HöMa Übung3 am 28.10.09

A7) Elipse $E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} = 1 \right\}$

Umfang U des Rechtecks hängt nur von der Wahl eines Eckpunktes $(x_1,\, x_2)$ des Rechteckes ab $o.B.d.A\, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$

$U\,(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$ Maximiere $U(x_1, x_2)$

unter NB. $g\,(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} - 1 = 0$

Da U stetig und Definitionsbereich kompakt, existiert ein Maximum (auf dem Def.Bereich).

$\nabla g(x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2\right) \neq 0$ für $(x_1, x_2) \in E$

Sei (x_1, x_2) eine Extremstelle , dann gilt :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla U(x_1, x_2) + \lambda \nabla(g(x_1, x_2)) = 0 \;\wedge\; g(x_1, x_2) = 0$

(nach Satz 4.10)

(*)$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{pmatrix} = 0 \;\wedge\; \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} - 1 = 0$

$\begin{matrix} 4 + \lambda x_1 = 0 \\ 4 + \frac{1}{2}\lambda x_2 = 0 \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} \lambda x_1^2 = -4x_1 \\ \lambda \frac{1}{2} x_2^2 = -4x_2 \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \lambda x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda x_2^2 = -4(x_1 + x_2) \;\Leftrightarrow$

$2\lambda \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} \right) = -4(x_1 + x_2)$

Nach Annahme folgt $\Rightarrow 2\lambda = -4(x_1 + x_2) \qquad \Leftrightarrow \lambda = -2(x_1 + x_2)$

λ einsetzen in (*)

$\Rightarrow x_1^2 + x_1 x_2 = 2 \;\wedge\; x_1 x_2 + x_2^2 = 4$

Nach $x_1 x_2$ auflösen und Einsetzen :

$\Rightarrow x_1^2 + 4 - x_2^2 = 2 \;\Rightarrow x_1^2 = -2 + x_2^2 \;\Rightarrow \frac{x_1^2}{2} = -1 + \frac{x_2^2}{2}$

NB auf beidenseiten addieren

$\Rightarrow x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{4}x_2^2 - 2 \;\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} - 1 = -2 + \frac{3}{4}x_2^2 \;\Rightarrow 0 = -2 + \frac{3}{4}x_2^2$

$\Rightarrow nd\frac{8}{3} = x_2^2 \;\Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

x_2 in NB einsetzen um x_1 zu erhalten:

$\frac{x_1^2}{2} + \frac{\frac{8}{3}}{4} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow x_1^2 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\Rightarrow$Extremum wird an der Stelle $(x_1,\, x_2) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{6},\, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$angenommen.

D.h Das Gesuchte Rechteck besitzt Eckpunkte an den Stellen:

$(x_1,\, x_2) = \left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{6},\, \pm\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ mit $U\,(x_1,\, x_2) = 4\sqrt{6}$

A8) $F\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\to\mathbb{R}\quad F(y)=\int\limits_0^{\sin y}\arctan\left(\tan\left(y\right)-x\right)dx$

Zeige das F diff'bar ist und berechne $F'(0)=?$

Ziel Leibniz Regel anwenden

$G:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\,0<y<\frac{\pi}{3}\,,\,0<x<\sin(y)\right\}$

$\alpha(y)=0\,,\,\beta(y)=\sin(y)$ sind auf $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ diff'bar.

$f\left(x,y\right)=\arctan\left(\tan(y)-x\right);\;\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\dfrac{1+\tan^2(y)}{1+\left(\tan(y)-x\right)^2}$ auf G stetig.

Leibniz Regel wenn F(y) steig und diff'bar auf $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

dann gilt $F'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx+f\left(\beta(y),y\right)\cdot\beta'(y)-f\left(a(y),y\right)\cdot\alpha'(y)$

$\Rightarrow also\,F'(0)=0+f(0,0)\cdot cos(0)-f(0,0)\cdot 0=f(0,0)$

$=\arctan\left(\tan(0)-0\right)=0$

A9) $F(y,a,b)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ **mit**

$f(x,y)=y^2e^x$ **,** $a=a(y)=\ln(y)$ **,** $b=b(y)=2\ln(y)$

Zu bestimmen $\dfrac{\partial}{\partial y}F\left(y,a(y),b(y)\right)$, sowie $\dfrac{d}{dx}F\left(y,a(y),b(y)\right)$

i) $\dfrac{\partial}{\partial y}F(y,a(y),b(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)}\dfrac{\partial}{\partial y}\,f(x,y)dx=\int\limits_{a(y)}^{b(y)}2ye^x\,dx=\int\limits_{\ln y}^{2\ln y}2ye^x\,dx$

