Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll

WS 09/10 - Blatt 1

Aufgabe 1

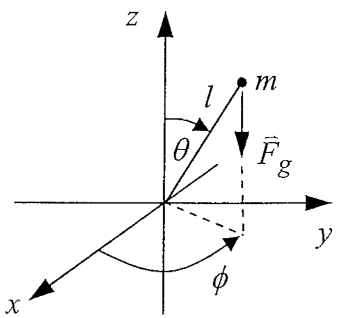
a) Geben Sie das in Zylinderkoordinaten $\vec{r}(\rho,\phi,z)$ vorliegende Vektorfeld $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi$ in kartesischen Koordinaten an.

b) Geben Sie das in Kugelkoordinaten $\vec{r}(r,\theta,\phi)$ vorliegende Vektorfeld $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$ in kartesischen Koordinaten an.

c) Geben Sie das Vektorfeld $\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{1}{r_{AQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{AQ}}$ für $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$ in kartesischen Koordinaten (x_A, y_A, z_A) an.

Aufgabe 2

Ein starrer, masseloser Stab der Länge l trägt an einem Ende die Masse m. Das andere Ende ist drehbar im Koordinatenursprung gelagert. Auf die Masse m wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_g = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z$.



Berechnen Sie die Zugkraft auf den Stab $F_l = \vec{F}_g \cdot \frac{\vec{l}}{l}$ und das Drehmoment im Ursprung $\vec{L} = \vec{l} \times \vec{F}_g$.

HINWEIS: Der Hebelarm ist $\vec{l} = l \cdot \vec{e}_r$.

Aufgabe 3

Eine Kugel mit dem Radius R trägt auf der Oberfläche die Flächenladungsdichte $\sigma_e(\theta) = \sigma_{e0} \cdot \cos\theta$.

Das Innere der Kugel $(r < R)$ ist ladungsfrei.

a) Welche Ladung Q_1 trägt die obere Hälfte der Kugel ($0 \le \theta \le \pi/2$)?

HINWEIS: Verwenden Sie bei der Integration die Substitution $u = \sin\theta$.

b) Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel?

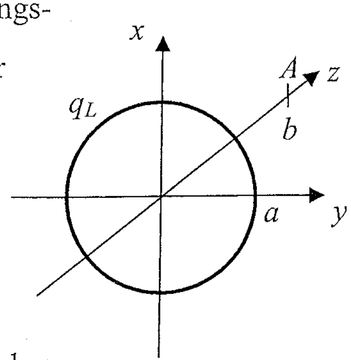
Anstelle der Flächenladung hat die Kugel nun die Raumladung $\rho_e(r) = \rho_{e0} \cdot r / R$.

c) Wie groß ist jetzt die Gesamtladung der Kugel?

HINWEIS: Der Mittelpunkt der Kugel liegt im Koordinatenursprung.

Aufgabe 4

Eine kreisförmige Linienladung mit dem Ladungsbelag $q_L \neq f(\vec{r})$ und dem Radius a liegt in der x-y-Ebene. Im gesamten Raum gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.



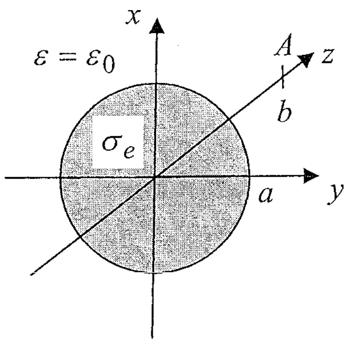
a) Welches Koordinatensystem ist hier zweckmäßig? Formulieren Sie den Vektor von einem infinitesimalen Ladungselement $\mathrm{d}Q$ zu einem Aufpunkt $A(0,0,b)$ auf der z-Achse.

b) Geben Sie das elektrostatische Feld $\vec{E}(0,0,b)$ der Linienladung an.

c) Welches elektrostatische Feld $\vec{E}(0,0,b)$ ergibt sich näherungsweise für $b >> a$ (im Fernfeld)?

Aufgabe 5

Eine kreisförmige Scheibe mit dem Radius a und der Flächenladungsdichte σ_e befindet sich in der x-y-Ebene. Ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems (vgl. Abb.).



a) Formulieren Sie $\mathrm{d}Q$, $\vec{r}_{AQ}$ und die Integrationsgrenzen zur Bestimmung von $\vec{E}$ im Aufpunkt $A(0,0,b)$ für $b > 0$.

b) Welche Teilintegration ist aus Symmetriegründen trivial? Wie lässt sich das Integral mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4 formulieren?

