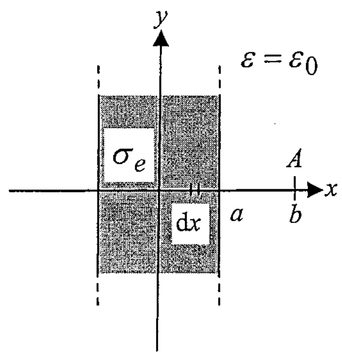
Übung zu
Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll

WS 09/10 - Blatt 2

Aufgabe 7



Ein in y-Richtung unendlich ausgedehntes Band der Breite $2a$ befindet sich in der x-y-Ebene symmetrisch zur y-Achse (s.Abb.). Das Band trägt die Flächenladungsdichte $\sigma_e > 0$. Gesucht ist die elektrostatische Feldstärke $\vec{E}$ in einem Punkt $A(b,0,0)$ auf der x-Achse.

a) Welchen Ladungsbelag trägt ein in y-Richtung ebenfalls unendlich ausgedehntes Stück des Bandes der infinitesimalen Breite dx?

b) Geben Sie einen Ausdruck für den Betrag dE des von einem solchen Teilstück hervorgerufenen elektrostatischen Feldes im Punkt A an. Verwenden Sie dazu den bekannten Ausdruck für das elektrostatische Feld einer unendlich langen, geraden Linienladung.

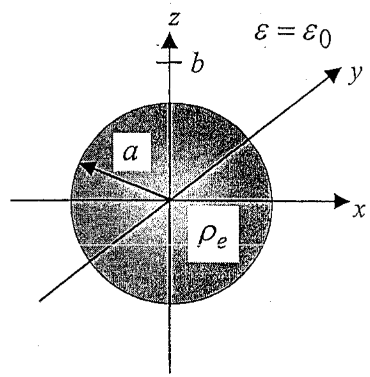
c) Bestimmen Sie $\vec{E}$ durch Integration über $\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E \cdot \vec{e}_x$.

d) Zeigen Sie, dass sich für $b >> a$ wiederum das Feld einer Linienladung ergibt. Wie groß ist der äquivalente Ladungsbelag q_L?

HINWEIS: Verwenden Sie die folgende Näherung für $x = \pm \frac{a}{b}$

$$\ln(1 + x) \approx x \quad \text{für} \; |x| << 1$$

Aufgabe 8



Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ außerhalb einer kugelförmigen, homogenen Raumladungsverteilung ρ_e mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung soll mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5 bestimmt werden. Aus Symmetriegründen kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Aufpunkt $A(0,0,b)$ mit $b > a$ gewählt werden.

a) Die Kugel soll zunächst in Kreisscheiben parallel zur x-y-Ebene mit der infinitesimalen Dicke dz zerlegt werden. Geben Sie für eine solche Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $(0, 0, z)$ den Radius $R(z)$ und die äquivalente Flächenladungsdichte $\mathrm{d}\sigma_e$ an.

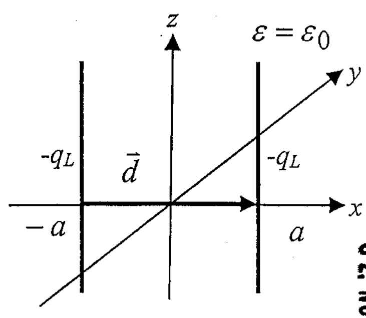
b) Wie groß ist der von dieser Kreisscheibe erzeugte Feldstärkebeitrag $\mathrm{d}\vec{E}$ im Aufpunkt $A(0,0,b)$?

c) Berechnen Sie $\vec{E}(0,0,b)$ durch Integration über $\mathrm{d}\vec{E}$.

HINWEIS:

$$\int \frac{B - x}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2Bx}} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{3B} \cdot \left(x + \frac{A^2 - 2B^2}{B} \right) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 - 2Bx}$$

Aufgabe 9



Bestimmen Sie in kartesischen Koordinaten das elektrische Feld eines Liniendipols als Grenzübergang einer Anordnung mit zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Linienladungen mit Ladungsbelägen entgegengesetzten Vorzeichens (s. Abb.):

$d = |\vec{d}| \to 0, \quad q_L \to \infty,$

$p_L = |\vec{p}_L| = |q_L \cdot \vec{d}| = \text{const};$

($\vec{p}_L$ heisst Liniendipolmoment, $a = d/2$).

