

Näma Großübung

Aufg. 1

a) f ist differenzierbar im $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = Df(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + R(\underline{x}; \underline{x}_0)$

$$\Leftrightarrow f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = Df(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + R(\underline{x}; \underline{x}_0) \quad (*)$$

$$\text{wobei } R(\underline{x}; \underline{x}_0) = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|), \text{ d.h. } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{R(\underline{x}; \underline{x}_0)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0 \quad (**)$$

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{a}) - f(\underline{x}_0)}{h}$

existiert. Dazu wähle $\underline{x} = \underline{x}_0 + h\underline{a}$

($\underline{a}$ ist Richtung $\Rightarrow \|\underline{a}\| = 1$)

$$(*) \Rightarrow f(\underline{x}_0 + h\underline{a}) - f(\underline{x}_0) = Df(\underline{x}_0) \cdot (h\underline{a}) + R(\underline{x}_0 + h\underline{a}; \underline{x}_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{a}) - f(\underline{x}_0)}{h} = Df(\underline{x}_0) \cdot \underline{a} + \frac{R(\underline{x}_0 + h\underline{a}; \underline{x}_0)}{h}$$

Da $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| = \|h\underline{a}\| = |h| \|\underline{a}\| = |h|$ folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\underline{x}_0 + h\underline{a}; \underline{x}_0)}{h} = 0 \quad (\text{wg. } (**))$$

$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{a}) - f(\underline{x}_0)}{h}$ existiert und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{a}}(\underline{x}_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{a}) - f(\underline{x}_0)}{h} = Df(\underline{x}_0) \cdot \underline{a}$$

b) Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \underline{a}}(\underline{x}_0) \right| = |Df(\underline{x}_0) \cdot \underline{a}| \leq \|Df(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{a}\| = \|Df(\underline{x}_0)\|$$

c) Für Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liefert die Ableitung gerade die Steigung der Funktion

Setze für $\underline{a} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{a}\| = 1$: $g_{\underline{a}}(t) := f(\underline{x}_0 + t\underline{a})$

Dann liefert also $g'_{\underline{a}}$ die Steigung von g

$$g'_{\underline{a}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + (t+h)\underline{a}) - f(\underline{x}_0 + t\underline{a})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{a} + h\underline{a}) - f(\underline{x}_0 + t\underline{a})}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial a}(\underline{x}_0 + t\underline{a}) = \nabla f(\underline{x}_0 + t\underline{a}) \cdot \underline{a}$$

$\Rightarrow g'_a(0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{a}$ liefert die Steigung von f in Richtung $\underline{a}$

Für welche Wahl der Richtung $\underline{a}$ wird der Ausdruck $\nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{a}$ maximal?

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{a} &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \underbrace{\|\underline{a}\|}_{=1} \cos(\angle(\nabla f(\underline{x}_0), \underline{a})) \\ &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cos(\angle(\nabla f(\underline{x}_0), \underline{a})) \end{aligned}$$

Falls $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$ folgt $\nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{a} = 0$ für jede Richtung $\underline{a}$. Anderenfalls wird dieser Ausdruck maximal, wenn $\cos(\angle(\nabla f(\underline{x}_0), \underline{a})) = 1 \Leftrightarrow \angle(\nabla f(\underline{x}_0), \underline{a}) = 0$

$$\Leftrightarrow \underline{a} = \lambda \nabla f(\underline{x}_0) \text{ wegen } \|\underline{a}\| = 1 \text{ folgt } \lambda = \frac{1}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

Aufgabe 2

Wir benutzen Satz 2.4: f ist differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind

$$f(x, y) = x^2 + x \cos(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + \cos(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x \sin(y) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Als Summen und Produkte stetiger} \\ \text{Funktionen sind die partiellen} \\ \text{Ableitungen stetig} \end{array}$$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar

$$(\text{Aufgabe 1}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \nabla f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \cdot \underline{a}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_0 + \cos(y_0) \\ -x_0 \sin(y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2x_0 + \cos(y_0) - x_0 \sin(y_0))$$

Aufgabe 3 Nach Definition 2.7 gilt für die Tangentialebene im Punkt $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$

$$T_{(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))} = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \eta) \in \mathbb{R}^3; \eta - f(\underline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \cdot (\xi_1 - x_{0,1}) \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0) \cdot (\xi_2 - x_{0,2}) \right\}$$

$$= \left\{ (\xi_1, \xi_2, \eta) \in \mathbb{R}^3; \eta - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{\xi} - \underline{x}_0) \right\}$$

$$= \left\{ (\underline{\xi}, \eta) \in \mathbb{R}^3; \eta - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{\xi} - \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{x}_0 \right\}$$

$$\boxed{(\underline{\xi}, \eta) \cdot \underline{n} = d}$$

Hesse-Normalform

$$= \left\{ (\underline{\xi}, \eta) \in \mathbb{R}^3; \eta - \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{\xi} = f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{x}_0 \right\}$$

$$= \left\{ (\underline{\xi}, \eta) \in \mathbb{R}^3; (-\nabla f(\underline{x}_0), 1) \cdot (\underline{\xi}, \eta) = f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{x}_0 \right\}$$

$$= \left\{ (\underline{\xi}, \eta) \in \mathbb{R}^3; \frac{(-\nabla f(\underline{x}_0), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(\underline{x}_0)|^2}} \cdot (\underline{\xi}, \eta) = \frac{f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{x}_0}{\sqrt{1 + |\nabla f(\underline{x}_0)|^2}} \right\}$$

↑ Hesse-Normalform

Hier: $\underline{x}_0 = (0, 0), f(0, 0) = 1 + \log\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4 + \frac{1}{\arctan(1+x^2+y^2)} \cdot \frac{1}{1+(1+x^2+y^2)^2} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 + \frac{1}{\arctan(1+x^2+y^2)} \cdot \frac{1}{1+(1+x^2+y^2)^2} \cdot 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -4 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + |\nabla f(0, 0)|^2} = \sqrt{1 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow T_{(0, 0, f(0))} = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \eta) \in \mathbb{R}^3; \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right) \cdot (\xi_1, \xi_2, \eta) = \right.$$

$$= \frac{1 + \log\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{26}} \}$$

$\Rightarrow$ Der Abstand der Ebene zum Nullpunkt ist ~~der~~

$$d = \left| \frac{1 + \log\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{26}} \right| = \frac{1 + \log\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{26}}$$

Bemerkung: Eine weitere Darstellung der Tangentialebene ist

$$T_{(x_0, f(x_0))} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix} \text{ für } r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 4

Nach Satz 2.8 ist die Länge einer regulären Kurve

$$C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ gegeben durch } L(C) = \int_a^b \|C'(t)\| dt$$

Wir zeigen, C ist doppelpunktfrei: $\Leftrightarrow$ Die Parametrisierung ist bis auf Anfangs- und Endpunkt injektiv

$$(4t_1 \cos(t_1), 4t_1 \sin(t_1)) = (4t_2 \cos(t_2), 4t_2 \sin(t_2))$$

$$\Leftrightarrow t_1 = t_2 \text{ (Ziel)}$$

$$\Rightarrow \|(4t_1 \cos(t_1), 4t_1 \sin(t_1))\| = \|(4t_2 \cos(t_2), 4t_2 \sin(t_2))\|$$

$$\Rightarrow \sqrt{16t_1^2 \cos^2(t_1) + 16t_1^2 \sin^2(t_1)} = \sqrt{16t_2^2 \cos^2(t_2) + 16t_2^2 \sin^2(t_2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16t_1^2} = \sqrt{16t_2^2}$$

$$\Leftrightarrow 4|t_1| = 4|t_2|$$

$$\Leftrightarrow 4t_1 = 4t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2 \text{ da } t_1, t_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ Die Kurve ist doppelpunktfrei

