

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
der RWTH Aachen

Hinweise zur Vorlesung
Grundgebiete der Elektrotechnik III
Wintersemester 2009 / 2010

Univ.-Prof. Dr.-Ing.
Tobias Noll
tgn@eecs.rwth-aachen.de

Vorlesung: Montag: 14:00 - 15:30 Aula 1
Dienstag: 08:15 - 09:45 Aula 1

Übung: Dienstag: 14:00 - 15:30 Fo2

Sprechstunden: T. Noll: Mittwoch: 10:00 - 12:00 Uhr (Lehrstuhl),
unmittelbar nach den Vorlesungen
M. Gansen, — Mittwoch: 10:00 - 12:00 Uhr (Lehrstuhl),
R. Schwann, — unmittelbar nach den Vorlesungen
T. Coenen:
P. Mols Donnerstag: 14:00 - 17:00
(Melatener Str. 23)

Lehrstuhl: Anschrift: Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik
und Datenverarbeitungssysteme,
Schinkelstr. 2, 52062 Aachen
Telefon: 0241-80-97600 / 97601
Fax: 0241-80-92282
URL: www.eecs.rwth-aachen.de
Sekretariat: Frau Glagla, Frau Buttgerit
Telefon: 0241-80-97601 / 97602
Raum 205/204
Druckerei: Herr Mikkin
Telefon: 0241-80-97581
Raum 202.1

1. Einleitung: Die elektrische Ladung

In diesem Kapitel wird der Begriff der elektrischen Ladung eingeführt und eine Zusammenfassung der experimentellen Erfahrungstatsachen im Zusammenhang mit elektrischen Ladungen gegeben.

Formelzeichen und Einheit (DIN 1324 Teil 1 und DIN 1301 Teil 1)

Formelzeichen: Q bzw. q

Einheit: 1 Coulomb = 1 As („abgeleitete SI-Einheit mit besonderem Namen“)

Einheitszeichen: 1 C

Physikalische Einordnung

Die elektrische Ladung ist eine universelle physikalische Eigenschaft der Materie; sie stellt das *Verhaltensmuster* einer der vier fundamentalen physikalischen Wechselwirkungen, der elektromagnetischen Wechselwirkung dar.

Art	Quelle	Reichweite	Wirkung
Gravitation	Masse	unbegrenzt	schwach
Schwache WW	alle Teilchen	↓	↓
Elektromagnetische WW	el. Ladung	↑	↓
Starke WW	Kernteilchen	sehr klein	stark

Tabelle 1.1: Die vier fundamentalen physikalischen Wechselwirkungen

Aus Sicht der von Richard Feynman begründeten Quantenelektrodynamik ist die elektromagnetische Wechselwirkung sowohl mittels elektromagnetischer Wellenpakete, als auch mittels Teilchen, den Photonen („Lichtteilchen“) zu deuten. Die elektrische Ladung entspricht dabei der Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Ankoppeln eines Photons an die betreffende Ladung.

Erfahrungstatsachen

„Die Summe aller experimentellen Erfahrungen im Zusammenhang mit elektrischen Ladungen lehrt“:

I. Es sind zwei Arten elektrischer Ladung zu unterscheiden (Du Fay, 1734); für diese wurden willkürlich die Bezeichnungen positiv bzw. negativ eingeführt (Lichtenberg, 1777 bzw. Franklin, 1706-1790).

Jedem Körper, jedem Teilchen wird demnach eine elektrische Ladung zugeordnet, die positiv, null oder negativ sein kann.

Die gesamte elektrische Ladung in einem Gebiet ergibt sich damit als algebraische Summe der darin enthaltenen positiven und negativen Ladungen zu irgendeinem Zeitpunkt.

II. Elektrische Ladung kann in einem abgeschlossenen System weder „erzeugt“ noch „vernichtet“ werden; „Ladungserhaltungssatz“ (Watson, Franklin, 1747).

Die im Universum insgesamt vorkommende Ladung ist demnach konstant (und vermutlich null).

Paare exakt entgegengesetzter elektrischer Ladung können jedoch auch in einem abgeschlossenen System „entstehen“ bzw. „vergehen“.

III. Insbesondere ist die elektrische Ladung invariant gegenüber Änderungen der Geschwindigkeit (Wechsel des Laborsystems); „Prinzip der Ladungsinvarianz“.

