

Sinus/Cosinus Eigenschaften

$$a = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$
$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot a$$

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$$
$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$
$$-\cos(\alpha) = \cos(\alpha + \pi)$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Sinussignal

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$$
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Abtastung/Aliasing

$$\text{Abtastintervall } T_s$$
$$\text{Abtastrate } r = \frac{1}{T_s}$$

$$s[n] = s(n \cdot T_s) = s(\frac{n}{r})$$
$$s[n] = A \cos(\omega T_s n + \varphi) = A \cos(\hat{\omega} n + \varphi)$$
$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{r}$$

Alias-Frequenzen: $\hat{\omega}_k = \hat{\omega}_0 + 2\pi k$ und $\hat{\omega}_k = 2\pi k - \hat{\omega}_0$

Haupt-Aliasfrequenz: $-\pi < \hat{\omega}_0 \leq \pi$

Abtast-Theorem: Fehlerfreie Rekonstruktion, wenn $r > 2f_{\max}$

Komplexe Zahlen

$$z = x + jy$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|z| = |z^*|$$
$$z \cdot z^* = |z|^2$$
$$z + z^* = 2\text{Re}\{z\}$$
$$\frac{1}{j} = -j$$

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$
$$e^{j0} = 1; \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{j\pi} = -1; \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$z = |z| \cdot e^{j\alpha} = |z| \cdot (\cos(\alpha) + j \sin(\alpha))$$

$$\alpha = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) \pm \pi & x < 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot \cos(\alpha) = e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}$$

$$2j \cdot \sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}$$

Komplexes Sinussignal

$$z(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = \text{Re}\{A e^{j(\omega t + \varphi)}\} = A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$= \frac{1}{2} X e^{j\omega t} + \frac{1}{2} X^* e^{-j\omega t}$$

$$X = A e^{j\varphi} (\text{Phasor})$$

Summe/Linearkombination von Sinussignalen

$$x(t) = \sum_{k=1}^N \text{Re}\{A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega_k t}\} \text{ (gleiche Frequenz)}$$

$$= \text{Re}\left\{\left(\sum_{k=1}^N X_k\right) e^{j\omega t}\right\} \text{ mit } X_k = A_k e^{j\varphi_k}$$
$$= \text{Re}\{A e^{j\varphi} e^{j\omega t}\}$$
$$= A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j\omega_k t} \text{ mit } \omega_0 = 0 \text{ und}$$

$$a_0 = X_0 \text{ (Gleichanteil)}$$

$$a_k = \frac{1}{2} X_k$$

$$a_{-k} = \frac{1}{2} X_k^* \text{ und } \omega_{-k} = -\omega_k$$

Produkt von Sinussignalen

Mit $\omega_M = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ und $\omega_\Delta = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$:

$$s(t) = 2 \cdot \cos(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_\Delta t)$$
$$= \cos((\omega_M + \omega_\Delta)t) + \cos((\omega_M - \omega_\Delta)t)$$
$$= \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t)$$

$$s(t) = 2 \cdot \sin(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_\Delta t)$$
$$= \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_1 t)$$

Schwebungstöne: Add. zweier Sinusig. ähnl. Freq. ω_1 und ω_2 .

Fourier-Reihe

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_T t}$$

Im Spektrum gilt: $\omega_k = k\omega_T$ (Spektrallinien äquidistant)

Bestimmung der Grundfrequenz:

$$\omega_T = \begin{cases} \omega_1 & \text{falls } a_1 \neq 0 \\ ggT(\omega_1, \omega_2, \dots) & \text{falls } a_1 = 0 \end{cases}$$

Filter

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] \delta[n-k] \text{ (Signal über Einheitsimpuls)}$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b[k] \delta[n-k] = b[n] \text{ (Impulsantwort)}$$

$$g[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] s[n-k] \text{ (Faltung/Differenzengl.)}$$

Kaskadierung: $h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \dots$

Faltung ist kommutativ, assoziativ, $\delta[n]$ ist neutrales Element.

Filter ist kausal, wenn $k \geq 0$. (sieht nicht in Zukunft)

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

LSI-Systeme

linear, zeit/verschiebungs-invariant

zeitinvariant: $s[n - n_0] \Rightarrow g[n - n_0]$

linear: $s[n] = a \cdot s_1[n] + b \cdot s_2[n] \Rightarrow g[n] = a \cdot g_1[n] + b \cdot g_2[n]$

Jedes FIR-Filter ist ein LSI-System.

Fourier-Analyse

$$(s_1, s_2) = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt \text{ (Skalarprodukt)}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j\omega_T k t} dt \text{ (Sonderfall bei } k=0)$$

$$\left(\text{Geometrische Reihe: } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

Übertragungsfunktion (Fouriertransformation)

$$S(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] e^{-j\hat{\omega} n} \text{ (Spektrum)}$$

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\hat{\omega} n} = |H(\hat{\omega})| e^{j\vartheta(\hat{\omega})}$$

$$G(\hat{\omega}) = S(\hat{\omega}) \cdot H(\hat{\omega})$$

Kaskadierung: $H(\hat{\omega}) = H_1(\hat{\omega}) \cdot H_2(\hat{\omega}) \cdot \dots$

Inverse Fouriertransformation:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\hat{\omega}) e^{j\hat{\omega} n} d\hat{\omega}$$

$H(\hat{\omega}) = H^*(-\hat{\omega})$ und $H(\hat{\omega})$ ist 2π -periodisch.

$$\text{Amplitudengang: } |H(\hat{\omega})| \quad |H(\hat{\omega})| = |H(-\hat{\omega})|$$

$$\text{Phasengang: } \vartheta(\hat{\omega}) \quad \vartheta(\hat{\omega}) = -\vartheta(-\hat{\omega})$$

Gleitender Mittelwert der Länge L ($h[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \delta[n-k]$):

$$\Rightarrow \text{Dirichlet-Funktion: } H(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\frac{L}{2}\hat{\omega})}{L \cdot \sin(\frac{\hat{\omega}}{2})} e^{-j\hat{\omega} \frac{L-1}{2}}$$