Die Parametrisierung ist offensichtlich differenzierbar

$\Rightarrow$ Die Kurve ist regulär

$$\Rightarrow L(c) = \int_0^{\sinh(1)} \| (4 \cos(t) + 4t(-1) \sin(t), 4 \sin(t) + 4t \cos(t)) \| \cdot dt$$

$$= \int_0^{\sinh(1)} \sqrt{(4 \cos(t) - 4t \sin(t))^2 + (4 \sin(t) + 4t \cos(t))^2} dt$$

$$= 4 \int_0^{\sinh(1)} \sqrt{\cos^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos^2(t)} dt$$

$$= 4 \int_0^{\sinh(1)} \sqrt{1+t^2} dt \quad t = \sinh(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cosh(x)$$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2(x)} \cdot \cosh(x) dx$$

$$= 4 \int_0^1 \cosh^2(x) dx = 4 \left[\sinh(x) \cosh(x) \right]_0^1 - 4 \int_0^1 \sinh^2(x) dx$$

$= \cosh^2(x) - 1$

$$\Rightarrow L(c) = \frac{4 \sinh(1) \cosh(1) + 1}{2}$$

z.B.: Die Kurve ist regulär (Analog wie oben!)

$$L(c) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \| c'(t) \| dt$$

$$c'(t) = \left(\frac{-\sin(2t) \cdot 2}{2\sqrt{\cos(2t)}} \cos(t) + \sqrt{\cos(2t)} (-\sin(t)), \right.$$

$$\left. \frac{-2\sin(2t)}{2\sqrt{\cos(2t)}} \sin(t) + \sqrt{\cos(2t)} \cos(t) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} \left(-\sin(2t) \cos(t) - \sin(t) \cos(2t), \right. \\ \left. -\sin(2t) \sin(t) + \cos(t) \cos(2t) \right)$$

$$\| c'(t) \| = \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} \left[\sin^2(2t) \cos^2(t) + 2 \sin(t) \cos(t) \sin(2t) \cos(2t) + \sin^2(t) \cos^2(2t) \right. \\ \left. + \sin^2(t) + \sin^2(2t) - 2 \sin(t) \cos(t) \sin(2t) \cos(2t) + \cos^2(t) \cos^2(2t) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} \left[\sin^2(2t) \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1} + \cos^2(2t) (\sin^2(t) + \cos^2(t)) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} \left[\sin^2(2t) + \cos^2(2t) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}$$

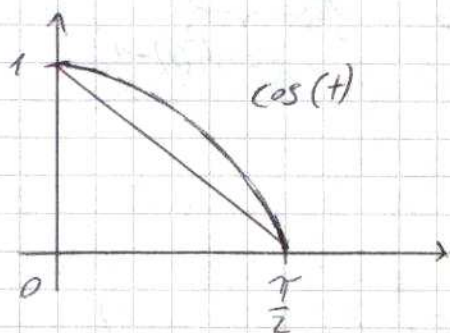
$$\Rightarrow L(C) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} dt$$

Dieses uneigentliche Integral lässt sich nicht in geschlossener Form lösen!

Untersuche das Integral auf Konvergenz:

Es genügt das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} dt$ zu untersuchen

Skizze



$$\text{Es gilt: } \frac{d^2}{dt^2} (\cos(2t)) = -4 \cos(2t)$$

$$\text{und damit gilt } \frac{d^2}{dt^2} \cos(2t) < 0$$

auf $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow \cos(2t)$ ist auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ konkav

$\Rightarrow \cos(2t) \geq 1 - t \frac{4}{\pi}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - t \frac{4}{\pi}}} dt = \left[-\frac{2\pi}{4} \sqrt{1 - t \frac{4}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} < \infty$$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} dt$ konvergiert $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} dt$ konvergiert

$\Rightarrow$ Die Kurve hat endliche Länge

22.10.08

Aufg. 5

1. Schritt: Bestimme die krit. Punkte von f , d.h. die Nullstellen von $\nabla f(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 12y \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -12x + 24y^2 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial f}{\partial y}} \right\} \Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 12y \\ -12x + 24y^2 \end{pmatrix}$$

$$Pf(x,y) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12y = 0 \quad \wedge \quad -12x + 24y^2 = 0 \quad \text{A17}$$

$y = \frac{1}{4}x^2$ (*) Einsetzen in die 2. Gleichung liefert:

$$-12x + 24y^2 = -12x + 24 \cdot \frac{1}{16}x^4 = x \left(\frac{3}{2}x^3 - 12 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee \frac{3}{2}x^3 - 12 = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$

Einsetzen in (*) liefert die krit. Punkte (0,0) und (2,1)

2. Schritt: Untersuchen, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt (Satz 4.9):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 48y$$

Im Punkt (0,0) erhalten wir: $A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

$$B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -12$$

$$C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$\left. \vphantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \right\} \Rightarrow D := B^2 - AC = 144$$

Satz 4.9 $\Rightarrow$ Aus $D > 0$ folgt Sattelpunkt.

Im Punkt (2,1) erhalten wir:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = -12$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 48$$

$$\left. \vphantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \right\} \Rightarrow D = -432$$

Satz 4.9 $\Rightarrow$ Aus $D < 0$ und $A > 0$ folgt, dass (2,1) Minimalstelle ist.

Bemerkung: $H := \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad D = \det(H)$

Aufg. 6 Geraden durch den Nullpunkt sind immer von der Form

$$\{t\underline{v} ; t \in \mathbb{R}\} \quad \text{wobei } \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \|\underline{v}\| = 1$$

$$g(t) := f(t\underline{v}) = f(tv_1, tv_2) = (tv_2 - t^2 v_1^2)(tv_2 - 2t^2 v_1^2)$$

Zeige, dass g ein lokales Minimum im Punkt $t_0 = 0$ hat:

$$g'(t) = (v_2 - 2tv_1^2)(tv_2 - 2t^2 v_1^2)' + (tv_2 - t^2 v_1^2)(v_2 - 4tv_1^2)$$

$$g'(0) = 0$$

$$g''(t) = (-2v_1^2)(tv_2 - 2t^2 v_1^2)' + (v_2 - 2tv_1^2)(v_2 - 4tv_1^2) + (v_2 - 2tv_1^2)(v_2 - 4tv_1^2) + (tv_2 - t^2 v_1^2)(-4v_1^2)$$

$$g''(0) = v_2^2 + v_2^2 = 2v_2^2 > 0 \quad \text{Problem, falls } v = (1, 0)$$

$\Rightarrow g$ hat in ~~t_0~~ $t_0 = 0$ ein lok. Minimum

Da $\underline{v}$ beliebig folgt, dass f auf jeder Geraden durch den Nullpunkt ein lok. Minimum in $(0, 0)$ hat.

Wir zeigen nun, dass f kein lok. Minimum im Punkt $(0, 0)$ hat:

$$\text{Betrachte } f(x, mx^2) = (mx^2 - x^2)(mx^2 - 2x^2) = \underbrace{x^4}_{>0} (m-1)(m-2)$$

$$(m-1)(m-2) > 0 \text{ falls } m > 2 \text{ oder } m < 1$$

$$(m-1)(m-2) < 0 \text{ falls } 1 < m < 2$$

$\Rightarrow$ Für $m \in (1, 2)$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig folgt $f(x, mx^2) < 0$

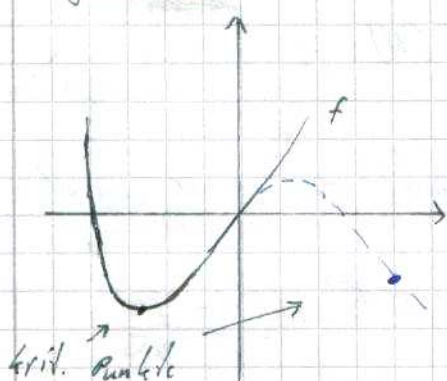
Da aber $f(0, 0) = 0$ kann f in $(0, 0)$ kein lok. Minimum haben.

