**Übung zu**

**Grundgebiete der Elektrotechnik III**

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll

WS 09/10 - Blatt 1

## Aufgabe 1

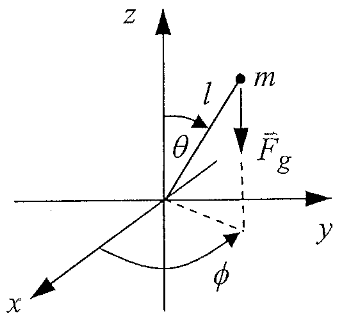
a) Geben Sie das in Zylinderkoordinaten $\vec{r}(\rho,\phi,z)$ vorliegende Vektorfeld $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\cdot\vec{e}_\phi$ in kartesischen Koordinaten an.

b) Geben Sie das in Kugelkoordinaten $\vec{r}(r,\theta,\phi)$ vorliegende Vektorfeld $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r}\cdot\vec{e}_r$ in kartesischen Koordinaten an.

c) Geben Sie das Vektorfeld $\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{1}{r_{AQ}^2}\cdot\vec{e}_{r_{AQ}}$ für $\vec{r}_Q = a\cdot\vec{e}_y$ in kartesischen Koordinaten $(x_A, y_A, z_A)$ an.

## Aufgabe 2

Ein starrer, masseloser Stab der Länge $l$ trägt an einem Ende die Masse $m$. Das andere Ende ist drehbar im Koordinatenursprung gelagert. Auf die Masse $m$ wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_g = -m\cdot g\cdot\vec{e}_z$.




Berechnen Sie die Zugkraft auf den Stab $F_l = \vec{F}_g \cdot \frac{\vec{l}}{l}$ und das Drehmoment im Ursprung $\vec{L} = \vec{l}\times\vec{F}_g$.

HINWEIS: Der Hebelarm ist $\vec{l} = l\cdot\vec{e}_r$.

## Aufgabe 3

Eine Kugel mit dem Radius $R$ trägt auf der Oberfläche die Flächenladungsdichte $\sigma_e(\theta) = \sigma_{e0}\cdot\cos\theta$.

Das Innere der Kugel ($r < R$) ist ladungsfrei.

a) Welche Ladung $Q_1$ trägt die obere Hälfte der Kugel ($0 \le \theta \le \pi/2$)?

HINWEIS: Verwenden Sie bei der Integration die Substitution $u = \sin\theta$.

b) Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel?

Anstelle der Flächenladung hat die Kugel nun die Raumladung $\rho_e(r) = \rho_{e0}\cdot r/R$.

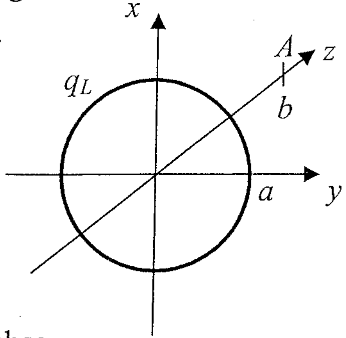
c) Wie groß ist jetzt die Gesamtladung der Kugel?

HINWEIS: Der Mittelpunkt der Kugel liegt im Koordinatenursprung.

13. OKT. 2009

## Aufgabe 4

Eine kreisförmige Linienladung mit dem Ladungsbelag $q_L \neq f(\vec{r})$ und dem Radius $a$ liegt in der $x$-$y$-Ebene. Im gesamten Raum gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.



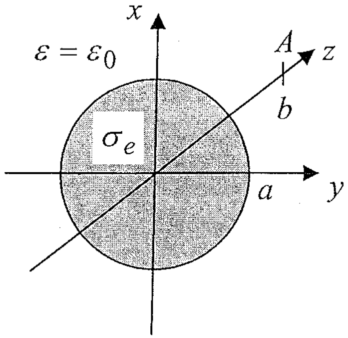

a) Welches Koordinatensystem ist hier zweckmäßig? Formulieren Sie den Vektor von einem infinitesimalen Ladungselement d$Q$ zu einem Aufpunkt $A(0,0,b)$ auf der $z$-Achse.

b) Geben Sie das elektrostatische Feld $\vec{E}(0,0,b)$ der Linienladung an.

c) Welches elektrostatische Feld $\vec{E}(0,0,b)$ ergibt sich näherungsweise für $b >> a$ (im Fernfeld)?