IV. Der Betrag der elektrischen Ladung ist quantisiert: Jede in der Natur (makroskopisch) vorkommende Ladung beträgt stets ein ganzzahliges Vielfaches einer kleinsten Ladungsmenge, der „Elementarladung“ $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19}$ As; d.h. $Q = ke$ mit $k \in \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Das Positron trägt genau die Ladung e während sein Antiteilchen, das Elektron, die Ladung $-e$ hat.

Träger der Drittel- bzw. Zweidrittel-Elementarladung, die „Quarks“ sind heute indirekt nachweisbar.

V. Qualitativ verhalten sich elektrisch geladene Teilchen so, daß gilt

- Ladungen gleichen Vorzeichens („gleichnamige“ Ladungen) stoßen einander ab.
- Ladungen ungleichen Vorzeichens („ungleichnamige“, „entgegengesetzte“ Ladungen) ziehen einander an.

VI. Quantitativ wird die Wechselwirkung zwischen zwei *ruhenden* elektrischen *Punktladungen*, also Ladungen mit gegenüber ihrem Abstand vernachlässigbar kleiner räumlicher Ausdehnung, im Vakuum durch die **Coulomb-Kraft** beschrieben. Demnach bewirkt eine Punktladung Q auf eine andere Punktladung q im Abstand r_{qQ} eine Kraftwirkung

$$\vec{F}_{qQ} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{qQ}} \quad (1.1)$$

(Coulomb, 1785). Der Proportionalitätsfaktor k hat dabei den Wert $k = 8,987\,55 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

VII. Unter Anwesenheit von Materie (mit idealen linearen, homogenen und isotropen Eigenschaften) reduziert sich die Coulomb-Kraft auf

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{q \cdot Q}{r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{qQ}} \quad (1.2)$$

mit der Permittivitätszahl („Dielektrizitätszahl“) $\epsilon_r \geq 1$ des betreffenden Materials (Faraday).

VIII. Die Coulomb-Kräfte mehrerer Ladungsträgerpaare addieren sich (für $\epsilon_r = \text{const}$) vektoriell („superponieren linear“); „Superpositionsprinzip“. Insbesondere hier bewährt sich der Ansatz, die beiden Sorten elektrischer Ladungen mittels verschiedener Vorzeichen zu charakterisieren.

IX. Entgegen der früher unterstellten „Fernwirkungstheorie“ wirken die Kräfte zwischen den Ladungen nicht augenblicklich unvermittelt durch den Raum aufeinander. Vielmehr ist nur der Zustand des Raumes in unmittelbarer Umgebung einer Ladung durch diese verändert; „Nahwirkungstheorie“ (Faraday). Die Ausbreitung der elektromagnetischen Kraftwirkung ist im Vakuum, unabhängig vom Bezugssystem, auf die maximale Geschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ („Lichtgeschwindigkeit“) begrenzt.

X. Unter Anwesenheit von Materie (mit idealen linearen, homogenen und isotropen Eigenschaften) reduziert sich die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit auf

$$c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r} \quad (1.3)$$

mit der Permittivitätszahl („Dielektrizitätszahl“) ϵ_r und der Permeabilitätszahl (oder „relative Permeabilität“) μ_r des betreffenden Materials.

Dieser „Erfahrungsschatz“ reicht aus, um alle ingenieurwissenschaftlich relevanten elektromagnetischen Effekte zu erklären und zu quantifizieren.

In den folgenden Betrachtungen werden, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, zunächst statische Anordnungen angenommen, d.h. die Ableitungen der physikalischen Größen nach der Zeit verschwinden

$$\frac{d \dots}{dt} = 0$$

Weiter wird zunächst angenommen, daß sich alle betrachteten Anordnungen im Vakuum befinden, sodaß insbesondere Materialeffekte nicht zu berücksichtigten sind.

Diese Einschränkungen werden im Laufe der Betrachtungen sukzessive aufgegeben.

Ladungsverteilungen

- Punktladung

Ist eine betrachtete Ladung auf einen hinreichend kleinen Raumbereich lokalisiert, so kann sie als auf einen Punkt konzentriert gedacht werden und wird als Punktladung

1. Einleitung: Die elektrische Ladung

bezeichnet (s. Erfahrungstatsache VI.). Neben solchen diskreten Punktladungen der Dimension null sind insbesondere kontinuierliche, nicht notwendigerweise homogene Ladungsverteilungen im Raum interessant:

□ Linienladung

Die kontinuierliche Verteilung einer Ladung Q auf einer Linie der Länge s bildet eine Linienladung (Dimension eins). Die Linienladung einer solchen Linienladung wird als deren *Ladungsbetrag* q_L (DIN 1324 Teil 1) mit

$$q_L = \frac{dQ}{ds} \quad \text{bzw.} \quad Q = \int_s q_L ds \quad (1.4)$$

bezeichnet.