Bemerkung: Für $m > 2$ oder $m < 1$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, gilt

$f(x, mx^2) > 0 \Rightarrow f$ kann in 0 auch kein lok. Maximum haben.

$\Rightarrow$ Sattelpunkt, da $\nabla f(0, 0) = 0$

Aufgabe 7



Angenommen, die Beh. ist falsch, d.h.

x_0 ist nicht das globale Minimum.

$\Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) < f(x_0)$

Sei ohne Einschränkung $x_0 < x_1$

Da f stetig und $[x_0, x_1]$ abgeschlossen ist, nimmt f auf diesem Intervall $[x_0, x_1]$ ein Maximum an

Das Maximum kann nicht in x_1 angenommen werden, da $f(x_1) < f(x_0)$.

Das Maximum kann aber auch nicht in x_0 angenommen werden, da f in x_0 ein lok. Minimum hat.

$\Rightarrow \exists x_2 \in (x_0, x_1)$, sodass f in x_2 ein lok. Maximum hat.

$\Rightarrow f'(x_2) = 0 \Rightarrow x_2$ ist kritischer Punkt (da Ableitung = 0)

$\downarrow$ da nach Vorf. x_0 der einzige krit. Punkt

Untersuche nun $f(x, y) := x^2 + (1-x)^2 y^2$ auf krit. Punkte:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3(1-x)^2 (-1)y^2 \\ (1-x)^3 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3(1-x)^2 y^2 = 0 \wedge (1-x)^3 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3(1-x)^2 y^2 = 0 \wedge (x=1 \vee y=0)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3(1-x)^2 y^2 = 0 \wedge y=0, \text{ da f\"ur } x=1: 2x - 3(1-x)^2 y^2 = 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \Rightarrow \text{Der einzige krit. Punkt von f ist der Ursprung.}$$

Zeigen, dass f im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum hat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 6(1-x)y^2 \Rightarrow A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6(1-x)^2 y \Rightarrow B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2(1-x)^3 \Rightarrow C = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$$

$$\Rightarrow D = B^2 - AC = -4 < 0 \quad (\text{Satz 4.9}) \Rightarrow \text{Da } 0 < 0 < 0$$

und $A > 0$ hat f in $(0,0)$ ein lok. Minimum.

Zeige nun, dass f in $(0,0)$ kein globales Minimum hat:

$$f(0,0) = 0$$

$$\text{Betrachte } f(x, 1) = x^2 + (1-x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow (0,0)$ kann kein globales Minimum sein.

Aufg. 8

Nach Satz 4.7

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ + \frac{1}{2} \left[h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + 2 h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \right] + R_2$$

$$\text{Wobei } R_2 := \frac{1}{3!} \left(h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_1 + \tau h_1, x_2 + \tau h_2) + 3 h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\dots) \right. \\ \left. + 3 h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(\dots) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(\dots) \right)$$

und $\tau \in (0, 1)$

Hier: $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 e^{xy} y + y \cos(y(1-x))(-y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy} x + \sin(y(1-x)) + y \cos(y(1-x))(1-x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \sin(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 e^{xy} + 2x e^{xy} y + 2x y e^{xy} + x^2 y^2 e^{xy} \\ + y^2 \sin(y(1-x))(-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x e^{xy} x + x^2 e^{xy} + x^2 y e^{xy} \cdot x - 2y \cos(y(1-x)) \\ - y^2 (-1) \sin(y(1-x))(1-x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^3 e^{xy} \cdot x + \cos(y(1-x))(1-x) + \cos(y(1-x))(1-x) \\ + y(-1) \sin(y(1-x))(1-x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \cos(0) + \cos(0) = 2$$

$$f(h_1, h_2) = 0 + h_1 \cdot 0 + h_2 \cdot 0 + \frac{1}{2} [h_1^2 \cdot 2 + 2h_1 h_2 \cdot 0 + h_2^2 \cdot 2] + R_2 \\ = h_1^2 + h_2^2 + R_2$$

Wenn man die partiellen Ableitungen dritter Ordnung berechnet, erkennt man: $\exists$ Konstante $M > 0$, sodass für $|h_1|, |h_2| < 1$

gilt: $\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\tau h_1, \tau h_2) \right|, \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\dots) \right|, \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\dots) \right|, \left| \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\dots) \right| \leq M$

$$\Rightarrow |R_2| \leq \frac{1}{3!} M (|h_1|^3 + 3|h_1|^2|h_2| + 3|h_1||h_2|^2 + |h_2|^3)$$

$$= \frac{1}{3!} M (|h_1| + |h_2|)^3 \leq \frac{4}{3!} M (|h_1|^3 + |h_2|^3)$$

3-Teil $\xrightarrow{\text{Näherung}} \tilde{M}$

$$\Rightarrow f(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2 + R_2 \geq h_1^2 + h_2^2 - \tilde{M}|h_1|^3 - \tilde{M}|h_2|^3$$

$$= \underbrace{(h_1^2 - \tilde{M}|h_1|^3)}_{\substack{>0 \\ \text{falls } |h_1| \text{ klein} \\ \text{genug}}} + \underbrace{(h_2^2 - \tilde{M}|h_2|^3)}_{\substack{>0 \\ \text{falls } |h_2| \text{ klein genug}}}$$

$\Rightarrow f(h_1, h_2) > 0$, falls $|h_1|, |h_2|$ hinreichend klein

$f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ hat in $(0,0)$ ein lokales Minimum

Aufg. 9

Bemerkungen: Mit Satz 4.10

f soll maximal/minimal werden und $g=0$ Nebenbedingung

Satz 4.10 $\Rightarrow \exists \lambda$ mit $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$

$\nearrow$ Extremstelle

$\Rightarrow$ Todo: Löse GLS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

$$\begin{aligned} 2. \text{ GL} \Rightarrow \nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) &= 0 & (x_0, y_0, \lambda) \\ g(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Nachtrag

zu Aufg. 6

$$g''(0) = 2v_2^2 > 0 \text{ falls } v_2 \neq 0$$

Falls $v_2 = 0$: Prüfe ob g' an der Stelle $t=0$ einen Vorzeichen-

22.10.08

Wechsel hat.

$$g'(1) = (-2t v_1^2)(-2t^2 v_1^2) + (-t v_1^2)(-4t v_1^2) \\ = 8t^3 v_1^4 \quad (\text{Vorzeichenwechsel von - nach +!})$$

Falls $v_2 = 0$ hat g' in $t=0$ einen VBL von - nach +

$\Rightarrow g$ hat in $t=0$ ein lok. Minimum

Aufg. 9

Prüfe ob die Voraussetzungen von Satz 4.10 erfüllt sind.

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, y) - c$$

• $f, \tilde{g}$ sind differenzierbar, da es sich um Polynome handelt ✓

$$\cdot \nabla \tilde{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x^{p-1} \\ y^{q-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } x > 0, y > 0$$

$\Rightarrow$ Satz 4.10 ist anwendbar:

In Extremstellen (x_0, y_0) existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla \tilde{g}(x_0, y_0) = 0$$

Um die Maximal-/Minimalstelle zu finden müssen wir diese Gleichungen lösen.