## Aufgabe 5

Eine kreisförmige Scheibe mit dem Radius $a$ und der Flächenladungsdichte $\sigma_e$ befindet sich in der $x$-$y$-Ebene. Ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems (vgl. Abb.).




a) Formulieren Sie d$Q$, $\vec{r}_{AQ}$ und die Integrationsgrenzen zur Bestimmung von $\vec{E}$ im Aufpunkt $A(0,0,b)$ für $b > 0$.

b) Welche Teilintegration ist aus Symmetriegründen trivial? Wie lässt sich das Integral mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4 formulieren?

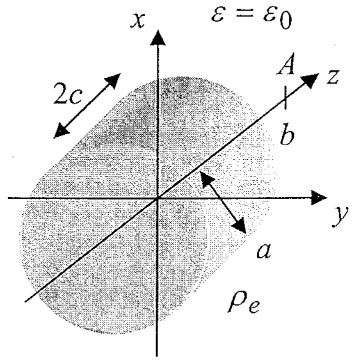
c) Wie groß ist $\vec{E}(0,0,b)$? Was ergibt sich für das Fernfeld ($b >> a$) auf der $z$-Achse?

HINWEISE: $\int x \cdot (x^2 + A^2)^{-3/2} \mathrm{d}x = -(x^2 + A^2)^{-1/2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x \qquad \text{für } |x| << 1$$

## Aufgabe 6

Ein Zylinder mit der homogenen Raumladungsdichte $\rho_e$ hat den Radius $a$ und die Länge $2c$ in $z$-Richtung. Sein Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5 soll das auf der $z$-Achse im Punkt $A(0,0,b)$ erzeugte elektrostatische Feld für $b > c$ berechnet werden (s. Abb.).




a) Welche Flächenladungsdichte $\mathrm{d}\sigma_e$ hat ein näherungsweise als Kreisfläche betrachteter Teilzylinder mit dem Radius $a$ und der infinitesimalen Länge d$z$? Geben Sie die von einem solchen Teilzylinder mit dem Mittelpunkt (0,0,$z$) im Punkt $A(0,0,b)$ erzeugte Feldstärke $\mathrm{d}\vec{E}$ an.

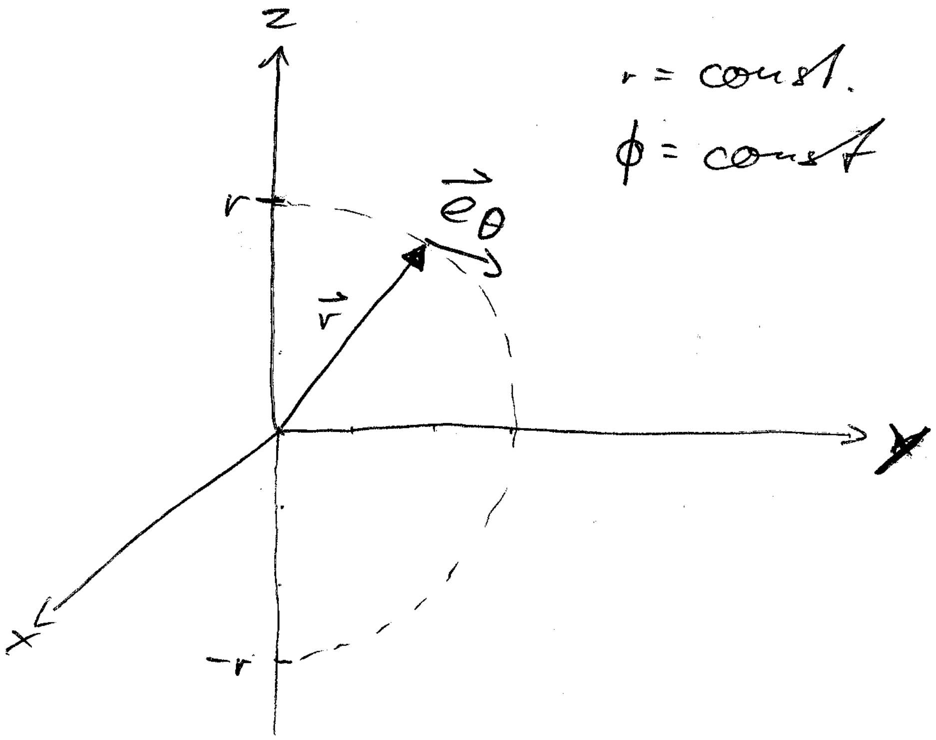
b) Berechnen Sie nun $\vec{E}(0,0,b)$ durch Integration über $\mathrm{d}\vec{E}$ im Intervall $-c \leq z \leq c$.