□ Flächenladung

Die kontinuierliche Verteilung einer Ladung Q auf eine Fläche mit Flächeninhalt A bildet eine Flächenladung (Dimension zwei). Die Flächendichte einer solchen Flächenladung wird als deren *Ladungsbedeckung* (Flächenladungsdichte) σ (DIN 1324 Teil 1) mit

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad \text{bzw.} \quad Q = \iint_A \sigma dA \quad (1.5)$$

bezeichnet.

□ Raumladung

Die kontinuierliche Verteilung einer Ladung Q auf ein Raumbereich vom Volumen V bildet eine Raumladung (Dimension drei). Die räumliche Dichte einer solchen Raumladung wird als deren Raumladungsdichte ρ (bzw. ρ_e , DIN 1324 Teil 1) mit

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{bzw.} \quad Q = \iiint_V \rho dV \quad (1.6)$$

bezeichnet.

N.B.: Da diese Verteilungen nicht notwendigerweise homogen sind, sind die zugehörigen Dichten i.a. ortsabhängig, d.h. $q_L = q_L(\vec{r})$, $\sigma = \sigma(\vec{r})$, $\rho = \rho(\vec{r})$.

2. Das elektrostatische Feld

2. Das elektrostatische Feld

Ausgehend von der Kraftwirkung zwischen einzelnen Punktladungen und dem Superpositionsprinzip für Ladungsanordnungen wird im folgenden das elektrostatische Feld als Eigenschaft des Raumes eingeführt.

2.1 Die Coulomb-Kraft

Nach (1.1) bewirkt eine ruhende Punktladung Q auf eine andere ruhende Punktladung q mit Abstand r_{qQ} im Vakuum erfahrungsgemäß eine Kraftwirkung

$$\vec{F}_{qQ} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_{qQ} \quad (1.11)$$

mit $k = 8,98755 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. r_{qQ} ist der Betrag des von Q nach q gerichteten Abstandsvektors \vec{r}_{qQ} und \vec{e}_{qQ} der Einheitsvektor in dessen Richtung, siehe Bild 2.1.

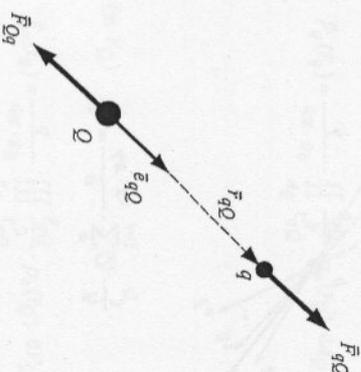


Bild 2.1: Die Richtung der Kraftvektoren wird durch die Verbindungslinie zwischen den beiden Ladungen vorgegeben.

Aus praktisch rechnerischen Gründen wird das „Coulombsche Gesetz“ nach (1.1) meist in der Form

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_{qQ} \quad (2.1.1)$$

geschrieben, da dadurch in vielen anderen (noch zu behandelnden) Gleichungen der „lästige“ Faktor 4π verschwindet. Der nun auftretende Faktor $\epsilon_0 = 8.854\ 187\ 82 \cdot 10^{-12}\ \text{AsVm}$ wird als elektrische Feldkonstante bezeichnet.

Nach dem Prinzip „*actio est reactio*“ gilt natürlich auch

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot r_{Qq}^2} \cdot \vec{e}_{Qq} = -\vec{F}_{qQ} \quad (2.1.2)$$

Anmerkungen:

- Die Coulomb-Kraft ist eine entlang der Verbindungslinie zwischen den Ladungen wirkende „Zentralkraft“. Dies ist, isotrope Eigenschaften des Raumes und der Punktladungen vorausgesetzt, auch gar nicht anders denkbar, da nur diese Verbindungslinie eine ausgezeichnete Richtung im Raum darstellt.
- Der Betrag der Coulomb-Kraft wächst proportional mit dem Produkt der Ladungsbeträge.
- Der Betrag der Coulomb-Kraft nimmt umgekehrt proportional mit dem Abstandquadrat der Ladungen ab.
- Daran ändert sich natürlich auch nichts durch die manchmal zweckmäßigere Schreibweise von (2.1.1)

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{4\pi \cdot r_{qQ}^3} \cdot \vec{r}_{qQ} \quad (2.1.3)$$

bei der der Einheitsvektor in Richtung des Abstandsvektors einfach zu

$$\vec{e}_{qQ} = \frac{\vec{r}_{qQ}}{r_{qQ}} \quad (2.1.4)$$

- gebildet wird.
- Aufgrund des Superpositionsprinzips gilt das Coulombsche Gesetz für jedes Ladungsträgerpaar, unabhängig davon, wieviele Ladungen in dem betrachteten System tatsächlich insgesamt vorhanden sind.