02. NOV. 2009

Aufgabe 10

Die Feldlinien der elektrischen Feldstärke lassen sich für ein ebenes Problem ($z=0, E_z=0$) durch die Differentialgleichung $E_\varphi \cdot \mathrm{d}\rho = \rho \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot E_\rho$ in Zylinderkoordinaten beschreiben.

a) Formulieren Sie die elektrische Feldstärke des idealen Liniendipols aus Aufgabe 9 in Zylinderkoordinaten.

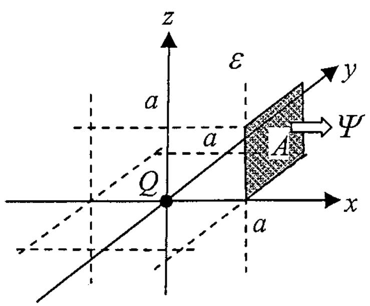
HINWEIS: $\vec{E} = p_L \cdot \left((x^2 - y^2)\cdot \vec{e}_x + 2xy \cdot \vec{e}_y\right) / \left(2\pi\varepsilon_0 \cdot (x^2+y^2)^2\right)$

b) Setzen Sie dieses Ergebnis in die Differentialgleichung ein und ermitteln Sie durch Trennung der Variablen und Integration einen Ausdruck für die Punkte der Feldlinien in Zylinderkoordinaten.

c) Transformieren Sie dieses Ergebnis in kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass die Feldlinien Kreise in der x-y-Ebene sind.

Aufgabe 11

Im Ursprung des Koordinatensystems befindet sich eine Punktladung Q, der Raum hat überall die Permittivität ε (s. Abb.).



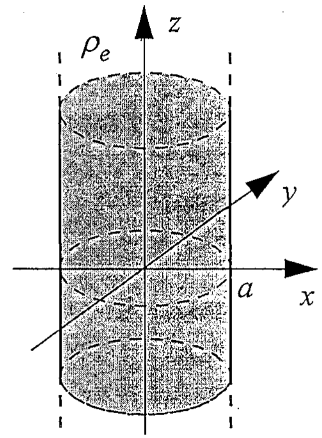
a) Bestimmen Sie den elektrischen Fluss Ψ durch eine quadratische Fläche A der Kantenlänge a ($x=a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$).

b) Was gilt für den elektrischen Fluss durch die geschlossene Hüllfläche eines Würfels mit der Kantenlänge $2a$?

HINWEIS: $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, $\int \frac{1}{\left(x^2+B^2\right)^{3/2}} \cdot \mathrm{d}x = \frac{x}{B^2 \cdot \sqrt{x^2+B^2}}$,

$$\int \frac{1}{\left(x^2+B^2\right)\cdot\sqrt{x^2+2B^2}} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2B^2} \cdot \arctan\left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2+2B^2}}{B^2}\right).$$

Aufgabe 12



a) Bestimmen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 8 und Aufgabe 11, diesmal mithilfe des Gauß'schen Satzes der Elektrostatik.

b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel aus Aufgabe 8 ?

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld einer in der x-y-Ebene unendlich ausgedehnten, homogenen Flächenladung mit der Flächenladungsdichte σ_e.

d) Bestimmen Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ einer axial unendlich ausgedehnten, zylinderförmigen, homogenen Raumladungsverteilung mit dem Radius a und der Raumladungsdichte ρ_e (s. Abb.) im Innen- und Außenraum.

Aufgabe 13

a) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_e der kugelförmigen Raumladungsverteilung aus Aufgabe 8 durch Integration der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$. Legen Sie dabei den Bezugspunkt P_0 in den Ursprung des Koordinatensystems.

b) Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie durch Gradientenbildung aus φ_e wieder $\vec{E}$ berechnen.

c) Was ergibt sich, wenn P_0 auf dem Kugelrand bzw. im Unendlichen liegt?

d) Skizzieren Sie $|\vec{E}|$ und φ_e in Abhängigkeit von r für die drei verschiedenen Bezugspunkte.

