21. OKT. 2009

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 02 vom 19. Oktober 2009

Teil A

Aufgabe A3

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 19 + 5x_1 + 7x_2^2 + x_1^4 \cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) & \text{für } x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 19 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist, indem Sie die Definition der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher verifizieren.

(b) Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen von f auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe A4 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und f sei differenzierbar an $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, f ist an x_0 in jeder Richtung $a \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot a \text{ und } \left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right| \leq \|\nabla f(x_0)\|.$$

Ferner ist $a_0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt x_0.

Aufgabe A5 Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 e^{xy} + y \sin(y(1-x))$$

um den Punkt $(0,0)$ in ein Taylorpolynom zweiten Grades. Zeigen Sie damit, dass f im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum hat.

Aufgabe A6 Seien $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimmen Sie, für $x \geq 0, y \geq 0$ die Extrema der Funktion $f(x,y) := xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = c > 0$, wobei $g(x,y) := \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$. Sie können dabei die Existenz eines Maximums voraussetzen. Folgern Sie die Youngsche Ungleichung $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

Teil B

Aufgabe B5 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,2,3)$ in Richtung des Vektors $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Aufgabe B6 Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 2 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

die Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Aufgabe B7 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = \sin(mx + ny)$ das Taylor-Polynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ und geben Sie das Restglied (nach Lagrange) an.

Aufgabe B8 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{1}{8}(x^2 - y^2)$. Bestimmen Sie den Punkt auf dem Graph von f

$$\mathcal{F} := \{(x,y,f(x,y)); (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

der zu dem Punkt $P := (0,0,1)$ den kleinsten Abstand besitzt.

HM3 GÜ 2 21. OKT. 2009

A3.)

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} 19+5x_1+7x_2^2+x_1^4\cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) & x_1^2+x_2^2>0 \\ 19 & x_1^2+x_2^2=0 \end{cases}$$

a) zu zeigen: Es gibt $a\in\mathbb{R}^2$ und eine Funktion $R(x_1,x_2)$ mit $\frac{|R(x_1,x_2)|}{\|(x_1,x_2)\|}\to 0$, sodass

$$f(x_1,x_2)-f(0,0) = a\cdot(x_1,x_2)+R(x_1,x_2) \quad [\text{Skalarprodukt}]$$
$$= a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_2 + R(x_1,x_2)$$

$$f(x_1,x_2)-f(0,0)=5x_1+7x_2^2+x_1^4\cdot\cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)$$

für $(x_1,x_2)\neq(0,0)$

$$=\underbrace{5\cdot x_1+0\cdot x_2}_{(5,0)\cdot(x_1,x_2)}+\underbrace{7\cdot x_2^2+x_1^4\cdot\cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)}_{R(x_1,x_2)}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\frac{R(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|}\to 0$

für $\|(x_1,x_2)\|\to 0$

$$\left|\frac{R(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|}\right| = \frac{\left|7x_2^2+x_1^4\cdot\cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)\right|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

$$\leq \frac{7x_2^2+x_1^4\cdot\left|\cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)\right|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \qquad |\cos(..)|\leq 1$$

$$\leq 7\cdot\frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\frac{x_1^4}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\cdot 1$$

$$\leq 7 \cdot \frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{(x_1^2+x_2^2)^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

$$\underline{\underline{= 7 \cdot \|(x_1,x_2)\| + \|(x_1,x_2)\|^3}}$$

$\to 0$ für $\|(x_1,x_2)\| \to 0$, d.h. $\frac{R(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|} \to 0$

für $\|(x_1,x_2)\| \to 0$

$\square$

b.) $\partial_{x_1} f(x_1,x_2) = 5 + 4x_1^3 \cdot \cos(\ldots)$

$\frac{\partial}{\partial x_1}$

$$+ x_1^4 \cdot (-1) \cdot \sin(\ldots) \cdot \frac{9\cdot(-2)}{(x_1^2+x_2^2)^3} \cdot 2 \cdot x_1$$

$$= 5 \cdot 4x_1^3 \cdot \cos(\ldots) + 36 \frac{x_1^5}{(x_1^2+x_2^2)^3} \cdot \sin(\ldots)$$

$$\partial_{x_2} f(x_1,x_2) = 14x_2 + x_1^4 \cdot (-1) \cdot \sin(\ldots) \cdot (-36) \frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

für $(x_1,x_2) \neq (0,0)$

Betrachten $\partial_{x_1} f(x_1,x_2)\big|_{(0,0)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h,x_2)-f(x_1,x_2)}{h}\Big|_{(0,0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{19}+5h+h^4\cdot\cos\left(\frac{9}{h^4}\right)-\cancel{19}}{h}$$

$$= 5 + \lim_{h\to 0} h^3 \cdot \cos\left(\frac{9}{h^4}\right) = 5+0 \underline{\underline{= 5}}$$

$$\partial_{x_1} f(x_1,x_2) = 5 + 4x_1^3 \cdot \cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) + 36x_1^5 \cdot \sin\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) \cdot \frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^3}$$

für $(x_1,x_2) \neq (0,0)$
und 5 für $(x_1,x_2) = (0,0)$

AM3 GÜ 2 21. OKT. 2009

zu A3 b.)

$$\partial_{x_1}(f(x_1,0)) = \begin{cases} 5+4x_1^3\cdot\cos\left(\frac{9}{x_1^4}\right)+36\frac{1}{x_1}\cdot\sin\left(\frac{9}{x_1^4}\right) & x_1\neq 0 \\ 5 & x_1=0 \end{cases}$$

Betrachten $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_1\neq 0}} \partial_{x_1}(f(x_1,0)) = \lim\limits_{x_1\to 0} 5+\ldots+\underbrace{\frac{36}{x_1}\cdot\sin(\ldots)}_{\text{nicht konvergent für } x_1\to 0\,!}$

existiert nicht!