3 Unbekannte: $(x_0, y_0), \lambda$

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla \tilde{g}(x_0, y_0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{2 Gleichungen} \end{array} \right\}$$

$$\tilde{g}(x_0, y_0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{1 Gleichung} \end{array} \right\}$$

(Nicht immer mit faul lösbar - Muss immer wieder geprüft werden)

(partiell integrieren)

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_0^{p-1} \\ y_0^{q-1} \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

$$\frac{1}{p} x_0^p + \frac{1}{q} y_0^q - c = 0$$

Multipliziere in (*) die erste Gleichung mit x_0 und die 2. Gleichung mit y_0 :

$$\left. \begin{array}{l} x_0 y_0 + \lambda x_0^p = 0 \\ x_0 y_0 + \lambda y_0^q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0^p = y_0^q$$

Einsetzen in die 3. Gleichung:

$$\frac{1}{p} x_0^p + \frac{1}{q} y_0^q - c = \frac{1}{p} x_0^p + \frac{1}{q} x_0^p - c = \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{=1} x_0^p - c = x_0^p - c = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt[p]{c} \quad \text{und} \quad y_0 = \sqrt[q]{c}$$

~~*)~~ $(\sqrt[p]{c}, \sqrt[q]{c})$ der einzige Kandidat für eine Extremstelle ist.

Im allg. kann $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ auch Lösungen haben, die keine Extremstellen sind.

ohne vollständigen Beweis: $(c^{1/p}, c^{1/q})$ ist Maximalstelle

* da zu aufwändig!
↳ nicht klausur relevant
nur 1. Te
(lösen Karve)

Beweisidee: Löse die Nebenbedingung nach y auf: $y = \sqrt[q]{q(c - \frac{1}{p}x^p)}$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x, \sqrt[q]{q(c - \frac{1}{p}x^p)})$$

Betrachte $\tilde{f}$ in Punkten $\tilde{x} = (1 + \frac{1}{k})c^{1/p}$ für $|k| > 1$

$$\dots \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) \leq \tilde{f}(c^{1/p}) \quad (\dots \hat{=} 1 \text{ Seite Abschätzung})$$

2. Teil:

In der Maximalstelle gilt: $f(c^{1/p}, c^{1/q}) = c^{1/p} \cdot c^{1/q} = c^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = c$

$$\Rightarrow f(x, y) \leq f(c^{1/p}, c^{1/q}) = c = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

"
x · y

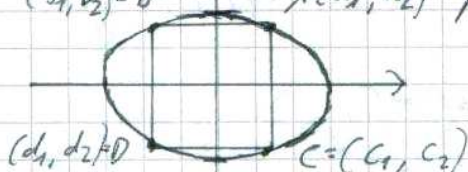
Wiederhole das Argument für alle positiven Konstanten c

$$\Rightarrow x \cdot y \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

3. Übung

Aufg. 10

$(b_1, b_2) = B$



Die Kanten des gesuchten Rechtecks müssen parallel zu den Hauptachsen liegen

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow a_1 = -b_1, a_2 = -c_2$$

$$\Rightarrow u(a_1, a_2) = 2(2a_1 + 2a_2) = 4a_1 + 4a_2 \text{ ist der}$$

der Umfang des gesuchten Rechtecks

Die Nebenbedingung $g(a_1, a_2) = 1 - \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_2^2}{4} = 0$ für Punkte auf der Ellipse.

Die Funktionen U und g sind differenzierbar

(AB)

$$\nabla g(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -\frac{a_2}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_1 > 0, a_2 > 0$$

$\Rightarrow$ Satz 4.10 liefert in der Maximalstelle (a_1^*, a_2^*) :

$$\nabla U(a_1^*, a_2^*) + 2 \nabla g(a_1^*, a_2^*) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (4, 4) + 2 \begin{pmatrix} -a_1^* \\ -\frac{a_2^*}{2} \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow a_1^* = \frac{4}{\lambda} \text{ und } a_2^* = \frac{8}{\lambda} \text{ falls } \lambda \neq 0$$

Falls $\lambda = 0$ hat dieses Gleichungssystem keine Lösung

Einsetzen in die Nebenbedingung:

$$g(a_1^*, a_2^*) = g\left(\frac{4}{\lambda}, \frac{8}{\lambda}\right) = 1 - \frac{16}{2\lambda^2} - \frac{64}{4\lambda^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ Wir haben 2 Kandidaten für Maximierer gefunden:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ und } \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Nach Konstruktion bleibt $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ übrig.

Damit gilt für den maximalen Umfang: $U\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

$$= 12\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ans. 11

Prüfe ob die Leibnizregel (Satz 5.7) anwendbar ist.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < \frac{\pi}{2}, 0 < x < \sin(y)\}$$

Voraussetz.: $x(y) = 0$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ differenzierbar

[differenzierbar auf $[a, b]$ bedeutet:

1. differenzierbar in (a, b)
2. rechtsseitig diff'bar in a
3. linksseitig " in b

• $\beta(y) = \sin(y)$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ differenzierbar

• $f(x, y) = \arctan(\tan(y) - x)$ ist auf $\bar{J}$ stetig und dort auch partiell nach y differenzierbar

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + (\tan(y) - x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(y)} \quad \text{ist auf } \bar{J} \text{ stetig, da}$$

$$\cos(y) \geq c > 0 \quad \text{auf } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$\Rightarrow$ Die Voraussetzungen von Satz 5.3 sind erfüllt

$\Rightarrow F$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig und diffbar

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy}(y) &= \int_0^{\sin(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \underbrace{f(\sin(y), y) \beta'(y) - f(0, y) \alpha'(y)}_{=0} \\ &= \int_0^{\sin(y)} \frac{1}{1 + (\tan(y) - x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(y)} dx + \arctan(\tan(y) - \sin(y)) \cos(y) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(y)} \left[-\arctan(\tan(y) - x) \right]_{x=0}^{x=\sin(y)} + \arctan(\tan(y) - \sin(y)) \cos(y)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(y)} (-\arctan(\tan(y) - \sin(y)) + y) + \arctan(\tan(y) - \sin(y)) \cos(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dy}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) + \arctan\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aufg. 12

Prüfe ob die Voraussetzungen der Leibnizregel erfüllt sind

$\rightarrow$ ok. (analog zu Aufgabe 11)

$\rightarrow u$ ist differenzierbar und es gilt $\frac{du}{dy}(y) =$

$$\frac{du}{dy}(y) = \frac{1}{k} \int_0^y f(x) \cos(k(y-x)) k dx + \frac{1}{k} \underbrace{f(y) \sin(k(y-y))}_{=0} \cdot 1$$

$$= \int_0^y f(x) \cos(k(y-x)) dx$$

erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen der Leibnizregel

$\Rightarrow u'$ ist ebenfalls diffbar auf $[0, \infty)$ und es gilt:

$$u''(y) = \frac{d}{dy} (u'(y)) = \int_0^y f(x) (-1) \sin(k(y-x)) k dx + \underbrace{(f(y) \cos(k(y-y)))}_{=1} \cdot 1$$

$$= -k \int_0^y f(x) \sin(k(y-x)) dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u''(y) + k^2 u(y) = \underbrace{-k \int_0^y f(x) \sin(k(y-x)) dx}_{=-k^2 u(y)} + f(y) + k^2 u(y)$$

$$= -k^2 u(y) + f(y) + k^2 u(y) = f(y)$$

$\Rightarrow u$ ist eine Lösung der DGL

Weiter gilt $u(0) = \frac{1}{k} \int_0^0 f(x) \sin(k(y-x)) dx = 0$

$$u'(0) = \int_0^0 f(x) \cos(k(y-x)) dx = 0$$

$\Rightarrow u$ ist eine Lösung des AWP

Aufg. 13

Prüfe ob ϕ_n differenzierbar ist indem wir die Voraussetzungen der Leibnizregel prüfen: (analog zu Aufgabe 11 & 12)

$$\frac{d\phi_n}{dy}(y) = \int_0^y \frac{1}{n!} n (y-x)^{n-1} f(x) dx + \underbrace{\left(\frac{1}{n!} (y-y)^n f(y) \right)}_{=0} \cdot 1$$

$$= \int_0^y \frac{1}{(n-1)!} (y-x)^{n-1} f(x) dx = \phi_{n-1}(y)$$

$\Rightarrow \phi'_n(y) = \phi_{n-1}(y)$ ist der gesuchte rekursive Zusammenhang

Beweis der Formel durch vollständige Induktion:

IA: $n=0$

$$\int_0^y f(x) dx = \int_0^y \frac{1}{0!} (y-x)^0 f(x) dx = \phi_0(y)$$

IV: Es existiert ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$\int_0^y \int_0^{y_n} \dots \int_0^1 f(x) dx dy_1 \dots dy_n = \phi_n(y)$$

IS: $n \rightarrow n+1$

$$\underbrace{\int_0^y \int_0^{y_{n+1}} \int_0^{y_n} \dots \int_0^1 f(x) dx dy_1 \dots dy_n dy_{n+1}}_{\phi_n(y_{n+1})}$$

$$= \int_0^y \phi_n(y_{n+1}) dy_{n+1} = \int_0^y \phi_{n+1}'(y_{n+1}) dy_{n+1} = \phi_{n+1}(y) - \underbrace{\phi_{n+1}(0)}_{=0} = \phi_{n+1}(y)$$

Übung 4

05.11.08

Ebene Gebietsintegrale können wir mit Hilfe von Satz 5.10 berechnen, wenn das Gebiet $\tilde{\gamma}$ die spezielle Form

$$\tilde{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c < y < d, a(y) < x < b(y)\}$$

hat, wobei $a, b: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind

Dann gilt für $f: \tilde{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$, stetig

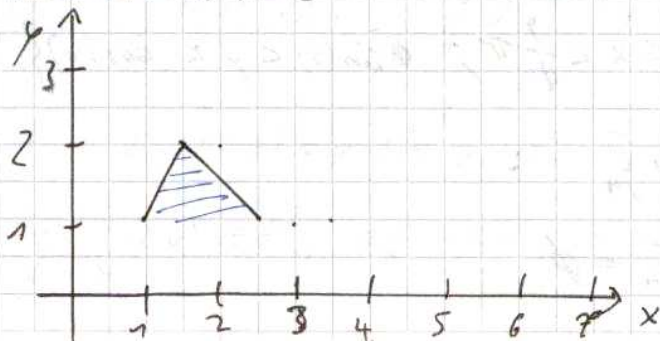
$$\iint_{\tilde{\gamma}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Aufgabe 14

$$\tilde{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < y < 2, y < x < 4-y\}$$

$$c=1, d=2, a(y)=y, b(y)=4-y$$

a, b sind als Polynome auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, also insbesondere auch auf $[1, 2]$



$f(x, y) := x \cdot y$ ist als Polynom auf $\mathbb{R}^2$ stetig, also insbesondere auch auf $\tilde{\gamma}$

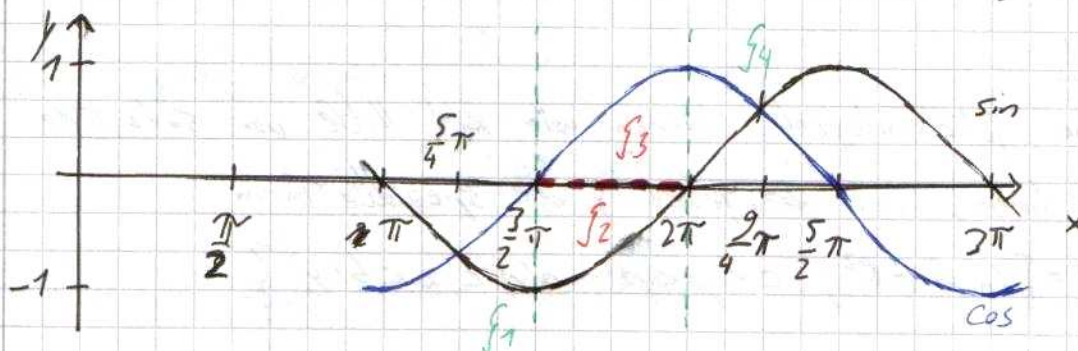
$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{I}} f(x,y) dx dy = \int_1^2 \int_y^{4-y} xy dx dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=y}^{x=4-y} dy = \int_1^2 \frac{1}{2} y (4-y)^2 - \frac{1}{2} y^3 dy$$

$$= \int_1^2 8y - 4y^2 + \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{2} y^3 dy = \dots = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

Aufg. 15

$$\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \pi < x < 3\pi, \sin(x) < y < \cos(x)\}$$



$$\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{5}{4}\pi < x < \frac{9}{4}\pi, \sin(x) < y < \cos(x)\}$$

Um $f(x,y) := |y|$ über $\mathcal{I}$ integrieren zu können, müssen wir $\mathcal{I}$ so zerlegen, dass wir das Vorzeichen von y auf den Teilgebieten von $\mathcal{I}$ kennen.

$$\mathcal{I}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi; \sin(x) < y < \cos(x)\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi; \sin(x) < y < 0\}$$

$$\mathcal{I}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi; 0 < y < \cos(x)\}$$

$$\mathcal{I}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2\pi < x < \frac{9}{4}\pi; \sin(x) < y < \cos(x)\}$$

$$\bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}_1 \cup \bar{\mathcal{I}}_2 \cup \bar{\mathcal{I}}_3 \cup \bar{\mathcal{I}}_4$$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \cap \mathcal{I}_4 = \emptyset$$

$$(\text{Satz 5.8}) \Rightarrow \iint_{\Omega} f(x,y) dy dx = \iint_{\Omega_1} |y| dy dx + \iint_{\Omega_2} |y| dy dx$$

$$+ \iint_{\Omega_3} |y| dy dx + \iint_{\Omega_4} |y| dy dx$$

$$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos(x) \left(\int_{-\sin(x)}^0 -y dy \right) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(x) \left(\int_{-\sin(x)}^0 -y dy \right) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos(x) \left(\int_0^{\sin(x)} y dy \right) dx$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(x) \left(\int_0^{\sin(x)} y dy \right) dx$$

$$= -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2(x) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \cos^2(x) dx$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx$$

$$= -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2(x)) dx + \frac{1}{2} (2\pi - \frac{3}{2}\pi) + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2(x)) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi \right) + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin^2(x) dx + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\pi - 2\pi \right) - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin^2(x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

$$= \dots = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Aufg. 16

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \left(\int_1^x y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx = \iint_{\Omega} f(x,y) dy dx$$

$$\text{mit } f(x,y) = y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

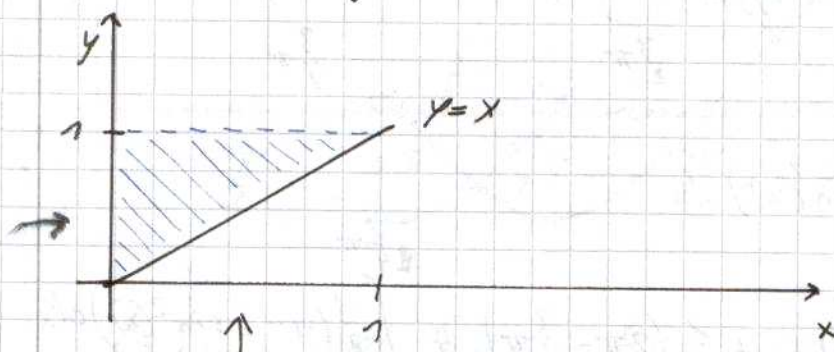
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1; x < y < 1\}$$

$$\bar{f} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \pi \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

Die Voraussetzungen von Satz 5.10 sind erfüllt, da die Grenzen stetige Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ sind und f stetig auf $\bar{f}$ fortgesetzt werden kann (da $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$)

Problem: Für $\int_x^1 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy$ können wir keine Stammfunktion finden!

Idee: Würden wir die Integrationsreihenfolge vertauschen, d.h. zuerst bzgl. x integrieren, wäre es leicht eine Stammfunktion anzugeben.