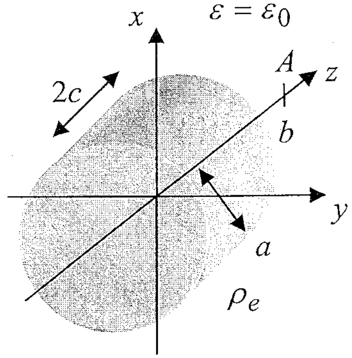
c) Wie groß ist $\vec{E}(0,0,b)$? Was ergibt sich für das Fernfeld ($b >> a$) auf der z-Achse?

HINWEISE: $\int x \cdot (x^2 + A^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -(x^2 + A^2)^{-1/2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x \qquad \text{für } |x| << 1$$

Aufgabe 6

Ein Zylinder mit der homogenen Raumladungsdichte ρ_e hat den Radius a und die Länge $2c$ in z-Richtung. Sein Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5 soll das auf der z-Achse im Punkt $A(0,0,b)$ erzeugte elektrostatische Feld für $b > c$ berechnet werden (s. Abb.).



a) Welche Flächenladungsdichte $\mathrm{d}\sigma_e$ hat ein näherungsweise als Kreisfläche betrachteter Teilzylinder mit dem Radius a und der infinitesimalen Länge $\mathrm{d}z$? Geben Sie die von einem solchen Teilzylinder mit dem Mittelpunkt $(0,0,z)$ im Punkt $A(0,0,b)$ erzeugte Feldstärke $\mathrm{d}\vec{E}$ an.

b) Berechnen Sie nun $\vec{E}(0,0,b)$ durch Integration über $\mathrm{d}\vec{E}$ im Intervall $-c \leq z \leq c$.

GET3 GÜ 3

27. OKT. 2009

Hinweis: Zusatzveranstaltung „Mathematische Methoden" findet noch nicht übermorgen (Mi 28.10.) statt!

freiwillige HA: Abgabe bis Di. Mittag 3.11.09
vom aktuellen Blatt: Aufg. 6
im Grünen Holzkasten gegenüber Seminarraum (213)

Fortsetzung Aufg. 2)

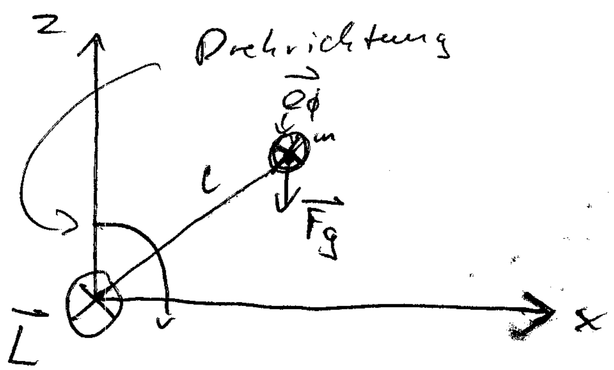
$$\vec{T} = (l \cdot \vec{e_r}) \times (-m \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{e_r} + m \cdot g \cdot \sin(\theta) \vec{e_\theta})$$

$$= (-l \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)) \cdot \underbrace{(\vec{e_r} \times \vec{e_r})}_{=0}$$

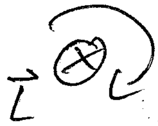
$$+ (l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\theta)) \cdot \underbrace{(\vec{e_r} \times \vec{e_\theta})}_{\vec{e_\phi}}$$

am Ort der Masse

$$\Rightarrow \vec{T} = l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e_\phi}$$

