HöMa3 Übung 2 am 21.10.09

A3)

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}19+5x_1+7x_2^2+x_1^4cos\left(\dfrac{9}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right) & f\ddot{u}r\, x_1,x_2\neq 0\\ 19 & f\ddot{u}r\ (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

a)

Zu zeigen gilt : Es gibt ein $a\in\mathbb{R}^2$und eine Funktion :

$R\,(x_1,x_2)$ mit $\dfrac{R\,(x_1,x_2)}{||\,(x_1,x_2)\,||}\to 0$

sodass

$f(x_1,x_2)-f(0,0)=<a;(x_1,x_2)>=a_1x_1+a_2x_2+R\,(x_1,x_2)$ gilt.

$f(x_1,x_2)-f(0,0)=5x_1+7x_2^2+x_1^4cos\left(\dfrac{9}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right)$für $(x_1,x_2)\neq(0,0)=$

$\underbrace{5x_1+0x_2}+7x_2^2+x_1^4cos\left(\dfrac{9}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right)$

$(5,0)*(x_1,x_2)+R\,(x_1,x_2)$

Es bleibt zu zeigen, dass $\dfrac{R\,(x_1,x_2)}{||\,(x_1,x_2)\,||}\to 0\,f\ddot{u}r\ ||x_1,x_2||\to 0$

$$\left\|\frac{R\,(x_1,x_2)}{||\,(x_1,x_2)\,||}\right\|=\frac{|7x_2^2+x_1^4cos\left(\dfrac{9}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right)|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\leq\frac{7x_2^2+x_1^4\left\|cos\left(\dfrac{9}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right)\right\|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\leq$$

$$\frac{7x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\frac{x_1^4\cdot 1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\leq 7\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\leq 7\left\|x_1,x_2\right\|+\left\|x_1,x_2\right\|^3\to 0$$

b)

$\partial_{x1}f(x_1,x_2)=5+4x_1^3\cdot cos(...)+x_1^4\cdot(-sin(...))\cdot\dfrac{9\cdot(-2)\cdot 2x_1}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^3}=5+4x_1^3cos(...)+$

$\dfrac{36x_1^5}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^3}sin(...)$

$\partial_{x2}f(x_1,x_2)=14x_2+x_1^4\cdot\left(-sin(...)\cdot\dfrac{(-36)x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^3}\right)$

Betrachte

$\partial_{x1}f(x_1,x_2)|_{(0,0)}=\lim\limits_{h\to 0}f(x_1+h,x_2)-f(x_1,x_2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{19+5h+h^4cos\dfrac{9}{h^4}-19}{h}=5+\lim\limits_{h\to 0}h^3cos\dfrac{9}{h^4}=5+0=5$

$\partial_{x1} f(x_1, x_2) = 5 + 4x_1^3 cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) + 36x_1^5 sin\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) \cdot \frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^3}$ für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

$$\partial_{x1} f(x,0) = \begin{cases} 5 + 4x_1^3 cos\left(\frac{9}{x_1^4}\right) + \frac{36}{x_1} \cdot sin\left(\frac{9}{x_1^4}\right) & f\ddot{u}r\, x_1 \neq 0 \\ 5 & f\ddot{u}r\, x_1 = 0 \end{cases}$$

Analoge betrachtung von $\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \neq 0}} \partial_{x1} f(x_1, 0)$ führt dazu das Fkt. nicht stetig partiell diff'bar ist.

A4)

i)

Annahme: f in $x_o$diff'bar , d.h $\forall x$in einer Umgebung $x_0$gilt:

$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x_1 - x_0) + R(x)$ mit $R(x) = o(\| x_1 - x_0 \|) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{\| x - x_0 \|} = 0$ wobei $c = \nabla f(x_0)$ ist.

Sei $\| a \| = 1$ sowie $x = x_0 + h \cdot a$ so gilt für $|h| = \| x - x_0 \|$

$f(x_0 + h \cdot a) - f(x_0) = c \cdot h \cdot a + R(x_0 + h \cdot a)$

Nun ist:

$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \overset{Def.}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h \cdot a) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot a \cdot h + R(x_0 + h \cdot a)}{h} = ca + 0 = \nabla f(x_0) \cdot a$ q.e.d

ii)

$\left| \frac{\partial f}{\partial a} |x_0| \right| = |\nabla f(x_0) \epsilon| \overset{\epsilon \leq V}{\leq} \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|a\| = \|\nabla f(x_0)\|$q.e.d

iii)

Gilt $\nabla f(x_0) = 0 \Rightarrow$für alle Richtung a ?

$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = 0$ also ab jetzt $\nabla f(x_0) = \underline{0}$

$a_0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\| \nabla f(x_0) \|}$ Dann wird damit eine Richtung definiert.

Mit $\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot a_0 = \frac{(\nabla f(x_0))^2}{\| \nabla f(x_0) \|} = \frac{\| \nabla f(x_0) \|^2}{\| \nabla f(x_0) \|} = \| \nabla f(x_0) \|$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)\; ist\, maximal$ q.e.d.

A5)

Zu Untersuchen gilt: $f(x,y) = x^2 e^{xy} + 4sin(y(1-x))$

$f(0,0) = 0$
$f_x(x,y) = 2x \cdot e^{xy} + x^2y \cdot e^{xy} - y^2cos(y(1-x))$
$f_y(x,y) = x^3e^{xy} + sin(y(1-x) + 4cos(y(1-x)) \cdot (1-x)$
$f_x(0,0) = 0$
$f_y(0,0) = 0$
$f_{xx}(x,y) = 2e^{xy} + 2xy^2 \cdot e^{xy} + 2xy \cdot e^{xy} + x^2y^2e^{xy} - y^3sin(y(1-x))$
$f_{yy}(x,y) = x^4e^{xy} + cos(y(1-x)) \cdot (1-x) + cos(y(1-x))(1-x)$
$-y(1-x)sin(y(1-x))$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} - 2ycos(y(1-x))$
$+y^2(1-x)sin(y(1-x)$
$f_{xx}(0,0) = 2$
$f_{yy}(0,0) = 2$
Es gillt als für $\parallel (h,k) \parallel$klein:
$f\,(0+h, 0+k) = f\,(0,0) + f_x\,(0,0) \cdot h + f_y(0,0) \cdot k + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)h^2$
$+2f_{xy}(0,0)hk + f_{yy}(0,0)k^2 + R_2(h,k) = h^2 + k^2 + R_2(h,k)$
$R_2(h,k) = \dfrac{1}{3!} \cdot \left[f_{xxx}(\tau h, \tau k)h^3 + f_{yyy}(\tau h, \tau k)k^3 + 3f_{xxy}(\tau h, \tau k)h^2k + 3f_{yyx}(\tau h, \tau k)hk^2\right]$
$||R_2| \leq \frac{1}{3!}c(h+k)^3 \;\Rightarrow R_2 = o\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2\right) f\ddot{u}r \sqrt{h^2+k^2} \to 0$
Also $f(h,k) = h^2 + k^2 + O\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2\right)$
$\Rightarrow$In Umgebung von (0,0) gilt $o = f(0,0) \leq f(h,k)$
$\Rightarrow$f hat in (0,0) lokales Minimum