Kraftwirkung von Ladungsanordnungen

Insbesondere bewirken aufgrund des Superpositionsprinzips n ruhende Punktladungen Q_1, Q_2, \dots, Q_n auf eine weitere ruhende Punktladung q (Bild 2.2) im Vakuum die Gesamtkraft

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \vec{e}_i \quad (2.1.5)$$

bzw. mit (2.1.4)

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.1.6)$$

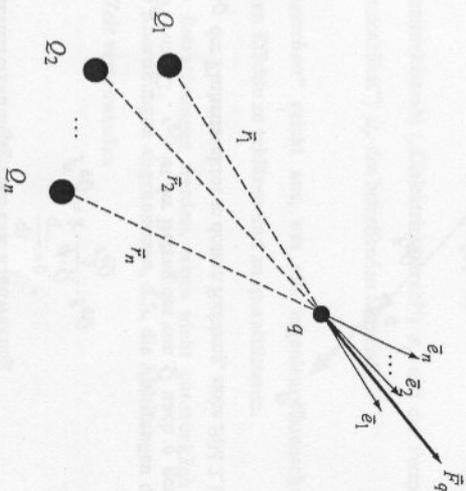
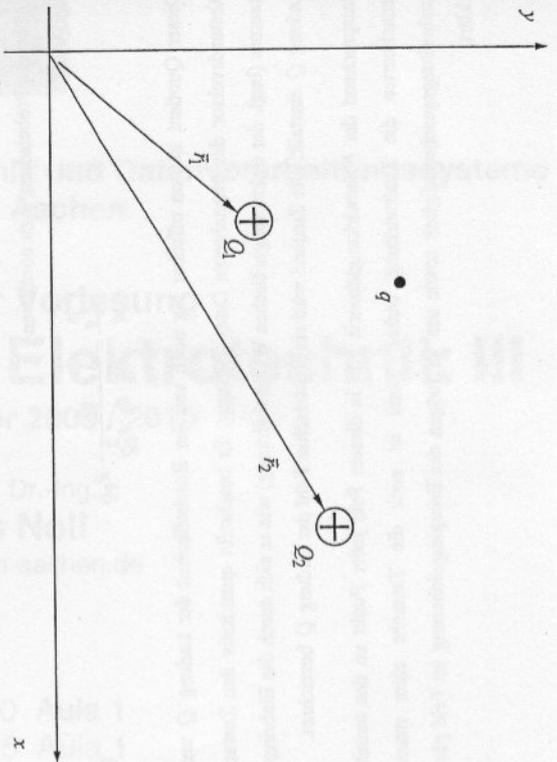


Bild 2.2: Superposition der Kräfte durch vektorielle Addition der Kraftvektoren

Beispiel

Bild 2.3: Skizzieren Sie die Teilkräfte und die Gesamtkraft auf die Probeladung q

Kraftwirkung von Ladungsverteilungen

Wird das Verteilungsgebiet einer kontinuierlichen Ladungsverteilung in hinreichend kleine Einheiten unterteilt, so kann die in jeder Einheit enthaltene Teilladung als Punktladung an einem Ort \vec{r}_Q des Quellgebietes aufgefaßt werden. Mit dem Grenzübergang zu infinitesimal kleinen Einheiten geht die Summation aller auf die Ladung q am Ort \vec{r}_q wirkenden Teilkräfte in (2.1.6) in eine Integration über, und für die drei o.a. Ladungsverteilungen gilt:

- Linienladung q_L (entlang s_Q)

$$\vec{F}_q(\vec{r}_q) = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{s_Q} \frac{\vec{r}_{qQ}}{r_{qQ}^3} \cdot q_L(\vec{r}_Q) \cdot ds_Q \quad (2.1.7)$$

