

Kleingruppe Do, 15⁴⁵ - 17¹⁵ in SE001
findet nicht statt. Bei zuteilung Email an:
knappmann@math1.rwth-aachen.de

Wdh: Stetigkeit + Differenzierbarkeit in mehreren Dimensionen

1-Dim i) $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$
 f besitzt in x_0 den Grenzwert y_0

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(y) - y_0| < \varepsilon \\ \forall |x - x_0| < \delta$$

ii) $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in I$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

n-Dim: betrachte nun: $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Definition: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt $x_0 \in M$ innerer Punkt von M

$\Leftrightarrow$ es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(x_0) \subset M$

x_0 heißt Randpunkt von M

$\Leftrightarrow$ jede Umgebung von x_0 einen Punkt aus M
enthält und einen Punkt aus $\mathbb{R}^n \setminus M$ enthält

Menge aller Randpunkte von M : ∂M

Def: Sei f in einer punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0)$,
 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definiert

Dann: f besitzt in x_0 den Grenzwert $y_0 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$$

Manschreibt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

Def: Sei $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 innerer Punkt von M

f sei stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ innerer Punkt
 $x_0 \in (a, b) \downarrow$

1-Dim i) $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt linear approximierbar in $x_0 \in I$
 $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0) = o(|x - x_0|)$

$$\begin{aligned} & f(x) = o(|x - x_0|) \\ \Leftrightarrow & \frac{f(x)}{|x - x_0|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned}$$

ii) f heißt in $x_0 \in (a, b)$ diff'bar

$$\Leftrightarrow \exists f' \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'$$

Lemma 1: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$

f lin. approximierbar in $x_0 \Leftrightarrow f$ in x_0 diff'bar

Lemma 2: f diff'bar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

n-Dim $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 sei innerer Punkt von M

Dann ist f diff'bar in $x_0 \Leftrightarrow \exists \underline{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) - f(x_0) - \underline{a}(x - x_0) = o(\|x - x_0\|)$$

für $(x - x_0) \rightarrow 0$

In diesem Fall: $\nabla f(x_0) = \underline{a}$

Richtungsableitung: $v \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in M$ innerer Punkt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \quad (3)$$

für $v = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ i. Zeile: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \partial_{x_i} f(x_0) \quad \text{partielle Ableitung}$$

Übung 1

A1

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} - 1}{x^2 + (2-y)^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} + 1)}{(x^2 + (2-y)^2)(\sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} + 1)} \\ &= \frac{x^2 + (2-y)^2 + 1 - 1}{(x^2 + (2-y)^2)(\sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2-y)^2 + 1} + 1} \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (2-2)^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A2

a) $f_\alpha(0, 0) = e^{0^2 - 0^4} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Sei $\varepsilon > 0$:

1. Fall: $x_1 \geq x_2^2$

wähle $\delta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}$ Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta_1(\varepsilon)$:

$$|e^t - 1| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\leq 1} \underbrace{|t^n|}_{< \delta_1^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1^n$$

geom. Reihe

$$= \frac{1}{1 - \delta_1} - 1 = \frac{\delta_1}{1 - \delta_1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$t = x_1^2 - x_2^4$$

$$|x_1^2 - x_2^4| \leq x_1^2 + x_2^4 \stackrel{\text{OBJA } |x_1| < 1}{\leq} x_1^2 + x_2^2 = \|(x_1, x_2)\|^2 \quad (4)$$

$\Rightarrow$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 > x_2^2$ und $\|(x_1, x_2)\| < \sqrt{\delta_1(\epsilon)}$ gilt

$$|f_a(x_1, x_2) - 1| < \epsilon$$

$f_a(0,0)$

2. Fall $x_1 < x_2^2$

i) $|x_1| < x_2^2$

$$|f_a(x_1, x_2) - 1| = |1 + x_1^2 - 2x_1x_2^2 - \alpha x_2^4 - 1|$$

$$\leq x_1^2 + 2|x_1|x_2^2 + |\alpha|x_2^4 \leq x_1^2 + 2x_2^2 \cdot x_2^2 + |\alpha|x_2^4$$

$$\stackrel{\text{OBJA } |x_2| < 1}{\leq} x_1^2 + \underbrace{(2+|\alpha|)}_{\geq 1} x_2^2 \leq (2+|\alpha|)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= (2+|\alpha|) \|(x_1, x_2)\|^2 < (3+|\alpha|) \|(x_1, x_2)\|^2$$

ii) $|x_1| > x_2^2$

$$|f_a(x_1, x_2) - 1| \stackrel{\text{so}}{\leq} x_1^2 + 2|x_1| \cdot x_2^2 + |\alpha|x_2^4$$

$$\leq x_1^2 + 2|x_1| \cdot |x_1| + |\alpha|x_2^4$$

$$= 3x_1^2 + |\alpha|x_2^4 \stackrel{\text{OBJA } |x_2| < 1}{\leq} 3x_1^2 + |\alpha|x_2^2 < (3+|\alpha|)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= (3+|\alpha|) \|(x_1, x_2)\|^2$$

Wählen nun: $\delta_2(\epsilon) = \sqrt{\frac{\epsilon}{3+|\alpha|}}$

Dann gilt:

Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 < x_2^2$ und $\|(x_1, x_2)\| < \delta_2(\epsilon)$:

$$|f_a(x_1, x_2) - f_a(0,0)| \leq (3+|\alpha|) \|(x_1, x_2)\|^2 < (3+|\alpha|) \delta_2^2(\epsilon) = \epsilon$$

Somit gilt für $\delta := \min \{ \sqrt{\delta_1(\epsilon)}, \delta_2(\epsilon) \}$
für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f_\alpha(x_1, x_2) - f_\alpha(0,0)| < \epsilon \quad \forall \|(x_1, x_2)\| < \delta$$

□

b) Damit f_α auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig sein kann
muss f_α insbesondere in ~~den~~ Punkten der Form
 (y^2, y) stetig sein. Dort gilt für $y^2 \gg y^4$

$$f_\alpha(y^2, y) e^{y^4 - y^4} = 1$$

Es muss auch gelten: ($y \in \mathbb{R}$ fest)

$$1 \stackrel{!}{=} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (y^2, y)} (1 + x_1^2 - 2x_1x_2^2 + \alpha x_2^4)$$

$$= 1 + y^4 - 2y^2y^2 + \alpha y^4$$

$$= 1 + (\alpha - 1)y^4$$

$$\Rightarrow \text{nur wahr wenn } \underline{\alpha = 1}$$

$f_1(x_1, x_2)$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig

Die einzige Menge auf der f_α nicht stetig sein könnte
ist $\{(y^2, y); y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} =: M$

f_α mit $\alpha \neq 1$ ist nur stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus M$.