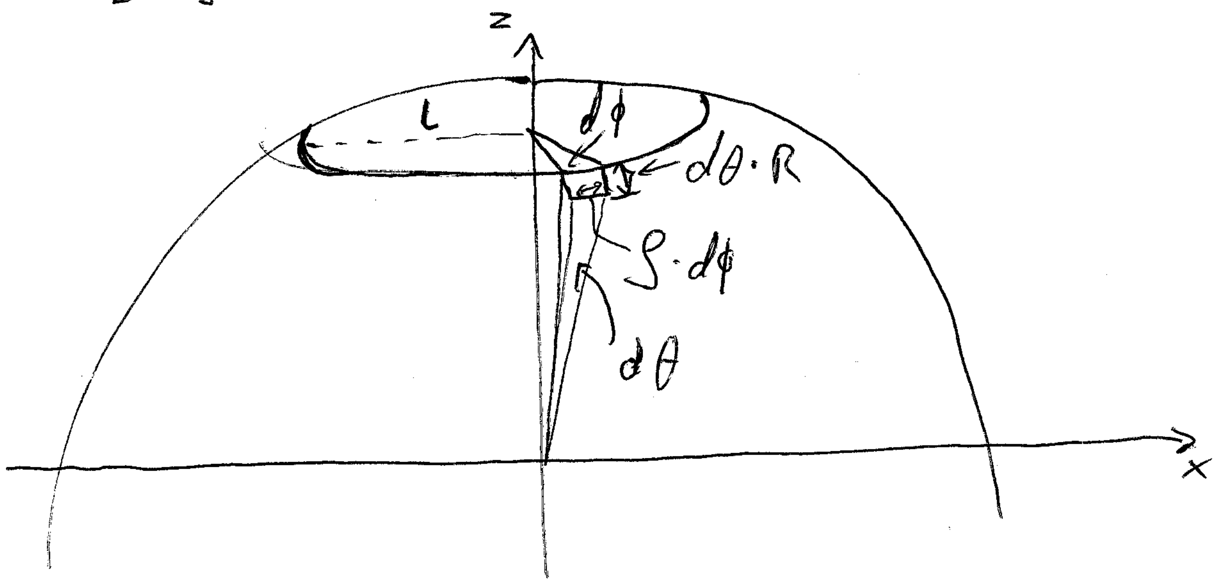


Anmerkung: Die Richtung von $\vec{L}$ und der Drehsinn sind im Rechtsschrauben-sinn miteinander verknüpft.



Aufg 3.)

$$[\sigma_e] = 1 \, \frac{As}{m^2}$$



$$dA = \underbrace{R \cdot \sin(\theta)}_{\rho} \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta$$

$$dQ = \sigma_e(\theta) \cdot dA$$

a.)

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} dQ(\theta, \phi)$$

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} R^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_{e0} \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \cos(\theta)$$

$$Q_1 = R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta$$

substitution $u = \sin(\theta)$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos(\theta)$$

GET3 GÜ3

27. OKT. 2009

$\rightarrow du = d\theta \cdot \cos(\theta)$

Grenzen: $\theta = 0 \rightarrow u = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$.

$$Q_1 = R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_{u=0}^{u=1} u \cdot du}_{=\frac{1}{2}} = \underline{\underline{R^2 \cdot \sigma_{e0} \cdot \pi}}$$

b.) $Q_{ges} = Q_1 + Q_2$ untere Hälfte

Bereich $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

Grenzen: $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$

$\theta = \pi \rightarrow u = 0$

$$Q_2 = R^2 \sigma_{e0} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_{u=1}^{0} u \cdot du}_{-\frac{1}{2}}$$

$Q_2 = -Q_1 \Rightarrow \underline{\underline{Q_{ges} = 0}}$

c.) Jetzt inhomogene Raumladung

$\rho_e = \rho(r)$

$$Q_{ges} = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_e(r) \cdot dV$$

$dV = dA \cdot dr$

$$Q_{ges} = \frac{\rho_{e0}}{R} \cdot \underbrace{\int_{r=0}^{R} r^3 \cdot dr}_{\frac{1}{4}R^4} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta}_{\underbrace{\left[-\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi}}_{=2}} \cdot \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$Q_{ges} = \frac{\rho_{e0}}{\cancel{R}} \cdot \cancel{\frac{1}{4}} R^{\cancel{4}\,3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}\pi = \rho_{e0} \cdot \pi \cdot R^3$$

<u>Aufg. 4.1</u>

$q_L = \text{const.}$ $\qquad\qquad [q_L] = \frac{As}{m}$

$\varepsilon = \varepsilon_0$

am Ort der Ladung, wo uns die Kraft ~~der~~ auf die Ladung, bzw. das lokale E-Feld interessiert

a) $\underset{0}{\nabla}$ Hier liegt der Aufpunkt auf der z-Achse

$\Rightarrow$ Anordnung ist rotationsymmetrisch zur z-Achse

Gesucht: $\overrightarrow{r_{AQ}}$

(sinnvoll: Zylinderkoordinaten)