Don't worry - Be happy

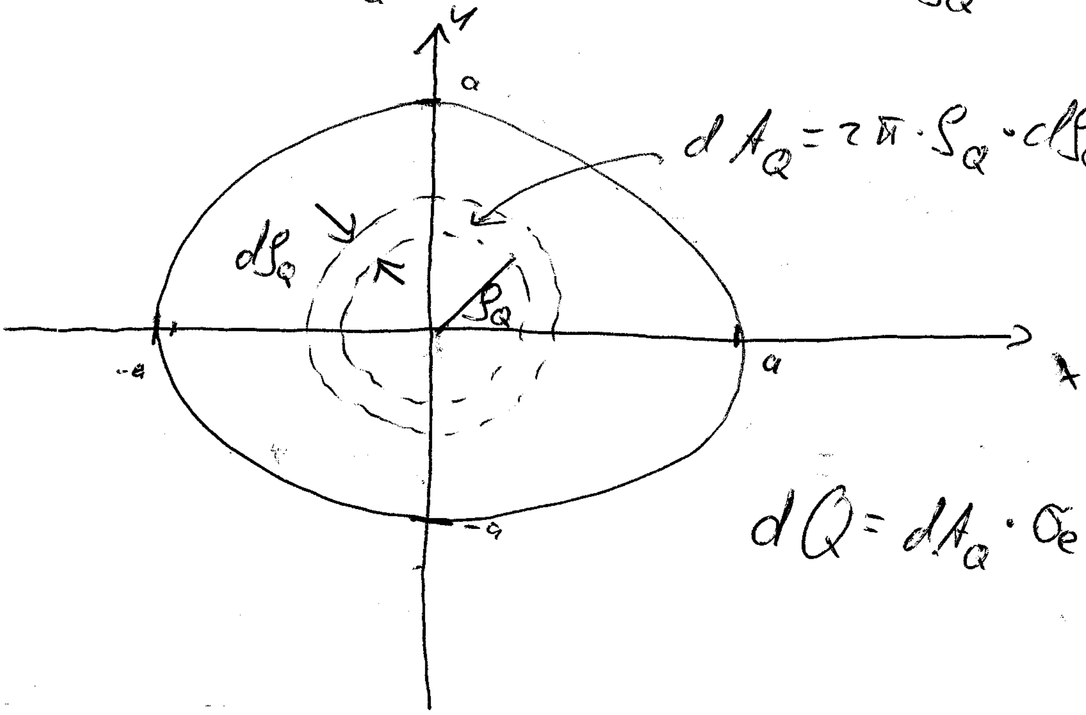
GET3 GÜ4 02. NOV. 2009

Fortsetzung Aufg. 5.)

Die Teilintegration über $d\phi_Q$ ist trivial:

$$E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^{a} \frac{\rho_Q \cdot d\rho_Q}{[\rho_Q^2 + b^2]^{3/2}} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} d\phi_Q}_{2\pi}$$

Ansatz mit dem Ergebnis aus Aufg. 4b, angewendet auf einen Kreisring mit dem Radius ρ_Q und der Breite $d\rho_Q$:



$$dA_Q = 2\pi \cdot \rho_Q \cdot d\rho_Q$$

$$dQ = dA_Q \cdot \sigma_e$$

Annäherung von dQ als ringförmige Linienladung mit dem Radius ρ_Q und dem Ladungsbelag dq_L

$$dQ = \sigma_e \cdot 2\pi\rho_Q \cdot d\rho_Q \stackrel{!}{=} dq_L \cdot 2\pi \cdot \rho_Q$$

$$\rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot d\rho_Q$$

d.h. ersetze im Ergebnis aus Aufg. 4b:

$E_z(0,0,b)$ durch $dE_z(0,0,b)$

q durch dq_L

a durch ρ_Q

$$dE_z(0,0,b) = \frac{dq_L \cdot \rho_Q \cdot b}{2\varepsilon_0 [\rho_Q^2 + b^2]^{3/2}}$$

c.) $$E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^{a} \frac{\rho_Q \cdot d\rho_Q}{[\rho_Q^2+b^2]^{3/2}}$$

AB:

$$E_z(0,0,b) \overset{\text{HINWEIS}}{=} \frac{\sigma_E\, b}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{[\rho_Q^2+b^2]^{1/2}}\right]_{\rho_Q=0}^{\rho_Q=a}$$

$$\vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b)\cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{b}\right]\cdot \vec{e}_z$$

Fernfeld für $b >> a$:

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b}\left[-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}} + 1\right]\cdot \vec{e}_z$$

Der Ansatz $\sqrt{a^2+b^2} \approx b$ ist hier zu ungenau!

Hinweis 1: $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ für $|x| << 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{1}{2}x \quad \text{für } |x| << 1$$

GET3 GÜ 4 02. NOV. 2009

Hinweis 2:

$$\approx \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\underbrace{\left[-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)+1\right]}_{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2}\cdot\vec{e}_z$$

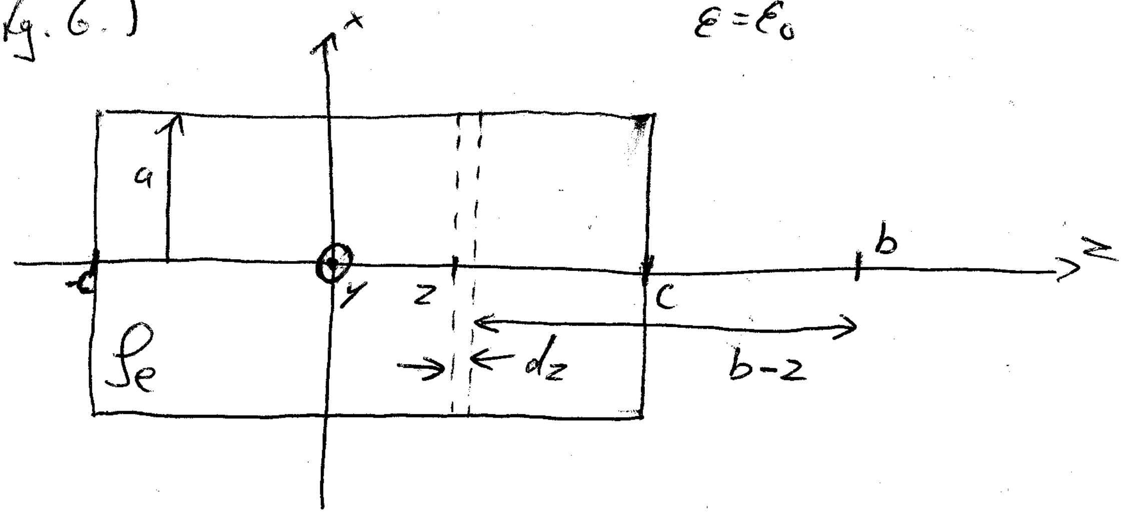
$$= \frac{\sigma_e \cdot a^2}{4\varepsilon_0 \, b^2}\cdot \vec{e}_z \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

Formulierung mit der Gesamtladung

$Q = \sigma_e \cdot \pi a^2$

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\vec{e}_z \quad \text{für } b \gg a$$

Aufg. 6.) $\varepsilon = \varepsilon_0$



a.) $dQ = \varrho_e \cdot dV = \varrho_e \cdot \pi a^2 \cdot dz$

$\stackrel{!}{=} d\sigma_e \cdot \pi a^2$

$\rightarrow d\sigma_e = \varrho_e \cdot dz$

Ersetze im Ergebnis aus Aufg 5c:

$\vec{E}(0,0,b)$ durch $d\vec{E}(0,0,b)$

σ_e durch $d\sigma_e$

b durch $b-z$

Voraussetzungen: $b-z > 0$

hier: $b > c \geq z$

$$d\vec{E}(0,0,b) = \frac{d\varrho_e \cdot (b-z)}{2\,\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} + \underbrace{\frac{1}{|b-z|}}_{=\frac{1}{b-z}}\right]\vec{e_z}$$

b.) $$\vec{E}(0,0,b) = \int_{z=-c}^{z=c} d\vec{E}$$

$$= \frac{\varrho_e}{2\,\varepsilon_0}\int_{z=-c}^{c}\left[-\frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} + 1\right]\cdot dz \cdot \vec{e_z}$$

Hilfestellung: $$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot(-1)\cdot f'(x)$$

$$= \frac{\varrho_e}{2\,\varepsilon_0}\cdot\left(\left[\sqrt{a^2+(b-z)^2}\right]_{z=-c}^{z=c} + 2c\right)\cdot\vec{e_z}$$

$$= \frac{\varrho_e}{2\,\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+(b-c)^2} - \sqrt{a^2+(b+c)^2} + 2c\right)\cdot\vec{e_z}$$

(für $b > c$)

Betrachte $0 < b < c$

1. Lösungsansatz:
Fallunterscheidung für den Integranden:

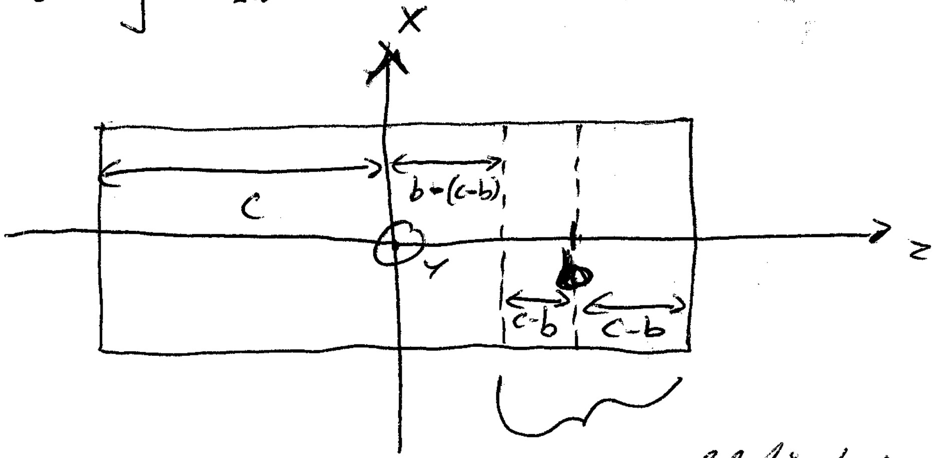
$$|b-z| = \begin{cases} b-z & \text{falls } b \geq z \\ z-b & b < z \end{cases}$$

GET3 GÜ4

02. NOV. 2009

$$\vec{E} = \int_{z=-c}^{b} \underbrace{\ldots}_{b \geq z} \, dz + \int_{z=b}^{c} \underbrace{\ldots}_{b < z} \, dz$$

2. Lösungsansatz



kein Feldstärkebeitrag!

Breite des Restzylinders:

$$c + b - (c - b) = 2b$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_{z=-c}^{b-(c-b)} \underbrace{\ldots}_{b > z} \, dz$$

