^2(\phi)\cos(\phi)} + \underline{2\cos(\phi)\sin^2(\phi)}\right) \cdot \vec{e}_\rho$$

$$+ \left(\underline{-\cos^2 \cdot \sin(\phi)} + \sin^3(\phi) + \underline{2\cos^2(\phi)\sin(\phi)}\right) \cdot \vec{e}_\phi \Big]$$

$$\approx \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \cdot \varrho^2}\Big[\big(\underbrace{\cos^3(\phi)+\cos(\phi)\cdot\sin^2(\phi)}_{\cos(\phi)\cdot(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi))}\big)\cdot\vec{e_\varrho} \quad \Leftarrow \quad \cos^2+\sin^2=1$$

$$+\big(\underbrace{\sin^3(\phi)+\cos^2(\phi)\cdot\sin(\phi)}_{\sin(\phi)\cdot(\underbrace{\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)}_{=1})}\big)\cdot\vec{e_\phi}\Big]$$

$$\vec{E}=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\varrho^2}\left[\cos(\phi)\cdot\vec{e_\varrho}+\sin(\phi)\cdot\vec{e_\phi}\right]$$

b.) Die DGL enthält E_ϱ und E_ϕ:
einsetzen

$$E_\phi\cdot d\varrho=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin(\phi)}{\varrho^2}\cdot d\varrho \overset{!}{=}$$

$$E_\varrho\cdot\varrho\cdot d\phi=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos(\phi)}{\varrho}\cdot d\phi \quad (\varrho>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\phi)}{\varrho^2}\cdot d\varrho=\frac{\cos(\phi)}{\varrho}\cdot d\phi$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{\varrho}\cdot d\varrho=\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}\cdot d\phi \quad \left(\begin{matrix}\varrho>0\\ \phi\neq k\cdot\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z}\\ 0<\phi<2\pi\end{matrix}\right)$$

$$\int\frac{1}{\varrho}\,d\varrho=\int\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}\,d\phi$$

Hinweis: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln(|f(x)|)+C$

$$\ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)+C_1=\ln(|\sin(\phi)|)+C_2$$

$$\ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)=\ln(|\sin(\phi)|)+(C_2-C_1) \qquad |\, e^x$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0}=|\sin(\phi)|\cdot e^{C_2-C_1}$$

GET3 GÜ 5

03. NOV. 2009

$$\rho = |\sin(\phi)| \cdot \underbrace{e^{c_2 - c_1} \cdot \rho_0}_{=:C}$$

-> parametrische Beschreibung der Feldlinien: $\rho = C \cdot |\sin(\phi)|$

für $\rho > 0$, $\phi \neq 0$, $\phi \neq \pi$

$(0 < \phi < 2\pi)$

c) Transformation in kartesische Koordinaten:

$$\sqrt{x^2+y^2} = C \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C|y|$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - |y| \cdot C = 0$$

Ziel: Kreisgleichung

-> Quadratische Ergänzung $+\left(\frac{C}{2}\right)^2$

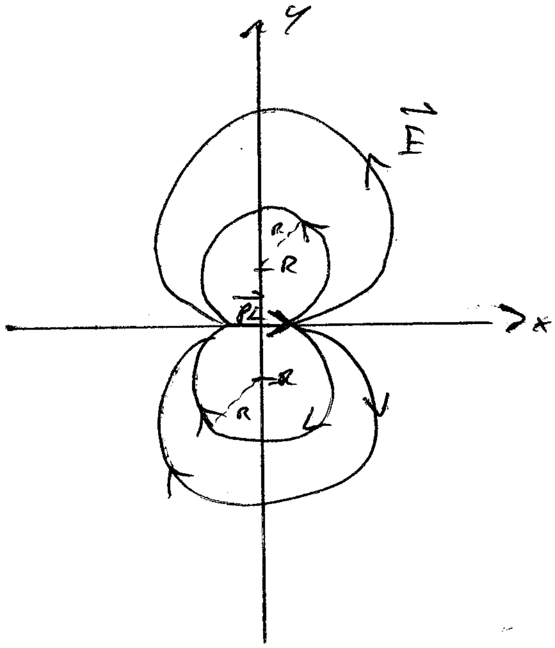
$$\Rightarrow \quad x^2 \underbrace{+ y^2 - C|y| + \left(\frac{C}{2}\right)^2}_{\left(|y| - \frac{C}{2}\right)^2} = \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

Abkürzung: $R := \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + (|y| - R)^2 = R^2$$

Kreisgleichung für Kreise mit dem Radius R und dem Mittelpunkt

$x = 0, |y| = R \Leftrightarrow y = \pm R$



Anm.:

Feldlinien sind nicht geschlossen, (da E-Feld)
sondern beginnen bei $x=0+$ und
enden ~~bei~~ $x=0-$