- Flächenladung σ_e (über A_Q)

$$\vec{F}_q(\vec{r}_q) = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iint_{A_Q} \frac{\vec{r}_{qQ}}{r_{qQ}^3} \cdot \sigma_e(\vec{r}_Q) \cdot dA_Q \quad (2.1.8)$$

- Raumladung ρ_e (im V_Q)

$$\vec{F}_q(\vec{r}_q) = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{V_Q} \frac{\vec{r}_{qQ}}{r_{qQ}^3} \cdot \rho_e(\vec{r}_Q) \cdot dV_Q \quad (2.1.9)$$

Dabei ist $\vec{F}_{qQ} = \vec{r}_q - \vec{r}_Q$ nun der Verbindungsvektor von einem Punkt Q des gesamten Quellgebietes (s_Q, A_Q bzw. V_Q) zum Ort der Ladung q .

2.2 Das Feldkonzept

Mit dem Coulombschen Gesetz kann nun z.B. für jeden Ort in der Umgebung einer Punktladung Q die dort auf eine Ladung q ausgeübte Kraft bestimmt werden. Dabei kann Q gedanklich als die Kraftwirkung verursachende Ladung (sozusagen als Quelle) und q als *Probeladung* (sozusagen als Meßinstrument) aufgefaßt werden, siehe Bild 2.4.

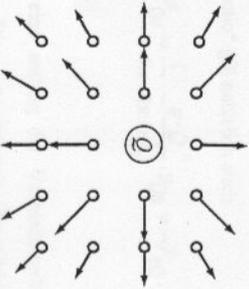


Bild 2.4: Richtung und Stärke der Coulomb-Kraft für verschiedene Orte der Probeladung

Soll nun nur die potentielle Wirkung der Quelle Q charakterisiert werden, so liegt es nahe, die so, z.B. nach (2.1.1), für jeden Ort in der Umgebung von Q bestimmte Coulomb-Kraft auf die Größe der Probeladung q zu normieren

$$\vec{F}_q = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_{qQ} \quad (2.2.1)$$

Dieser Quotient ist nun offenbar nur noch von der Beschaffenheit der Ladung Q und dem Abstandsvektor des betrachteten Ortes abhängig. Er beschreibt quantitativ den Zustand des Raumes (bzgl. der elektromagnetischen Wechselwirkung) wie er sich durch das Einbringen der Ladung Q einstellt. Der Zustand wird als **elektrisches Feld** der Ladung Q bezeichnet.

Entsprechend der Nahwirkungstheorie gibt in diesem Feld jeder Punkt an den unmittelbar benachbarten die Kraftwirkung weiter; damit ist auch die Tatsache einer maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie das Vermögen der Energiespeicherung im Feld plausibel erklärt.

2.3 Die Elektrische Feldstärke

Formelzeichen und Einheit (DIN 1324 Teil 1)

Formelzeichen:

\vec{E}

Einheit:

1 V / m

Der sich aus (2.2.1) ergebende vektorwertige Quotient heißt **elektrische Feldstärke** \vec{E}

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q} \quad (2.3.1)$$

Das Feldkonzept ist natürlich nicht nur auf die Situation einer einzelnen Ladung Q sondern aufgrund des Superpositionsprinzips allgemein und insbesondere auch auf die in 2.1 behandelten Ladungsanordnungen und Ladungsverteilungen anwendbar.

Elektrische Feldstärke von Ladungsanordnungen

Für die Anordnung von n Punktladungen aus 2.1 ergibt sich mit (2.1.6)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.3.2)$$

Dabei ist es aufgrund des Distributivitätsgesetzes (zumindest im Vakuum) offenbar gleichgültig, ob zuerst die gesamte potentielle Kraftwirkung auf die Probeladung q bestimmt und diese dann durch q dividiert wird, oder ob zunächst die Feldstärkebeiträge der einzelnen Ladungen ermittelt und diese dann vektoriell superponiert werden

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.3.3)$$

Die Definition nach (2.3.1) erfordert jedoch, daß das Einbringen der Probeladung q die Konfiguration der *felderzeugenden* Ladungsträger unverändert läßt; diese sind also z.B. in (2.3.2) oder in (2.3.3) unbedingt mit ihren Positionen \vec{r}_i , wie sie vor dem Einbringen der Probeladung "eingenommen wurden, anzusetzen.

Häufig wird versucht, dieses Problem durch Verwendung einer infinitesimal kleinen Probeladung und Definition der elektrischen Feldstärke als Grenzwert