Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 02 vom 19. Oktober 2009

Teil A

Aufgabe A3

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 19 + 5x_1 + 7x_2^2 + x_1^4 \cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) & \text{für } x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 19 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist, indem Sie die Definition der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher verifizieren.

(b) Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen von f auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe A4

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und f sei differenzierbar an $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, f ist an x_0 in jeder Richtung $a \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot a \text{ und } \left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right| \leq \|\nabla f(x_0)\|\,.$$

Ferner ist $a_0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt x_0.

Aufgabe A5

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 e^{xy} + y\sin(y(1-x))$$

um den Punkt $(0,0)$ in ein Taylorpolynom zweiten Grades. Zeigen Sie damit, dass f im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum hat.

Aufgabe A6

Seien $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimmen Sie, für $x \geq 0, y \geq 0$ die Extrema der Funktion $f(x,y) := xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = c > 0$, wobei $g(x,y) := \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$. Sie können dabei die Existenz eines Maximums voraussetzen. Folgern Sie die Youngsche Ungleichung $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

Teil B

Aufgabe B5 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + z$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 2, 3)$ in Richtung des Vektors $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Aufgabe B6 Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 2 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die Tangentialebene an den Graphen $z = f(x, y)$ im Punkt $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Aufgabe B7 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \sin(mx + ny)$ das Taylor-Polynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und geben Sie das Restglied (nach Lagrange) an.

Aufgabe B8 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \frac{1}{8}(x^2 - y^2)$. Bestimmen Sie den Punkt auf dem Graph von f

$$\mathcal{F} := \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

der zu dem Punkt $P := (0, 0, 1)$ den kleinsten Abstand besitzt.

HM3 KGÜ2

BS1)

Def.: b innerer Punkt von $\mathbb{R}^3$ und $\|a\|=1$.

Dann ist

$$\partial_a f(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h\cdot a)-f(b)}{h}$$

die Richtungsableitung von f im Punkt b nach a.

gegeben:

$b=(1,2,3)$, $a=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

gesucht: $\partial_a f(b) = \frac{\partial}{\partial a} f(b)$

$\|a\|=1$ ✓

$$\partial_a f(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + h\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)}{h} \quad (*)$$

$$f\left(1+\frac{h}{\sqrt{3}},\ 2+\frac{h}{\sqrt{3}},\ 3+\frac{h}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 3\cdot\left(1+\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(2+\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3 + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$= 3 + \frac{6h}{\sqrt{3}} + h^2 - 4 - \frac{4h}{\sqrt{3}} - \frac{h^2}{3} + 3 + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$= 2 + \frac{2}{3}h^2 + \sqrt{3}h$$

$$f(1,2,3) = 3\cdot 1^2 - 2^2 + 3 = 2$$

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2} + \frac{2}{3}h^{\cancel{2}} + \sqrt{3}\cancel{h} - \cancel{2}}{\cancel{h}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

2.7.

B6.) Def.: Tangentialebene von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ f differenzierbar.

$$T(x_0) := \{(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}; \eta - f(x_0) = \partial_{x_1} f(x_0)(\xi_1 - x_1) + \partial_{x_2} f(x_0)(\xi_2 - x_2) + \dots\}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(2\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\underline{x} = (\frac{\pi}{2}, 0)$

$$T(\underline{x}) = \{(\xi_1, \xi_2, \eta) \in \mathbb{R}^3; \eta - \underbrace{f(x)}_{1.} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(\underline{x})}_{2.} \cdot (\xi_1 - x) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(\underline{x})}_{3.}(\xi_2 - y)\} \quad (*)$$

1.) $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 0$

2.) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{2x \cos(2\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} - \frac{x \cdot \sin(2\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \partial_x f(\frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\cancel{\pi} \cdot \cos(\pi)}{\cancel{\pi^2}/4} = \underline{-\frac{4}{\pi}}$

3.) $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{2y \cdot \cos(2\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} - \frac{y \cdot \sin(2\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(\frac{\pi}{2}, 0) = \underline{0}$

(*) $\eta - 0 = -\frac{4}{\pi}\left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \cancel{+ 0 \cdot (\xi_2 - 0)}$

$\Leftrightarrow \eta = -\frac{4}{\pi}\left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right)$

$T\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \eta) \in \mathbb{R}^3,\ \eta = -\frac{4}{\pi}\left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \right\}$

$\xi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta = 0$

$\left(\frac{\pi}{2}, \xi_2, 0\right)\ \xi_2 \in \mathbb{R}$

Noch zu zeigen: f diff'bar

<u>Satz 2.3.</u>

f in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diff'bar, wenn

$\exists a \in \mathbb{R}^n : f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = \mathcal{O}(\|x - x_0\|)$

mit $\mathcal{O}(\|x - x_0\|) \xrightarrow[\|x - x_0\| \to 0]{} 0$

(i) $\overline{(x,y)}^{x_0 =} \neq (0,0)$: f diff'bar in $\mathbb{R}^2$ nach Satz 2.4., da f stetig partiell diff'bar für alle x aus Umg. von $\underline{x_0}$ ist