Aufpunktvektor: $\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$

Quellpunktvektor: $\vec{r}_Q = a \cdot \underbrace{\vec{e}_\rho}_{= f(\phi_Q)}$

GET3 GÜ3

27. OKT. 2009

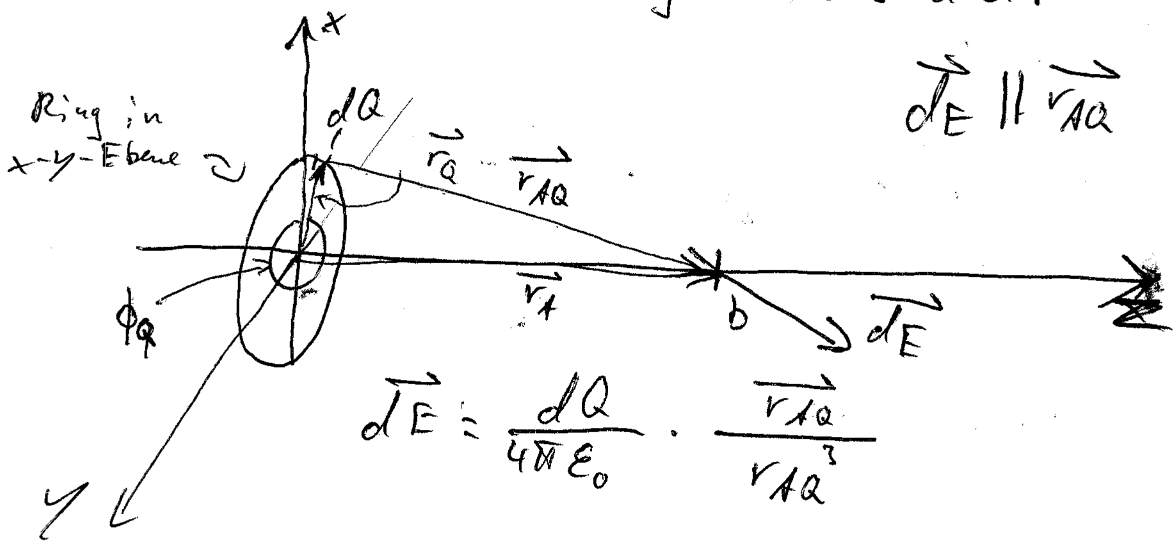
$\rho_Q = a$

$z_Q = 0$

$\phi_Q = [0, 2\pi[$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)$$

<u>b.)</u> Betrachte zunächst den Feldstärkebeitrag eines kleinen Ladungselementes dQ.



$\vec{dE} \parallel \vec{r}_{AQ}$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$$

$$r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = |b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)|$$

wegen $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\rho$:

$$r_{AQ} = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)}{\sqrt{b^2 + a^2}^3}$$

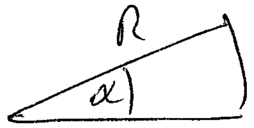
Aus der Rotationssymmetrie der Anordnung folgt: $\vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E}(0,0,b)$

$$= E_z(0,0,b)\,\vec{e}_z$$

$$E_z(0,0,b) = \int_{\substack{\text{Linien-}\\ \text{Ladung}}} dE_z(0,0,b)$$

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}^3}$$

hier ist $dQ = q_L \cdot \underbrace{ds}_{a \cdot d\phi_Q}$



$\approx \alpha \cdot R$ bei Bogenmaß

$$E_z = \frac{q_L}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}^3} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} a \cdot d\phi_Q}_{a \cdot 2\pi}$$

$$\vec{E}(\vec{r_A}) = \vec{E}(0,0,b) = E_z \cdot \vec{e_z}$$

c.) Fernfeld: $b >> a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{q_L \cdot a \cdot b}{2 \cdot \varepsilon_0 \underbrace{\sqrt{b^2+\cancel{a^2}}^3}} \approx \sqrt{b^2}^3 = b^3$$

a auf Dauer zu vernachlässigen

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{q_L \cdot a}{2\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e_z}$$

Formulierung mit der Gesamtladung Q des Kreisrings: $Q = 2\pi a q_L$

$$\vec{E}(\vec{r_A}) \approx \frac{q_L \cdot a \cdot 2\pi}{2\varepsilon_0 \cdot b^2 \cdot 2\pi} \cdot \vec{e_z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e_z}$$