GET3 GÜ2 20. OKT. 2009

Folien zur Vorlesung – Kennwort „Coulomb"

Fortsetzung: 3.) Kugelkoordinaten

Koordinatenlinie bezgl. $\theta$:




$r = \text{const.}$

$\phi = \text{const}$

Koordinatenlinien bezgl. $r$: Radialstrahlen vom Ursprung aus

" bezgl. $\theta$: Halbkreise um den Ursprung, Radius $r$

Koordinatenlinien bezgl. $\phi$: Kreise um die z-Achse Radius $\rho = r \cdot \sin(\theta)$

Ortsvektor: $\vec{r} = r \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{\text{Richtung hängt von } \theta \text{ und } \phi \text{ ab}}$

$|\vec{r}| = r$

$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \theta \leq \pi$

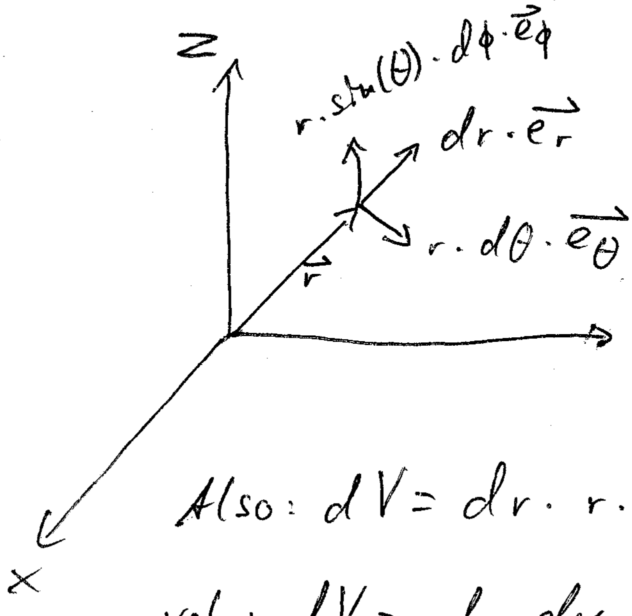
$0 \leq \phi < 2\pi$ Breitengrad

Einheitsvektoren: $\underbrace{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta}_{\text{hängen von } \theta, \phi \text{ ab}}, \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\text{hängt von } \phi \text{ ab}}$

Skalarfeld : $f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi)$

Vektorfeld : $\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_r + F_\theta(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$

Wegelement: $d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin(\theta) \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi$