„stetig partiell diff'bar": alle part. Abl. sind stetig

(ii) $(x,y) = (0,0)$: $f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) - a(\underline{x} - \cancel{\underline{x_0}}) = \mathcal{O}(\|\underline{x} - \cancel{\underline{x_0}}\|)$

$= \frac{\sin(2\|\underline{x}\|)}{\|\underline{x}\|} - 2 \cancel{- a \cdot \underline{x}} = \mathcal{O}(\|x\|) + a \cdot \underline{x}$

$\Rightarrow \underline{a = 0}$ und $\mathcal{O}(\|x\|) = \frac{\sin(2\|\underline{x}\|)}{\|\underline{x}\|} - 2$

noch zu zeigen: $O(\|\underline{x}\|) \underset{\|x\| \to 0}{\to} 0$

$$\frac{\sin(2\|\underline{x}\|) - 2\|x\|}{\|x\|} \overset{\text{"0/0"}}{\to} \frac{\cos(2\|x\|)\cdot 2 - 2}{1} \to 0$$

$\square$

B 7.) Taylor-Polynom um $a \in \mathbb{R}^2$ von $f(x,y)$

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\underline{x}-a)^k + R_\infty(x,y)$$
$$\overset{n=3}{=} \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\underline{x}-a)^k + R_3(x,y)$$

$$R_3(x,y) = \frac{f^{(4)}(a + \vartheta(\underline{x}-a))}{4!} (\underline{x}-a)^4 \quad \vartheta \in (0,1)$$

$f(x,y) = \sin(mx+ny)$, $a = (0,0)$

$k=0$: $\underbrace{\frac{f^{(0)}(a)}{0!}}_{=1} \cdot (\underline{x}-a)^0 = f(a)$

$k=1$: $\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 = \partial_x f(a)\cdot x + \partial_y f(a)\cdot y$

$k=2$: $\frac{f^{(2)}(0,0)}{2!}((x,y)-(0,0))^2 = \big(\partial_{xx} f(0,0)\cdot x^2 y^0 + \underbrace{\partial_{xy} f(0,0)\cdot x\cdot y + \partial_{yx} f(0,0)\, y\cdot x}_{2\cdot\partial_{xy} f(0,0)\cdot xy} + \partial_{yy} f(0,0)\, y^2 x^0\big)\cdot \frac{1}{2}$

$f(0,0) = 0$ $\quad \partial_y f(0,0) = n$ $\quad \partial_{yy} f(0,0) = 0$ $\quad \partial_{xxx} f(0,0) = -m^3$

$\partial_x f(0,0) = m$ $\quad \partial_{xx} f(0,0) = 0$ $\quad \partial_{xy} f(0,0) = 0$ $\quad \partial_{xyy} f(0,0) = -n^2 m$

$\partial_{xxy} f(0,0) = -m^2 n$ $\quad \partial_{yyy} f(0,0) = -n^3$

~~HM3~~ KGÜ 2

27. OKT. 2009

$k=3$: analog

$$\partial_{xxy} f(0,0) = \partial_{xyx} f(0,0) = \partial_{yxx} f(0,0)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 0 + mx + ny + 0 - \frac{1}{3!}(m^3x^3 + n^3y^3 + 3n^2mxy^2 + 3m^2nx^2y^2) + R_3$$

$$= mx + ny - \frac{(mx+ny)^3}{3!} + R_3$$

$k=4$: R_3

$$\partial_{xxxx} f(a + \vartheta(\underline{x}-a)) = \partial_{xxxx} f(\vartheta \underline{x}) = m^4 \cdot \sin(mx+ny)\Big|_{(\vartheta x, \vartheta y)}$$

$$= m^4 \cdot \sin(\vartheta mx + \vartheta ny)$$

$$\Rightarrow R_3(x,y) = \frac{(mx+ny)^4}{4!} \sin(\vartheta mx + \vartheta ny)$$

B8.) Gegeben ist Funktion f und Punkt P, der nicht auf f liegt.

$g^2(x,y) := \|P - (x,y,f(x,y))\|^2$ ist die Fkt., die den Abstand zw. Punkt P und dem Graphen von f beschreibt.

$F := \{(x,y,f(x,y));\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

1.) Gradient von $g^2(x,y)$ berechnen, $\nabla g^2(x,y) \stackrel{!}{=} 0$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, ..)$ und kritische Pkt. x_0 bestimmen

2.) $A = \partial_{xx} f(x_0)$
$B = \partial_{xy} f(x_0)$
$C = \partial_{yy} f(x_0)$
$D = B^2 - AC$

3.) $D(x_0) > 0 \Rightarrow f$ in x_0 Sattelpunkt
$D(x_0) < 0$ und $A(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lok. Min.
$D(x_0) < 0$ und $A(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lok. Max.

spez. Bsp: 4.) x_0 ist lok. Min.
z.z.: x_0 auch glob. Min.

Lösung folgt!