

## Sinus/Cosinus Eigenschaften

$$a = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot a$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\alpha) &= \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ -\cos(\alpha) &= \cos(\alpha + \pi) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

## Sinussignal

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

## Abtastung/Aliasing

Abtastintervall  $T_s$

$$\text{Abtastrate } r = \frac{1}{T_s}$$

$$s[n] = s(n \cdot T_s) = s(\frac{n}{r})$$

$$s[n] = A \cos(\omega T_s n + \varphi) = A \cos(\hat{\omega} n + \varphi)$$

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{r}$$

Alias-Frequenzen:  $\hat{\omega}_k = \hat{\omega}_0 + 2\pi k$  und  $\hat{\omega}_k = 2\pi k - \hat{\omega}_0$

Haupt-Aliasfrequenz:  $-\pi < \hat{\omega}_0 \leq \pi$

Abtast-Theorem: Fehlerfreie Rekonstruktion, wenn  $r > 2f_{\max}$

## Komplexe Zahlen

$$\begin{aligned}z &= x + jy \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ |z| &= |z^*| \\ z \cdot z^* &= |z|^2 \\ z + z^* &= 2\operatorname{Re}\{z\} \\ \frac{1}{j} &= -j \\ e^{j\alpha} &= \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \\ e^{j0} &= 1; \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{j\pi} = -1; \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\end{aligned}$$

## Fourier-Reihe

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_T t}$$

Im Spektrum gilt:  $\omega_k = k\omega_T$  (Spektrallinien äquidistant)

Bestimmung der Grundfrequenz:

$$\omega_T = \begin{cases} \omega_1 & \text{falls } a_1 \neq 0 \\ ggT(\omega_1, \omega_2, \dots) & \text{falls } a_1 = 0 \end{cases}$$

## Filter

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] \delta[n - k] \text{ (Signal über Einheitsimpuls)}$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b[k] \delta[n - k] = b[n] \text{ (Impulsantwort)}$$

$$g[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] s[n - k] \text{ (Faltung/Differenzengl.)}$$

Kaskadierung:  $h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \dots$

Faltung ist kommutativ, assoziativ,  $\delta[n]$  ist neutrales Element.

Filter ist kausal, wenn  $k \geq 0$ . (sieht nicht in Zukunft)

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

## LSI-Systeme

linear, zeit/verschiebungs-invariant

zeitinvariant:  $s[n - n_0] \Rightarrow g[n - n_0]$

linear:  $s[n] = a \cdot s_1[n] + b \cdot s_2[n] \Rightarrow g[n] = a \cdot g_1[n] + b \cdot g_2[n]$

Jedes FIR-Filter ist ein LSI-System.

$$\begin{aligned}z &= |z| \cdot e^{j\alpha} = |z| \cdot (\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)) \\ \alpha &= \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) \pm \pi & x < 0 \end{cases} \\ 2 \cdot \cos(\alpha) &= e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} \\ 2j \cdot \sin(\alpha) &= e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\end{aligned}$$

## Komplexes Sinussignal

$$\begin{aligned}z(t) &= Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot A \sin(\omega t + \varphi) \\ x(t) &= \operatorname{Re}\{Ae^{j(\omega t + \varphi)}\} = A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} X e^{j\omega t} + \frac{1}{2} X^* e^{-j\omega t} \\ X &= Ae^{j\varphi} (\text{Phasor})\end{aligned}$$

## Summe/Linearkombination von Sinussignalen

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\{A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega_k t}\} \text{ (gleiche Frequenz)} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\left(\sum_{k=1}^N X_k\right) e^{j\omega_k t}\right\} \text{ mit } X_k = A_k e^{j\varphi_k} \\ &= \operatorname{Re}\{A e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} \\ &= A \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(t) &= \sum_{k=-N}^N a_k e^{j\omega_k t} \text{ mit } \omega_0 = 0 \text{ und} \\ a_0 &= X_0 \text{ (Gleichanteil)} \\ a_k &= \frac{1}{2} X_k \\ a_{-k} &= \frac{1}{2} X_k^* \text{ und } \omega_{-k} = -\omega_k\end{aligned}$$

## Produkt von Sinussignalen

Mit  $\omega_M = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  und  $\omega_\Delta = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ :

$$\begin{aligned}s(t) &= 2 \cdot \cos(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_\Delta t) \\ &= \cos((\omega_M + \omega_\Delta)t) + \cos((\omega_M - \omega_\Delta)t) \\ &= \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t) \\ s(t) &= 2 \cdot \sin(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_\Delta t) \\ &= \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_1 t)\end{aligned}$$

Schwebungstöne: Add. zweier Sinusig. ähnln. Freq.  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

## Fourier-Analyse

$$(s_1, s_2) = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt \text{ (Skalarprodukt)}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega_T t} dt \text{ (Sonderfall bei } k=0\text{)}$$

$$\left( \text{Geometrische Reihe: } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

## Übertragungsfunktion (Fouriertransformation)

$$S(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] e^{-jn\hat{\omega} n} \text{ (Spektrum)}$$

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jn\hat{\omega} n} = |H(\hat{\omega})| e^{j\vartheta(\hat{\omega})}$$

$$G(\hat{\omega}) = S(\hat{\omega}) \cdot H(\hat{\omega})$$

Kaskadierung:  $H(\hat{\omega}) = H_1(\hat{\omega}) \cdot H_2(\hat{\omega}) \cdot \dots$

Inverse Fouriertransformation:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\hat{\omega}) e^{jn\hat{\omega} n} d\hat{\omega}$$

$H(\hat{\omega}) = H^*(-\hat{\omega})$  und  $H(\hat{\omega})$  ist  $2\pi$ -periodisch.