$=\left[2ye^x\right]_{\ln y}^{2\ln y}=2y\cdot y^2-2y\cdot y=\underline{2y^3-2y^2}$

ii) $\dfrac{d}{d\,y}F(y,a(y),b(y)=\dfrac{\partial}{\partial y}F+\dfrac{\partial}{\partial a}F\cdot a'(y)+\dfrac{\partial}{\partial b}F\cdot b'(y)$

mit $\dfrac{\partial}{\partial a}F=-f(a(y),y)\wedge a'(y)=\dfrac{1}{y}\quad\dfrac{\partial}{\partial b}F=f(b(y),y)\;\wedge b'(y)=\dfrac{2}{y}$

also:

$\dfrac{d}{dx}F=2y^3-2y^2-f\left(\ln(y),y\right)\cdot\dfrac{1}{y}+f(2\ln(y),y)\cdot\dfrac{2}{y}$

$=2y^3-2y^2-y^2y\frac{1}{y}+y^2y^2\frac{2}{y}=2y^3-2y^2-y^2+2y^3=4y^3-3y^2$

A10) $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\,x^2-y^2=8z\}\;\wedge\;P=(0,0,2)$

Gesucht $P'\in S\;mit\;\parallel P'-P\parallel\;minimal$

Abstand von $P'=(x,y,z)\,zu\,P=(0,0,2)\;:$

$\parallel P'-P\parallel=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}$

Es genügt $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}$ zu maximieren.
$f(x,y,z)\, und\, NB\; g(x,y,z)=x^2-y^2-8z=0$
Esplizities Verfahren
Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen:
$x^2-y^2-8z=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=\frac{1}{8}(x^2-y^2) \quad \Rightarrow$einsetzen in f
$f(x,y,z(x,y))=\tilde{f}(x,y)=x^2+y^2+\left(\frac{1}{8}\left(x^2-y^2\right)-2\right)^2$
$==x^2+y^2+\frac{1}{64}(x^2-y^2-16)$
$\nabla\tilde{f}_x(x,y)=2x+\frac{2}{64}(x^2-y^2-16)\cdot 2x$
$\nabla\tilde{f}_y(x,y)=2y+\frac{2}{64}(x^2-y^2-16)\cdot(-2)y$
$\rightarrow 2x+\frac{1}{16}(x^2-y^2-16)x\ ,\ 2y-\frac{1}{16}(x^2-y^2-16)y$
(x,y) bildet Extremen , wenn $\nabla\tilde{f}(x,y)=0$, d.h.
$x\cdot\left(32+x^2-y^2-16)=0\right) \ \wedge\ y\cdot y(32-x^2+y^2+16)=0$
$\Rightarrow x=0 \vee (x^2-y^2)=-16 \ \wedge\ y=0 \vee (x^2-y^2)=48$
$\Rightarrow x=0 \wedge y=0$ Also eine mögliche Extremstelle bei (0,0).
Mit Hesse-Matriy prüfen welcher Art Extremum ist.
$H_{\tilde{f}}(x,y)=\begin{pmatrix}\tilde{f_{xx}}(x,y) & \tilde{f_{xy}}(x,y)\\ \tilde{f_{yx}}(x,y) & \tilde{f_{yy}}(x,y)\end{pmatrix}$
$\tilde{f_{xx}}(x,y)=2+\frac{1}{16}(x^2-y^2-16)+\frac{x}{16}\cdot 2x$
$\tilde{f_{yy}}(x,y)=2-\frac{1}{16}(x^2-y^2-16)-\frac{y}{16}\cdot(-2y)$
$\tilde{f_{xy}}(x,y)=\tilde{f_{yx}}(x,y)=\frac{x}{16}\cdot(-2y)$
$H_{\tilde{f}}(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ EW bei $(1\,;\,3)>0 \Rightarrow H_{\tilde{f}}(0,0)\, pos.definit\ \Rightarrow (0,0)\, ist\, Minimum$
$z=\frac{1}{8}(x^2-y^2)=0$,d.h $P'=(0,0,0)\ \parallel P'-P\parallel=2>1$