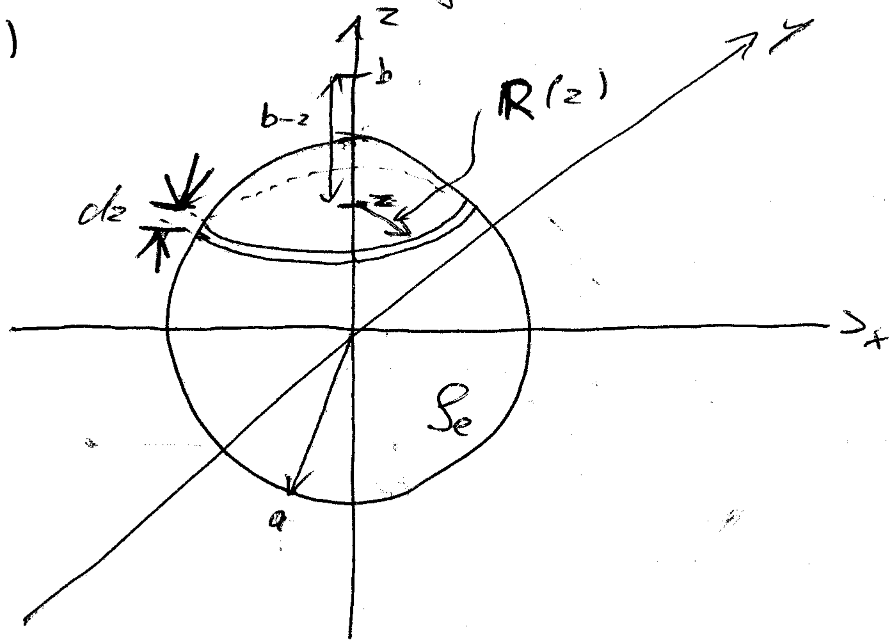
Lösung für $b<0$:

Aus Symmetriegründen:

$$\vec{E}(0,0,b) = -\vec{E}(0,0,-b)$$

Aufg. 7 wird übersprungen

Aufg. 8.)



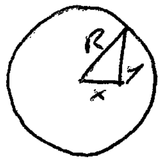
Aus Kugelsymmetrie folgt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \cancel{\theta}, \cancel{\phi}) \cdot \vec{e_r}$$
$$\cancel{+ E_\theta(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e_\theta}}$$
$$\cancel{+ E_\phi(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e_\phi}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \cdot \vec{e_r}$$

Gesucht: $R(z)$

Allg. gilt: $R^2(z) = x^2 + y^2$



und $R(z) > 0$

$\rightarrow R(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(vgl. ϱ in Zylinderkoordinaten)

Kugelgleichung: $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - z^2$

$\rightarrow R(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$

GET3 GÜ4

für $-a \leq z \leq a$

02. NOV. 2009

wie in Aufg. 6: $d\sigma_e = \rho_e \cdot dz$

b.) Mit dem Ergebnis aus Aufg. 5c.)

$\vec{E}(0,0,b)$ ersetzt durch $d\vec{E}(0,0,b)$

σ_e	–"–	$d\sigma_e$
a	–"–	$R(z)$
b	–"–	$b-z$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot dz}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{b-z}{\underbrace{\sqrt{R^2(z) + (b-z)^2}}_{a^2 - \cancel{z^2} + b^2 - 2bz + \cancel{z^2}}}\right] \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot dz}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2+b^2-2bz}}\right]\vec{e}_z$$

c.) $$\vec{E}(0,0,b) = \int_{z=-a}^{a} d\vec{E}$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0}\int_{z=-a}^{a}\left(1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2+b^2-2bz}}\right) \cdot dz$$

HINWEIS

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0}\left[z - \frac{1}{3b}\left(z + \frac{a^2-2b^2}{b}\right)\sqrt{a^2+b^2-2bz}\right]_{z=-a}^{z=a}$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0}\left[2a - \frac{1}{3b}\left(a + \frac{a^2-2b^2}{b}\right)\underbrace{\sqrt{\underbrace{a^2+b^2-2ab}_{(a-b)^2}}}_{|a-b| = b-a}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3b}\left(-a + \frac{a^2-2b^2}{b}\right)\underbrace{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}_{|a+b|=a+b}\right]$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0}\left[2a - \frac{1}{3b^2}\left\{(a\cdot b + a^2-2b^2)(b-a) - (-ab+a^2-2b^2)(a+b)\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0}\left[2a - \frac{1}{3b^2}\left\{6ab^2 - 2a^3\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0}\left[2a - 2a + \frac{2a^3}{3b^2}\right]$$

$$= \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\frac{a^3}{b^2}\cdot \vec{e}_z$$

Mit der Gesamtladung $Q = \rho_e \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\rho_e \cdot a^3\, 4\pi}{3}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\vec{e}_z$$

entspricht für $b>a$ exakt dem Feld einer Punktladung im Ursprung.