Sinus gibt Bogenlänge aus

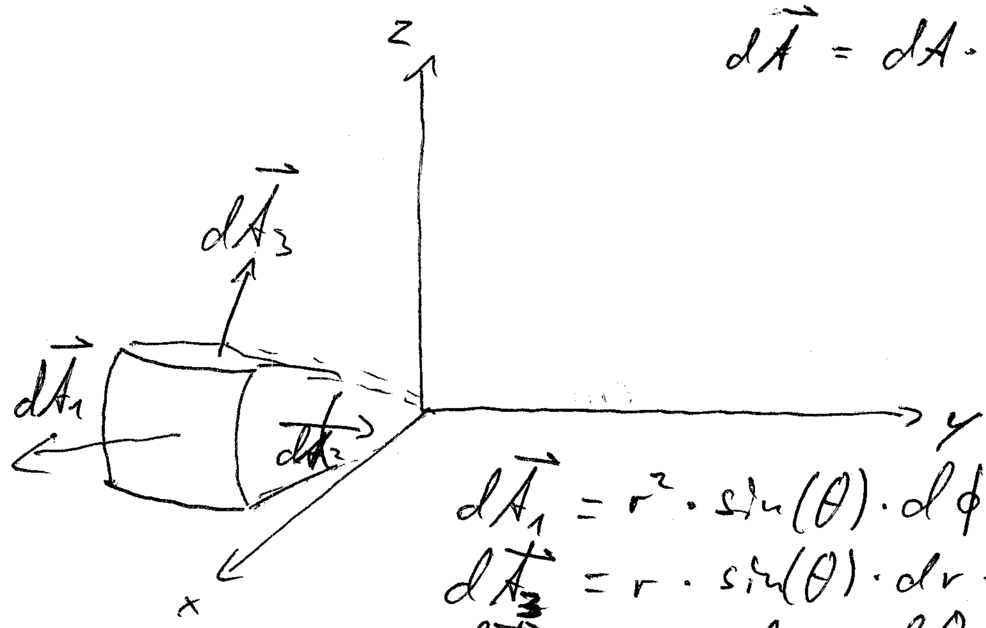
Also: $dV = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot r \cdot \sin(\theta) \cdot d\phi$

vgl.: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

GET3 Gü2 20. OKT. 2009

Flächenelemente:

$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e_n}$$




$$d\vec{A_1} = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot d\phi \cdot \vec{e_r}$$
$$d\vec{A_3} = r \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\phi \cdot \vec{e_\theta}$$
$$d\vec{A_2} = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{e_\phi}$$

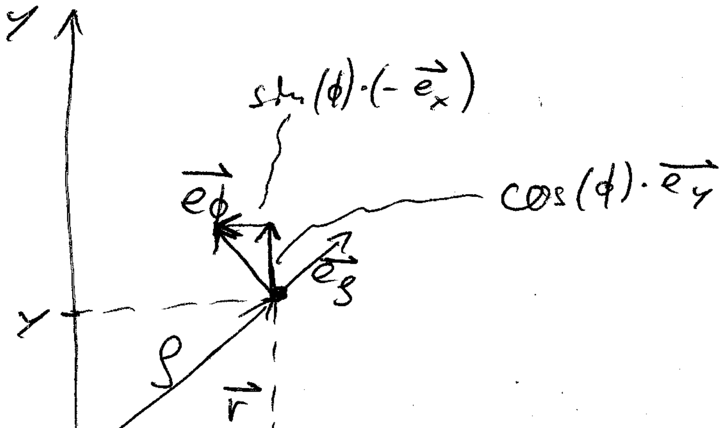
Übungsblatt

A 1.1) Transformation

a) $\vec{B_1}(\vec{r}) = \frac{1}{\varrho} \cdot \vec{e_\phi}$

$$B_{1\phi}(\vec{r}) = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\vec{e_\phi} = -\sin(\phi) \cdot \vec{e_x} + \cos(\phi) \cdot \vec{e_y}$$




Betrachte einen Aufpunkt $A(x, y, 0)$ in der x-y-Ebene weiter umwandeln:

$$\vec{e}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \vec{e}_y$$

$$\rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \left(-y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y\right)$$

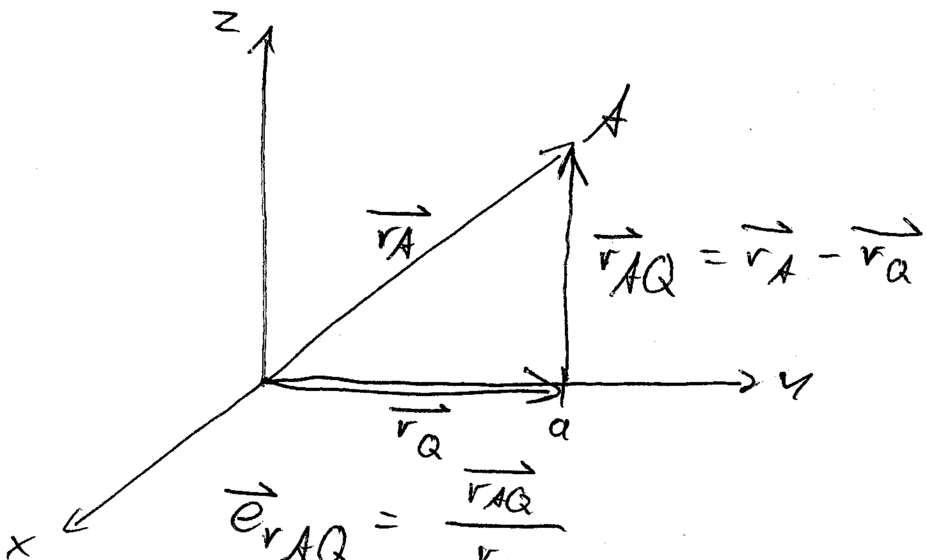
b.) Kugelkoordinaten: $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$