$(b > 0)$

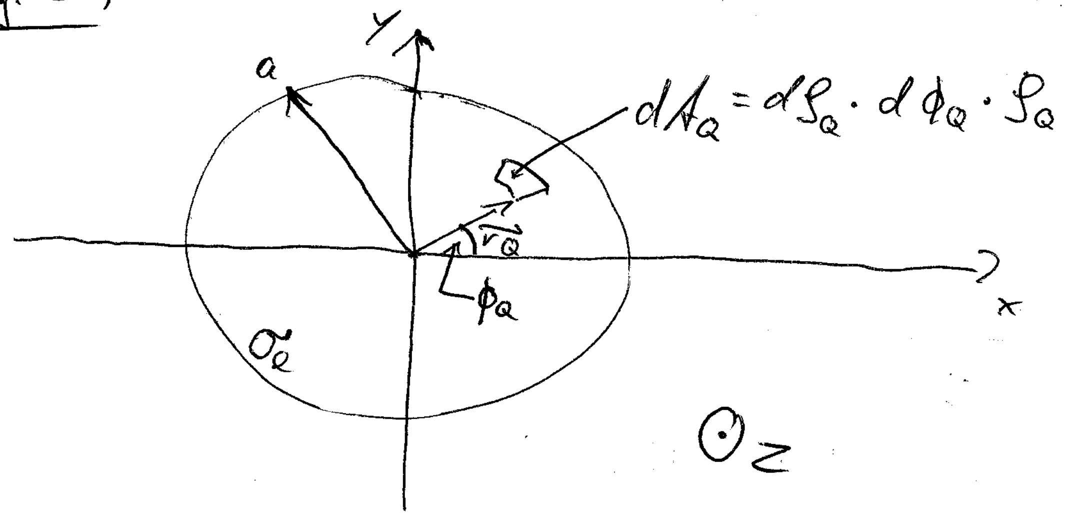
GET3 GÜ3

27. OKT. 2009

Dies entspricht dem Feld einer Punktladung Q im Ursprung.

Aufg. 5.)

a)



$$dQ = \sigma_e \cdot dA_Q = \sigma_e \cdot d\rho_Q \cdot \rho_Q \cdot d\phi_Q$$

$$\vec{r_Q} = \rho_Q \cdot \vec{e_\rho}(\phi_Q)$$

$$\vec{r_A} = b \cdot \vec{e_z}$$

$$\vec{r_{AQ}} = \vec{r_A} - \vec{r_Q} = b \cdot \vec{e_z} - \rho_Q \cdot \vec{e_\rho}(\phi_Q)$$

Quellgebiet: $0 \le \rho_Q \le a$

$0 \le \phi_Q < 2\pi$

$z_Q = 0$

b.) $$\vec{E}(\vec{r_A}) = \vec{E}(0,0,b) = \int_{\rho_Q=0}^{a} \int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \vec{r_{AQ}} \cdot \frac{1}{r_{AQ}^3}}_{d\vec{E}}$$

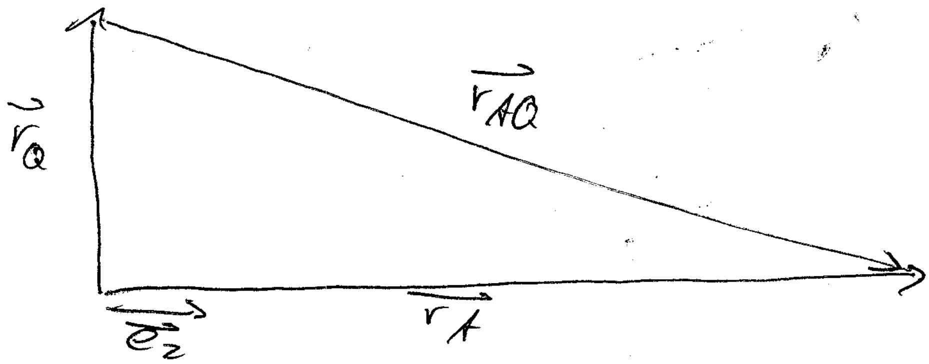
Aus Rotationssymmetrie folgt:

$$E(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e_z} \quad \text{(vgl. A4)}$$

$$d E_z(0,0,b) = d\vec{E}(0,0,b)\cdot\vec{e_z}$$

$$= \frac{\vec{r_{AQ}}\cdot\vec{e_z}}{r_{AQ}^3}\cdot\frac{\sigma_e\cdot\rho_Q\cdot d\phi_Q\cdot d\rho_Q}{4\pi\,\varepsilon_0}$$

Dabei ist $\vec{r_{AQ}}\cdot\vec{e_z} = b$



$$|\vec{r_A}| = b = \vec{r_{AQ}}\cdot\vec{e_z}$$

$$|\vec{r_{AQ}}| = \sqrt{\rho_Q^2 + b^2}$$

$$r_{AQ}^3 = \sqrt{\rho_Q^2 + b^2}^{\,3} = (\rho_Q^2 + b^2)^{3/2}$$