$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1; x < y < 1\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{f}}{dx} \\ & = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1; 0 < x < y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{f}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^y y \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[-y^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 -y^2 \cos(1) + y^2 \cos(0) dy \\ &= \left[-\frac{1}{3} y^3 (1 - \cos(1)) \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1 - \cos(1)) \end{aligned}$$

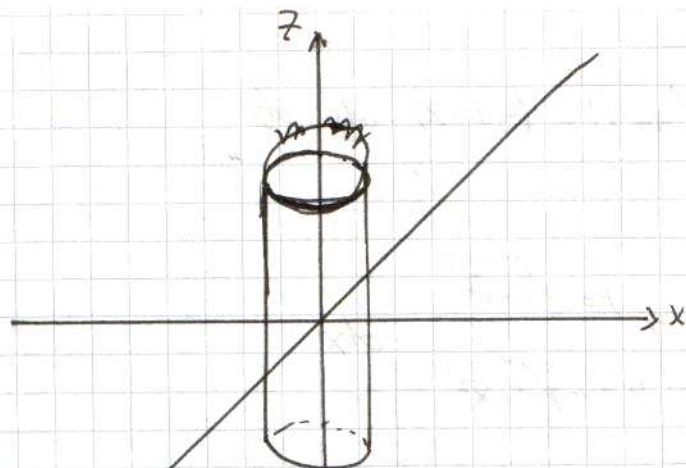
Aufg. 17

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 1+x\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z - x = 1\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \cdot (-1, 0, 1) = 1\} \end{aligned}$$

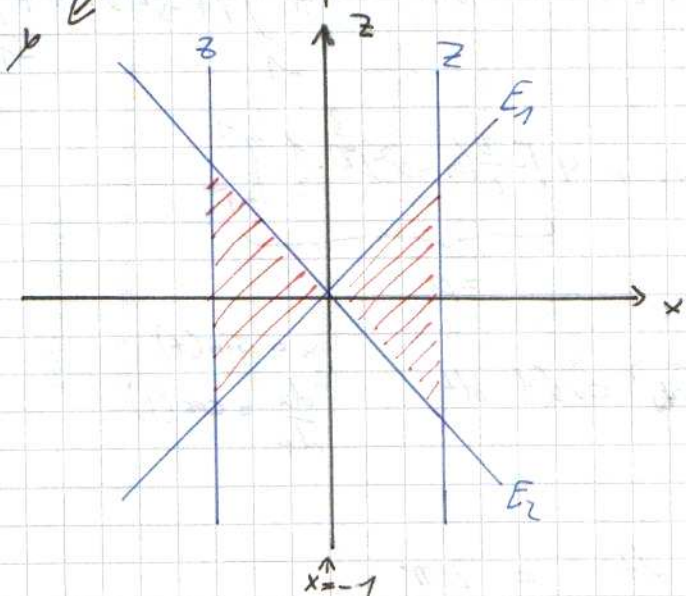
$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -1-x\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = -1\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

3D:



2D:



$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1, -1 - x < z < 1 + x\}$$

Löse $x^2 + y^2 < 1$ nach y auf:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 < 1 &\Leftrightarrow y^2 < 1 - x^2 \Leftrightarrow |y| < \sqrt{1 - x^2} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1; -\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2}; -1 - x < z < 1 + x\}$$

Das Volumen von K ist gegeben durch

$$V(K) = \iiint_K 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1-x}^{1+x} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1+x) - (-1-x) dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[2+2x \cdot y \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (2+2x) 2\sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + 4 \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \underbrace{4 \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_{-1}^1}_{=0}$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \quad \begin{array}{l} x = \sin(t) \\ \frac{dx}{dt} = \cos(t) \end{array}$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

Übung 5

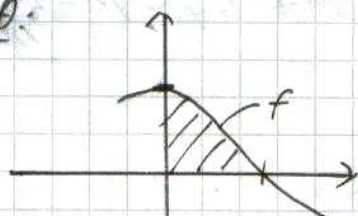
12.11.08

Erklärung
zur letzten
Übung:

$$\iint_G f(x,y) dx dy$$

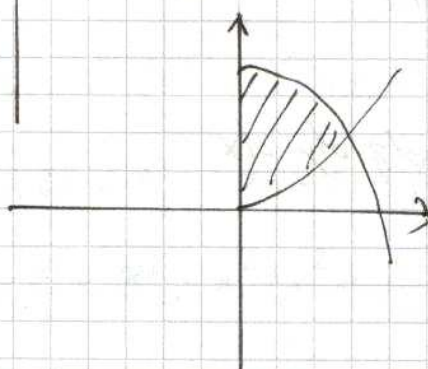
↳ zur geometrischen Interpretation:

1D:



$(x, f(x))$ für $x \in D(f)$

2D:



$(x,y) \in G$

$$\iint f(x,y) dx dy = \iiint \int_0^{f(x,y)} 1 dz dx dy$$

Interpretation: Volumen des Körpers, der durch g und f als Höhenfunktion über g begrenzten Körpers

~~Aufg.~~ Aufg. 18

$$F(x) = \int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} dy = \int_0^{\infty} x e^{-(xy)^2} dy$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-(xy)^2} dy$$

Substitution: $z = z(y) = xy$

$$\frac{dz}{dy} = x \Leftrightarrow dz = x dy$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{xb} e^{-z^2} dz$$

Fallunterscheidung:

$$x > 0: F(x) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$$

Untersuche $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$ auf Konvergenz:

$$\text{NM1-Skript: } e^x \geq 1+x \Rightarrow e^{x^2} \geq 1+x^2 \\ \Rightarrow e^{-z^2} \leq \frac{1}{1+z^2}$$

(folgt auch aus der Reihendarstellung von e^{x^2})

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-z^2} dz \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+z^2} dz = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \text{ ist konvergent.}$$

$$\text{Insbesondere gilt: } F(x) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$x=0: F(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{xb} e^{-z^2} dz = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

$$x < 0: F(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{xb} e^{-z^2} dz$$

Substitution: $z = -u$

$$\frac{dz}{du} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-xb} -e^{-u^2} du$$

$$= - \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{" } x = 0 \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} & \text{" } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral ist konvergent

Nehmen wir an, dass das uneigentliche Integral gleichmäßig konvergent wäre. Die Funktion $F(x, y) := x e^{-x^2 y^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(Satz 6.3) $\Rightarrow F$ ist stetig, ∇ Widerspruch da F in 0 eine Sprungstelle hat.

Aufg. 19

$$\text{Es gilt } |e^{-x^2} \cos(xt)| = e^{-x^2} \underbrace{|\cos(xt)|}_{\leq 1} \leq e^{-x^2}$$

Bereits gezeigt: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ sind konvergent

(siehe Fall 1 und 3 in Aufg. 18)

Die Funktion $f(x, t) := e^{-x^2} \cos(xt)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$

$$(\text{Satz 6.2}) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx \text{ und } \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

konvergieren glm. für $t \in [a, b]$ wobei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein

beliebiges Intervall ist.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \cos(xt) dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

konvergiert glm. auf jedem Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ glm. konvergent.