Also: Aus Differenzierbarkeit folgt nicht ~~p~~ stetig partiell diff'bar.

$$\Rightarrow (5,0) = \nabla f(0,0)$$

A4.) i.) Annahme f in x_0 diff'bar, d.h.
$\forall x$ in einer Umgebung von x_0 gilt:
$f(x) = f(x_0) + c\cdot(x-x_0) + R(x)$
mit $R(x) = o(\|x-x_0\|)$
$\left(\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{R(x)}{\|(x-x_0)\|} = 0\right)$,
wobei $c = \nabla f(x_0)$ ist.

Sei $\|a\| = 1$. Setzen $x = x_0 + h\cdot a$, so gilt für kleine $|h| = \|x-x_0\|$.

$$f(x_0+h\cdot a) - f(x_0) = c\cdot h\cdot a + R(x_0+h\cdot a)$$

Nun ist $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \overset{\text{Def.}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\cdot a)-f(x_0)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot c\cdot a + R(x_0+h\cdot a)}{h}$

$= c \cdot a + 0$ [nach Eigenschaft von $R(x)$]

$$\underline{\underline{= \nabla f(x_0) \cdot a}} \qquad \square$$

ii.) $\left| \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \right| = |\nabla f(x_0) \cdot a|$

nach d. Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung

$\leq \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|a\| = \|\nabla f(x_0)\|$ (weil $\|a\| = 1$) $\square$

iii.) Gilt $\nabla f(x_0) = 0 \Rightarrow$ Für alle Richtungen a:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = 0$$

Also ab jetzt $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dann wird durch

$a_0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ eine Richtung definiert,

mit $\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot a_0 = \frac{(\nabla f(x_0))^2}{\|\nabla f(x_0)\|}$ ← Skalarprodukt mit sich selbst

$$= \frac{\|\nabla f(x_0)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|\nabla f(x_0)\|}} = \|\nabla f(x_0)\|$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$ ist maximal. $\square$

HM3 GÜ2

A5.) $f(x,y) = x^2 \cdot e^{xy} + y \cdot \sin(y(1-x))$

$$f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} - y^2 \cos(y(1-x))$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$

$$f_y(x,y) = x^3 e^{xy} + \sin(y(1-x)) + y \cdot \cos(y(1-x)) \cdot (1-x)$$

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{xy} + 2xye^{xy} + 2xye^{xy} + x^2y^2e^{xy} - y^3 \sin(y(1-x))$$

$$f_{yy}(x,y) = x^4 e^{xy} - \cos(y(1-x))(1-x) + \cos(y(1-x))(1-x) - y(1-x)\sin(y(1-x))$$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ ⇐ Satz von Schwarz

$$= 2x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy} - 2y\cos(y(1-x)) + y^2 \sin(y \cdot (1-x)) \cdot (1-x)$$

$$f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f_{xx}(0,0) = 2 \qquad f_{yy}(0,0) = 2$$

Also gilt für $\|(h,k)\|$ klein: (mit $(0,0)$ als Entw.-Punkt)

$$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + f_x(0,0) \cdot h + f_y(0,0) \cdot k + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(0,0)h^2 + 2 \cdot f_{xy}(0,0) \cdot h \cdot k + f_{yy}(0,0)k^2\right) + R_2(h,k)$$

$$= h^2 + k^2 + R_2(h,k)$$

$$R_2(h,k) = \frac{1}{3!}\left(h \cdot \partial_{x_1} + k \cdot \partial_{x_2}\right)^3 \cdot f(\tau \cdot (h,k)) \quad \text{mit } \tau \in (0,1)$$

[Nach einigen Ableitungen]

$= O(\sqrt{h^2+k^2}^3)$, d.h.

$$\left|\frac{R_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}^3}\right| \le c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(h,k) = h^2 + k^2 + O\left(\sqrt{h^2+k^2}^{\,3}\right)$$

$$= \|(h,k)\|^2 \cdot \left(1 + O(\|(h,k)\|)\right)$$

d.h. abschätzbar

$$\geq \underbrace{\|(h,k)\|^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(1 - c \cdot \|(h,k)\|\right)}_{\geq 0 \text{ für genügend kleine } \|(h,k)\|}$$

d.h. $f(h,k) \geq 0$ für genügend kleine $\|(h,k)\|$

$f(0,0) = 0$, d.h.

f hat in $(0,0)$ lokales Minimum. $\square$