$$\begin{array}{ll} \text{Amplitudengang: } & |H(\hat{\omega})| \\ \text{Phasengang: } & \vartheta(\hat{\omega}) \quad \vartheta(\hat{\omega}) = -\vartheta(-\hat{\omega}) \end{array}$$

Gleitender Mittelwert der Länge L ( $h[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \delta[n - k]$ ):

$$\Rightarrow \text{Dirichlet-Funktion: } H(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\frac{L}{2}\hat{\omega})}{L \cdot \sin(\frac{\hat{\omega}}{2})} e^{-j\hat{\omega} \frac{L-1}{2}}$$

## z-Transformation

$$S_z(z) = \sum_{k=0}^N s[n]z^{-k} \text{ mit } z = e^{j\hat{\omega}}$$

$$H_z(z) = \sum_{k=0}^N h[n]z^{-k} \text{ (Systemfunktion)}$$

$$G_z(z) = H_z(z) \cdot S_z(z)$$

## Nulling Filter

$$1. \text{ Ordnung: } H_z(z) = 1 - z_1 z^{-1} = \frac{z - z_1}{z}$$

Mit  $|z_1| = 1$  und  $z_1$  reell  
 $\Rightarrow z_1 = 1$  oder  $z_1 = -1$   
 $\Rightarrow \hat{\omega}_1 = 0$  oder  $\hat{\omega}_1 = \pi$

$$2. \text{ Ordnung: } H_z(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2^* z^{-1}) \\ = 1 - 2 \cos(\hat{\omega}_1) \cdot z^{-1} + z^{-2}$$

Blendet gezielt die Frequenzen  $\hat{\omega}_1$  und  $\hat{\omega}_2 = -\hat{\omega}_1$  aus.

Kaskadierung:  $H_z(z) = H_{z1}(z) \cdot H_{z2}(z) \cdot \dots$

Erweiterung:  $z = r e^{j\hat{\omega}}$

Shift:  $s[n - n_0] = s[n] * \delta[n - n_0] \Rightarrow z^{-n_0} \cdot S_z(z)$

Faktorisierung entspricht Zerlegung des LSI-Sytems!

## Bandpass Filter

1. M äquidistante Nullstellen:

$$z_k = e^{j \frac{2\pi k}{M}}, \quad k = 1, \dots, M$$

$$\Rightarrow P_M(z) = 1 - z^{-M} = \frac{z^M - 1}{z^M} = z^{-M} \cdot \prod_{k=1}^M (z - z_k)$$

2. Nullstellen im Durchlassbereich und Umgebung entfernen:

$$e^{j \frac{2\pi m}{M}} = e^{j \hat{\omega}_m} \Rightarrow m = \frac{M \cdot \hat{\omega}_m}{2\pi}$$

$$\Rightarrow m_{min} = m - d \leq k \leq m + d = m_{max}$$

$$\Rightarrow H_z(z) = \frac{P_M(z)}{\prod_{k=m_{min}}^{m_{max}} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}$$

## Skalarprodukte

$$(x, y) = x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) = x \cdot y^* = x^T y^* = x_1 y_1^* + \dots + x_n y_n^* \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{C}^n$$

$$v_k[n] = e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (k = 0, \dots, N-1) \quad v_l[n] = e^{j \frac{2\pi}{N} ln} \quad (l = 0, \dots, N-1) \quad (\text{diskrete Sinusfkt. mit } \hat{\omega} = \frac{2\pi}{N} k)$$

$$(v_k, v_l) = \sum_{n=0}^{N-1} v_k[n] v_l^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} n(k-l)} = \frac{1 - e^{j 2\pi (k-l)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (k-l)}} = \begin{cases} N & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

$\Rightarrow v_k, v_l$  sind orthogonal und es gilt:  $\|v_k\| = \sqrt{N}$ .

$$g[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] s[n-k] = (h, s) \quad \text{mit } s = [s[n], \dots, s[n-(N-1)]]^T \in \mathbb{R}^n \text{ und } h = [h[0], \dots, h[N-1]]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$S(\hat{\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j \hat{\omega} n} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] (e^{j \hat{\omega} n})^* = (s, v_{\hat{\omega}}) \quad \text{mit } s \text{ wie oben und } v_{\hat{\omega}} = [1, e^{j \hat{\omega}}, \dots, e^{j \hat{\omega}(N-1)}]^T \in \mathbb{C}^n$$

## Diskrete Fouriertransformation (DFT)

N diskrete äquidistante Frequenzen:

$$\hat{\omega}_k = \frac{2\pi}{N} k \quad (k = 0, \dots, N-1)$$

$$S_d[k] = S(\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N} k) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

DFT tastet  $S(\hat{\omega})$  äquidistant mit Abstand  $\frac{2\pi}{N}$  ab.

DFT ist periodisch mit N.

$$S_d[N-k] = S_d[-k] = S_d^*[k]$$

## Inverse DFT

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_d[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

## Skalarprodukt und DFT

$$s = [s[0], \dots, s[N-1]]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$v_k = [v_k[0], \dots, v_k[N-1]]^T \in \mathbb{C}^n \quad \text{mit } v_k[n] = e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$S_d[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] (e^{j \frac{2\pi}{N} kn})^* = (s, v_k) = (v_k^*, s) = v_k^{*T} \cdot s$$

## Fouriermatrix

$$S_d = W \cdot s$$

$$W = \begin{bmatrix} v_0^*[0] & \cdots & v_0^*[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N-1}^*[0] & \cdots & v_{N-1}^*[N-1] \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N}(N-1)} & \cdots & e^{-j \frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Inverse Fouriermatrix:

$$W^{-1} = \frac{1}{N} W^*$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{N} W^* \cdot S_d$$

## MATLAB-Funktionen

.