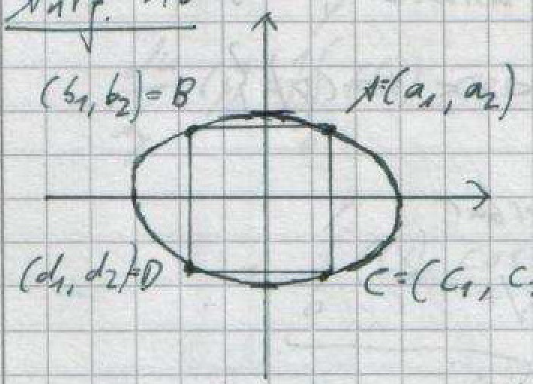
3. Übung

Aufg. 10



Die Kanten des gesuchten Rechtecks müssen parallel zu den Hauptachsen liegen

Symmetrie $\Rightarrow$ $a_1 = -b_1$, $a_2 = -c_2$

$\Rightarrow U(a_1, a_2) = \cancel{2a_1}\ 2(2a_1 + 2a_2) = 4a_1 + 4a_2$ ist der

der Umfang des gesuchten Rechtecks

Die Nebenbedingung $g(a_1, a_2) = 1 - \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_2^2}{4} = 0$ für Punkte auf der Ellipse.

Die Funktionen U und g sind differenzierbar

$$\nabla g(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -\frac{a_2}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_1 > 0,\ a_2 > 0$$

$\Rightarrow$ Satz 4.10 liefert in der Maximalstelle (a_1^*, a_2^*):

$$\nabla U(a_1^*, a_2^*) + \lambda \nabla g(a_1^*, a_2^*) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (4,4) + \lambda\left(-a_1^*, \frac{-a_2^*}{2}\right) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow a_1^* = \frac{4}{\lambda} \text{ und } a_2^* = \frac{8}{\lambda} \quad \text{falls } \lambda \neq 0$$

Falls $\lambda = 0$ hat dieses Gleichungssystem keine Lösung

Einsetzen in die Nebenbedingung:

$$g(a_1^*, a_2^*) = g\left(\frac{4}{\lambda}, \frac{8}{\lambda}\right) = 1 - \frac{16}{2\lambda^2} - \frac{64}{4\lambda^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ Wir haben 2 Kanidaten für Maximierer gefunden:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ und $\cancel{\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}$

Nach Konstruktion bleibt $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ übrig.

Damit gilt für den maximalen Umfang: $U\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$= 12\sqrt{\frac{2}{3}}$

Aufg. 11

Prüfe ob die Leibnizregel (Satz 5.3) anwendbar ist.

$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y < \frac{\pi}{3},\ 0 < x < \sin(y)\right\}$

Vorrauss.: • $\alpha(y) = 0$ ist auf $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ differenzierbar

[differenzierbar auf $[a,b]$ bedeutet:

1. differenzierbar in (a,b)
2. rechtsseitig diffbar in a
3. Linksseitig " in b]

• $\beta(y) = \sin(y)$ ist auf $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ differenzierbar

• $f(x,y) = \arctan(\tan(y) - x)$ ist auf $\bar{G}$ stetig und dort auch partiell nach y differenzierbar

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1 + (\tan(y) - x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(y)}$$ ist auf $\bar{G}$ stetig, da

$\cos(y) \geq c > 0$ auf $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Die Vorraussetzungen von Satz 5.3 sind erfüllt

$\Rightarrow$ F ist auf $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ stetig und diffbar

Weiter gilt:

$$\frac{dF}{dy}(y) = \int_0^{\sin(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\sin(y),y)\,\beta'(y) - \underbrace{f(0,y)\,\alpha'(y)}_{=0}$$

$$= \int_0^{\sin(y)} \frac{1}{1+(\tan(y)-x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(y)}\,dx + \arctan(\tan(y)-\sin(y))\cos(y)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(y)}\Big[-\arctan(\tan(y)-x)\Big]_{x=0}^{x=\sin(y)} + \arctan(\tan(y)-\sin(y))\cos(y)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(y)}\big(-\arctan(\tan(y)-\sin(y))+y\big) + \arctan(\tan(y)-\sin(y))\cos(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dy}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \arctan\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Hier bei Aufgabe 11 F'(0) im neuen Übungsblatt A8: F'(pi/4)

A7 = 10
A8 = 11 F'(pi/4) aufpassen
A9 = B13
A10 = n.v. (nicht vorhanden), aber gern noch nachschauen und ergänzen…

Nr. 13 Berechne $\frac{\partial}{\partial y} F(y, a(y), b(y))$ und $\frac{d}{dy} F(y, a(y), b(y))$ für

$$F(y, a(y), b(y)) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx$$

mit $f(x,y) = y^2 e^x$, $a(y) = \ln(y)$, $b(y) = 2\ln(y)$

i) $$\frac{\partial}{\partial y} F(y, a(y), b(y)) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_{\ln(y)}^{2\ln(y)} 2y e^x\, dx = 2y \cdot e^x \Big|_{\ln(y)}^{2\ln(y)}$$

$$= 2y\,(y^2 - y) = 2y^3 - 2y^2$$

ii) $$\frac{d}{dy} F(y, a(y), b(y)) = \frac{\partial}{\partial y} F + \frac{\partial}{\partial a} F \cdot a'(y) + \frac{\partial}{\partial b} F \cdot b'(y)$$

es gilt: $\frac{\partial}{\partial a} F = - f(a(y), y)$, $a'(y) = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial}{\partial b} F = f(b(y), y)$, $b'(y) = \frac{2}{y}$

Damit:

$$\frac{d}{dy} F(y, a(y), b(y)) = 2y^3 - 2y^2 - \frac{1}{y} f(\ln(y), y) + \frac{2}{y} f(2\ln(y), y)$$

$$= 2y^3 - 2y^2 - \frac{1}{y} \cdot y^3 + \frac{2}{y} \cdot y^4$$

$$= 4y^3 - 3y^2$$