Aufgabe 20

Wir schreiben $F(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \cos(xt) dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

denn: $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \cos(xt) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x^2} \cos(xt) dx$

Substitution: $z = -x$

$$\frac{dz}{dx} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{-a}^0 e^{-z^2} \cos(-zt) dz = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_0^a e^{-z^2} \cos(zt) dz$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos(zt) dz \quad (\text{vergl. oben!})$$

Wir können uneigentliche ~~Integrale~~ Parameterintegrale mit Hilfe von Satz 6.5 differenzieren:

- $f(x, t) = e^{-x^2} \cos(xt)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = e^{-x^2} (-1) \sin(xt) \cdot x$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$
- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$ ist konvergent (sogar glm. konvergent, s. Aufg. 19)
- $\int_0^{\infty} -e^{-x^2} x \sin(xt) dx$ ist gleichm. konvergent (siehe Aufg. 18, B-Teil)

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$ ist differenzierbar

$$\Rightarrow F'(t) = 2 \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-x^2} \cos(xt) dx) = 2 \int_0^{\infty} -e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

da e^{-x^2}

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

da $e^{-x^2} x \sin(xt) =: g(x)$ eine gerade Funktion ist, d.h.

$$g(-x) = e^{-(x)^2} (-x) \sin(-xt) = e^{-x^2} x (-1)(-1) \sin(xt) \\ = e^{-x^2} x \sin(xt) = g(x)$$

Jetzt folgt analog wie oben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

$$\Rightarrow F'(t) = -f(t)$$

Wie können wir f durch F ausdrücken?

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} x \sin(xt) dx \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \underbrace{e^{-x^2}}_{= (-\frac{1}{2}) \frac{d}{dx} e^{-x^2}} x \sin(xt) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left[\left(-\frac{1}{2} \right) e^{-x^2} \sin(xt) \right]_0^b - \int_0^b \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-x^2} \cos(xt) t dx \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} e^{-b^2} \sin(bt)}_{b \rightarrow \infty \rightarrow 0} + \frac{1}{2} t \int_0^b e^{-x^2} \cos(xt) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} t \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

$$\Rightarrow f(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} t \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

$$= \frac{1}{2} t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx = \frac{1}{2} t F(t)$$

$$\rightarrow F'(t) = -f(t) = -\frac{1}{2} t F(t)$$

$$\text{Weiter gilt: } F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$\Rightarrow F$ ist eine Lösung des ANP

$$\begin{cases} F'(t) + \frac{1}{2} t F(t) = 0 & \text{für } t > 0 \\ F(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Die Lösung dieser ANP ist gegeben durch

$$\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{2} \int_0^t -s ds} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4} t^2} \quad (\text{NM2-Skript, VII:6.8})$$

Nach Satz VII.6.8 ist die Lösung dieses ANP eindeutig!

$$\rightarrow F(t) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4} t^2}$$

Aufg. 21

Kurvenintegrale können wir mit Hilfe von Satz 1.2 aus Kapitel IX berechnen

• γ reguläre Kurve?

- γ stetig diff'bar ✓

$$-\gamma'(t) = (-\pi \sin(\pi t), 2\pi \cos(\pi t), 1)$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\pi^2 \sin^2(\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(\pi t) + 1} \neq 0, \forall t \in [0, 1]$$

- Γ ist doppelpunktfrei

(in der Ebene Ellipse, mit 3. Komponente Schraube: )

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$$

↑
3. Komponente

$\Rightarrow \gamma$ ist injektiv $\Rightarrow \Gamma$ ist Doppelpunktfrei

• f ist stetig auf $\mathbb{R}^3$

(Satz 1.2) $\Rightarrow \int_{\Gamma} t \cdot dx$ existiert und es gilt:

$$\int_{\Gamma} t \cdot dx = \int_0^1 t(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 (-2\sin(\pi t) t e^{t^2}, \cos(\pi t) t e^{t^2}, \arctan(\cos^2(\pi t) + \frac{1}{4} 4\sin^2(\pi t) + t)) \cdot (-\pi \sin(\pi t), 2\pi \cos(\pi t), 1) dt$$

$$= \int_0^1 2\pi \sin^2(\pi t) t e^{t^2} + 2\pi \cos^2(\pi t) t e^{t^2} + \arctan(1+t) dt$$

$$= \int_0^1 2\pi t e^{t^2} (\underbrace{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)}_{=1}) + \arctan(1+t) dt$$

$$= \int_0^1 \pi 2t e^{t^2} dt + \int_0^1 \arctan(1+t) dt$$

$$= [\pi e^{t^2}]_0^1 + [(1+t) \arctan(1+t) - \frac{1}{2} \log((1+t)^2 + 1)]_0^1$$

$$= \pi e - \pi + 2 \arctan(2) - \frac{1}{2} (\log(5) - \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}}) + \frac{1}{2} \log(2)$$

$$= \pi(e - \frac{5}{4}) + 2 \arctan(2) + \frac{1}{2} \log(\frac{2}{5})$$

zu zeigen: $\int_{\Gamma} F \cdot dx$ ist vom Weg unabhängig

mit Satz 1.7.: $\int_{\Gamma} F \cdot dx$ ist genau dann vom Weg unabhängig,

wenn eine Potential(-funktion) oder Stammfunktion existiert.

Gesucht: $U: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, U differenzierbar mit $DU = F$ in $\mathcal{G}$

hier: $\mathcal{G} := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot x \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot y \quad \text{in } \mathcal{G} \quad (*)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot z$$

Es gibt kein "Standardverfahren" mit dessen Hilfe wir U bestimmen können. Wir versuchen U durch Integration einer der drei Gleichungen aus $(*)$ zu bestimmen: [Nach Möglichkeit die einfachste]

$$\int = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot x \, dx = \int -GMm [x^2+y^2+z^2]^{-\frac{3}{2}} x \, dx$$

$$= -GMm (-2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = GMm (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + C$$

Notung: Im Allgemeinen: $C = C(y,z)$

$$\tilde{U}(x,y,z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \tilde{C}(y,z)$$

Es gibt 2 Möglichkeiten die Konstante $\tilde{C}(y,z)$ zu bestimmen:

1. Möglichkeit: Integriere auch die zweite und dritte Gleichung $(*)$

$$\tilde{U}(x,y,z) = GMm (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + \tilde{C}(x,y)$$

$$\hat{U}(x,y,z) = GMm (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + \hat{C}(x,y)$$

Damit eine Stammfunktion existieren kann muss $\tilde{U}(x, y, z) =$

$$\tilde{U}(x, y, z) = \hat{U}(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{C}(y, z) = \bar{C}(x, z) = \hat{C}(x, y)$$

Da $\bar{C}$ unabhängig von y ist ^{und} $\hat{C}$ unabhängig von z muss auch $\tilde{C}$ unabhängig von y und z sein.

$$\Rightarrow \tilde{C}(y, z) = C \in \mathbb{R}$$

$$\bar{C}(x, z) = \hat{C}(x, y)$$

$$\Rightarrow U(x, y, z) = \frac{\gamma M m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C$$

2. Möglichkeit: Wir nehmen an, dass $\tilde{C}$ differenzierbar ist und bestimmen $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}(x, y, z) = \gamma M m \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{C}(y, z)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z}(x, y, z) = \gamma M m \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{C}(y, z)$$

Vergleich mit (*):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{C}(y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{C}(y, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{C} \text{ ist unabhängig von } y \text{ und } z$$

$$\Rightarrow \tilde{C}(y, z) = C \in \mathbb{R}$$

Damit ist $\tilde{U}(x, y, z) = \frac{\gamma M m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C$ ist ein Kandidat für eine Potentialfunktion.

Wir müssen noch prüfen, ob U differenzierbar ist und ob $\nabla \tilde{U} = F$ gilt:

$$\ln \int g, \text{ da } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$$

$\Rightarrow \tilde{U}$ ist differenzierbar

$$\nabla \tilde{U}(x, y, z) = \left(\gamma M m \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x, \gamma M m \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2y, \gamma M m \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2z \right)$$

$$= - \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot (x, y, z)^T = F$$

$$\Rightarrow U(x, y, z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C \text{ ist Potentialfunktion}$$

$\Rightarrow$ Satz 1.7. liefert $\int_{\Gamma} F \cdot dx$ ist vom Weg unabhängig.