$$\Leftrightarrow \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{denn } \vec{r} = r \cdot \vec{e}_r)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

c.) $\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{\vec{e}_{r_{AQ}}}{r_{AQ}^2}$

für $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$ und $\vec{r}_A\,(x_A, y_A, z_A)$




$$\vec{e}_{r_{AQ}} = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}}$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$
$$\vec{r}_Q = x_Q \cdot \vec{e}_x + y_Q \cdot \vec{e}_y + z_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = (x_A - x_Q)\,\vec{e}_x + (y_A - y_Q) \cdot \vec{e}_y + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z$$

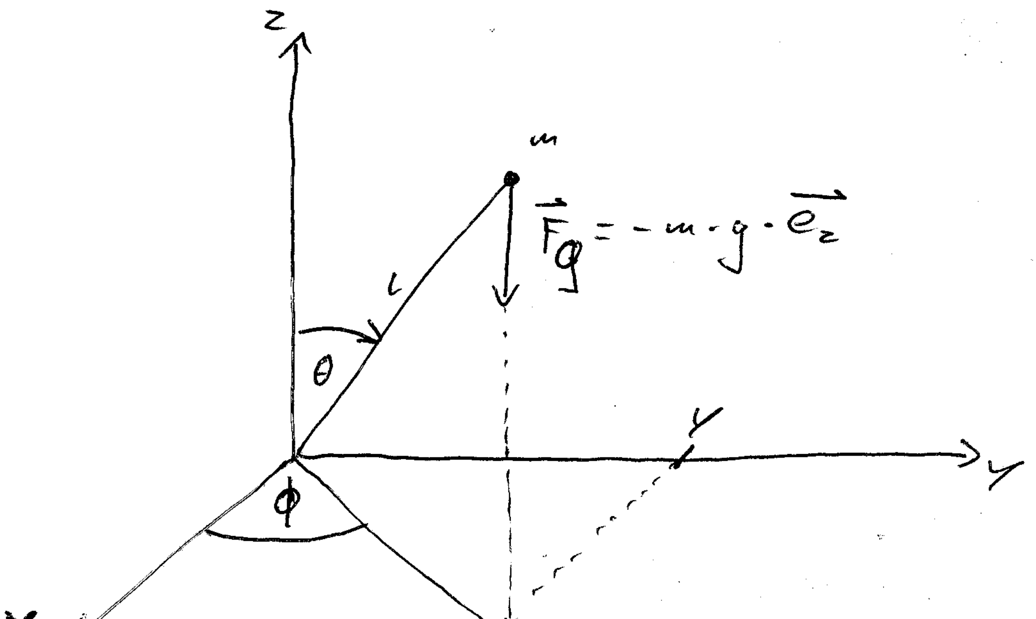
$\overset{\text{hier}}{=} x_A \cdot \vec{e_x} + (y_A - a) \cdot \vec{e_y} + z_A \cdot \vec{e_z}$

$$\vec{B_3}(\vec{r_A}) = \frac{\vec{r_{AQ}}}{r_{AQ}^3}$$

$$= \frac{x_A \cdot \vec{e_x} + (y_A - a)\vec{e_y} + z_A \cdot \vec{e_z}}{\left[x_A^2 + (y_A - a)^2 + z_A^2\right]^{3/2}}$$

! | Die komponentenweise Subtraktion von Ortsvektoren ist im Allg. nur in kartesischen Koordinaten korrekt.

