14. OKT. 2009

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 01 vom 13. Oktober 2009

Teil A

Aufgabe A1 Bestimmen Sie, falls existent, den Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+(2-y)^2+1}-1}{x^2+(2-y)^2}.$$

Aufgabe A2

(a) Man beweise, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f_\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{x_1^2-x_2^4} & \text{für } x_1 \geq x_2^2, \\ 1+x_1^2-2x_1x_2^2+\alpha x_2^4 & \text{für } x_1 < x_2^2 \end{cases}$$

im Nullpunkt $(0,0)$ stetig sind, indem man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ angibt, sodass für alle $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ die Beziehung

$$\|(x_1,x_2)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f_\alpha(x_1,x_2) - f(0,0)| < \epsilon$$

gilt.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f_α auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig und wo für die übrigen?

Aufgabe A3

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} 19+5x_1+7x_2^2+x_1^4\cos\left(\frac{9}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) & \text{für } x_1^2+x_2^2 > 0, \\ 19 & \text{für } x_1^2+x_2^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist, indem Sie die Definition der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher verifizieren.

(b) Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen von f auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

Teil B

Aufgabe B1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit im Nullpunkt:

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{für } x=y=0 \end{cases},$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{für } x^4+y^2>0 \\ 0 & \text{für } x=y=0 \end{cases}.$$

Aufgabe B2 Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}f$ und $\frac{\partial}{\partial t}f$ der Funktion

$$f(x,t) = \ln(\sin(x-2t)) .$$

Aufgabe B3 Berechnen Sie die Werte am Nullpunkt für beide gemischten zweiten Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial_2}f(0,0)$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}f(0,0)$ der Funktion

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Aufgabe B4 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy},$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} \text{ und}$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}.$$

HM3 KGÜ 1 20. OKT. 2009

B1 a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$

$f: M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ innerer Punkt von M

f heißt stetig in $\underline{x}_0$, wenn $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$

$f(0,0)=0$, wähle $y=x\neq 0$

$f(x,x) = \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

Also ist $f(x,y)$ nicht stetig im Nullpunkt.

B1 b.)

$x=y\neq 0 \Rightarrow f(x,x) = \frac{x\cdot x}{x^4+x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = 1 \neq f(0,0)=0$

Also ist $f(x,y)$ nicht stetig im Nullpunkt.

B2.) $f(x,t) = \ln(\sin(x-2t))$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{1}{\sin(x-2t)} \cdot \cos(x-2t) \cdot 1 = \underline{\underline{\cot(x-2t)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{1}{\sin(x-2t)} \cdot \cos(x-2t) \cdot (-2) = \underline{\underline{-2\cot(x-2t)}}$$

B3.)

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Definition:

$\underline{V} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{V}}(\underline{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{V}) - f(\underline{x}_0)}{h} \qquad (*)$$

$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0)$:

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[f(\underline{x}_0 + h\underline{V}) - f(\underline{x}_0) \right] \quad \text{mit } \underline{x}_0 = (0,0),\ \underline{V} = (1,0)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f((0,0) + h\cdot(1,0)) - f(0,0) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\underbrace{f(h,0)}_{=0} - \underbrace{f(0,0)}_{=0} \right] = 0$$

2) $$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0)\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0 + h\cdot\underline{V}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \right]$$

$, \underline{x}_0 = (0,0),\ \underline{V} = (0,1)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,h) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}_{\sim} \right] = \lim_{h \to 0} 1 \ \underline{\underline{= 1}}$$

(siehe nächste Seite)
N.R., bzw. Schr. 1

zu B3.)

NR: $(x_1, x_2) \neq 0$: $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = x_2 \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2^2 + x_1^2}$

$$+ x_1 x_2 \frac{-2x_1(x_1^2+x_2^2) - 2x_1(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)}$$

$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\underline{x}_0)$

1.) $\frac{\partial}{\partial x_1} f(\underline{x}_0)$ mit $(*)$, $[\underline{x} = (0,0), \underline{v} = (1,0)]$

2.) $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \neq \underline{x}_0$

3.) $\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(\underline{x}_0)\right]$ mit $(*)$, $[\underline{x}_0 = (0,0), \underline{v} = (0,1)]$

Hier benötigt man Schritt 2

$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(0,0)$:

1.) $\frac{\partial}{\partial x_2} f(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$

2.) $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + x_1 x_2 \frac{2x_2(x_1^2+x_2^2) - 2x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$

3.) $\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} f(\underline{x}_0)\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)\right]$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h^2}{h^2} \cdot h - 0\right] \underline{\underline{= -1}}$$

$\underline{\text{A}4.)}$ a.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}$ $\quad xy =: z$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow z\to 0$

$= \lim\limits_{z\to 0} \frac{\cos(z)}{1} = \underline{\underline{1}}$

mit l'Hopital (wegen $\frac{0}{0}$)

b.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x\cdot y)}{x} \cdot \frac{y}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \underline{\underline{0}}$

$\hookrightarrow$ zeigen, dass $\frac{y}{y} \to 1$ geht!

oder: $\ldots = \cancel{\lim \frac{\sin(x\cdot y)}{x}} \cdot \cancel{\frac{xy}{\sin(x\cdot y)}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = \underline{\underline{0}}$

aus a.)

Wurzeltrick

c.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{4} - \cancel{xy} - \cancel{4}}{\cancel{xy}(2+\sqrt{xy+4})}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} - \frac{1}{2+\sqrt{\underbrace{xy}_{\to 0}+4}} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$