**A2.)** $g$ ist die Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$)




Allg.: $\vec{F_g} = F_{g,x} \cdot \vec{e_x} + F_{g,y} \cdot \vec{e_y} + F_{g,z} \cdot \vec{e_z}$

hier: $\vec{F_g} = F_{g,z} \cdot \vec{e_z}$

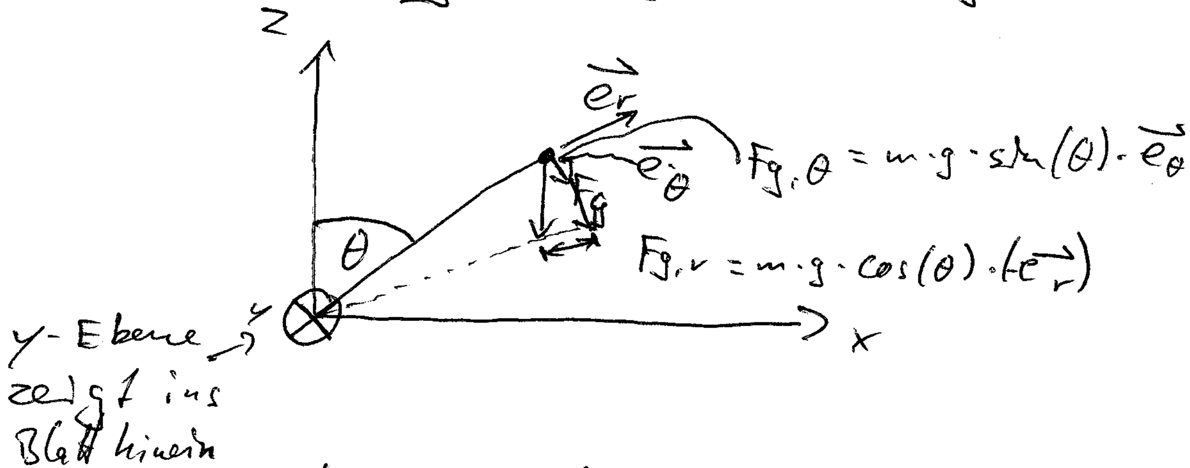
Ort der Masse m: $\vec{r} = l \cdot \underbrace{\vec{e_r}}_{\text{abh. von } \theta \text{ und } \phi}$

Umwandlung von $\vec{F_g}$ in Kugelkoordinaten:

Aus Zylinderkoordinaten: $\vec{e_\phi} \perp \vec{e_z}$

deshalb: $F_{g,\phi} = \underbrace{\vec{F_g} \cdot \vec{e_\phi}}_{\text{Projektion von } \vec{F_g} \text{ auf die } \phi\text{-Richtung}} = 0$

Bestimmung von $F_{g,r}$ und $F_{g,\theta}$




Aus Formelsammlung:

$$\vec{e_z} = \vec{e_r} \cdot \cos(\theta) - \vec{e_\theta} \cdot \sin(\theta)$$

$$\vec{F_g} = -m \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{e_r} + m \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e_\theta}$$

Zugkraft auf den Stab:

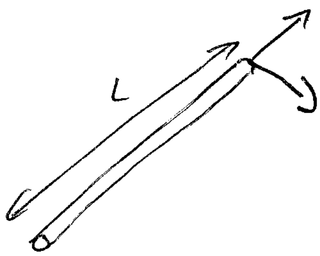
$$\vec{F_l} = \vec{F_g} \cdot \vec{e_l} = \underbrace{\vec{F_g} \cdot \vec{e_r}}_{\text{Projektion}}$$

$$= -m \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

$F_l < 0$ für $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ Druckkraft (oberhalb x-y-Ebene)

$F_l > 0$ für $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ $\Rightarrow$ Zugkraft (unterhalb x-y-Ebene)

Drehmoment den Ursprung:




$F_L \leftarrow$ Zug/Stauchung

$F_D \leftarrow$ Drehmoment

$L = F_D \cdot l$

$\vec{L} = \vec{l} \times \vec{F_G}$ (das entspr. $l \cdot F_{g,\perp}$)

$\vec{l} = l \cdot \vec{e_r}$

Beispiel für $L_{wirksam} = \vec{L} \cdot \vec{e_z}$

t.b.c...