Um zu zeigen, dass E_{mech} konstant ist, betrachten wir

$$\frac{d}{dt} E_{\text{mech}} = \frac{d}{dt} \left(-U(r(t)) + \frac{m}{2} |\dot{r}(t)|^2 \right) \quad \text{--- Schreibweise für Skalarprodukt}$$

$$= -\nabla U(r(t)) \cdot \dot{r}(t) + \frac{m}{2} 2 \dot{r}(t) \cdot \ddot{r}(t) \quad \left[|\dot{r}(t)|^2 = \langle \dot{r}(t), \dot{r}(t) \rangle \right]$$

$$= \dot{r}(t) \cdot \ddot{r}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i(t) \ddot{r}_i(t)$$

$$\nabla U = F$$

$$= -F(r(t)) \cdot \dot{r}(t) + m \dot{r}(t) \cdot \ddot{r}(t)$$

$$= -m \ddot{r}(t) \cdot \dot{r}(t) + m \dot{r}(t) \cdot \ddot{r}(t)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow E_{\text{mech}} = \text{konstant.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |\dot{r}(t)|^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (\dot{r}_i(t))^2$$

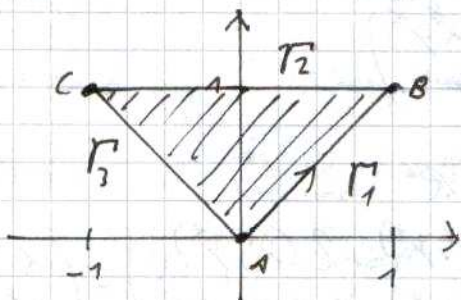
$$= \sum_{i=1}^3 2 \dot{r}_i(t) \ddot{r}_i(t) = 2 \langle \dot{r}(t), \ddot{r}(t) \rangle$$

$$= 2 \dot{r}(t) \cdot \ddot{r}(t)$$

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))^T$$

Aufg. 23

Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von Γ berandet wird und das zur Linken von Γ liegt, wenn Γ im positiven Sinn (d.h. entgegen dem Uhrzeiger-Sinn) durchlaufen wird.



γ ist einfach zusammenhängend

(Gegenbeispiel zu einfach zusammenhängend!)



$\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend

$$a(x,y) = \frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}$$

$$b(x,y) = -(\arctan(x^2 + \sin(x)) - 6xy^2)$$

a, b sind stetig auf $\bar{G}$ und für die partiellen Ableitungen

gilt: $\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) = 8x^2 - 16y^2$

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = 12xy$$

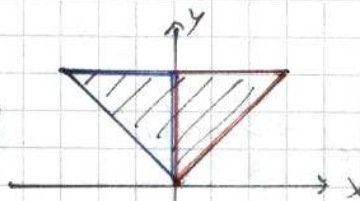
Damit sind $\frac{\partial a}{\partial x}$ und $\frac{\partial b}{\partial x}$ stetig auf $\bar{G}$

Satz 2.2 $\Rightarrow$

$$\oint_{\Gamma} a(x,y) dy - b(x,y) dx = \iint_G \frac{\partial a}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) dx dy$$

$$= \iint_G 8x^2 - 16y^2 + 12xy dx dy = (*)$$

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1; -y < x < y\}$$



$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 0; -x < y < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1; x < y < 1\}$$

$$\Rightarrow (*) = \iint_{G} 8x^2 - 16y^2 + 12xy dx dy = \dots = -\frac{20}{3}$$

Aufg. 24

(i) Wir haben: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$T: \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* - x^* y^* \\ x^* y^* \end{pmatrix}$$

Gesucht ist: $T^{-1}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f^*(f(x^*, y^*), g(x^*, y^*)) \\ g^*(f(x^*, y^*), g(x^*, y^*)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

Wir lösen die Gleichungen: $x = x^* - x^* y^*$ (1)

$$y = x^* y^* \quad (2)$$

nach x^* bzw. y^* aufl:

$$(2) \text{ in } (1) \quad (\text{icferv: } x = x^* - y \Leftrightarrow x^* = x + y)$$

Einsetzen in (2):

$$y = x^* - y^* = (x + y) - y^*$$

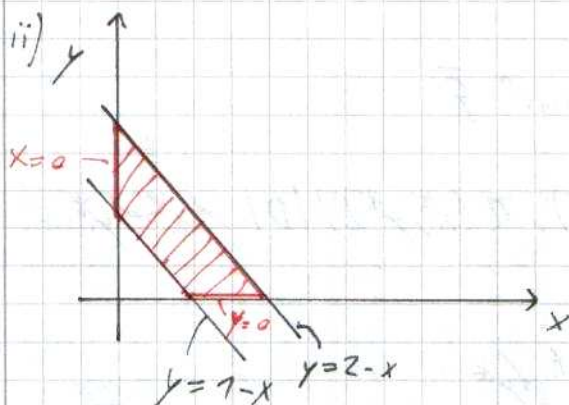
$$\text{Falls } x + y \neq 0: y^* = \frac{y}{x + y}$$

$$\Rightarrow T^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T^{-1}(x, y) := (x + y, \frac{y}{x + y})$$

$$0 := \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x^*, y^*)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x^*}(x^*, y^*) & \frac{\partial \eta}{\partial x^*}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y^*}(x^*, y^*) & \frac{\partial \eta}{\partial y^*}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 - y^* & y^* \\ -x^* & x^* \end{pmatrix} = (1 - y^*)x^* + x^*y^* = \underline{x^*}$$



$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

$$x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Gesucht ist $T^{-1}(f) = f^*$

Wichtig: $f \subset \text{Definitionsbereich}(T^{-1})$

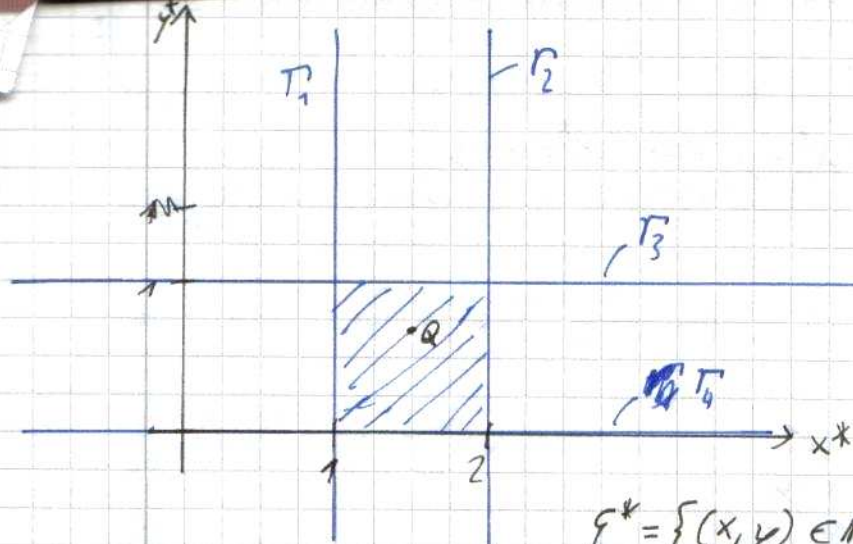
Der Rand von f wird auf den Rand von f^* abgebildet

$$\text{Betrachte: } T^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\}) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2, (1, \frac{y^*}{1})\} \quad \Gamma_1$$

$$T^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 2\}) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2, (2, \frac{y^*}{2})\} \quad \Gamma_2$$

$$T^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2, (y^*, 1)\} \quad \Gamma_3$$

$$T^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}) = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2, (x^*, 0)\} \quad \Gamma_4$$



Frage: Liegt $\int^*$ „innen“ oder „außen“?

$$T^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right) = Q$$

$$\mathcal{G}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x < 2; 0 < y < 1\}$$

iii)

Wir wenden den Transformationsatz für Gebietsintegrale in etwas anderen Formen an (Der Durchlaufsin von $\partial \mathcal{G}$ und $\partial \mathcal{G}^*$ spielt keine Rolle, wenn wir 0 durch $|D|$ ersetzen)

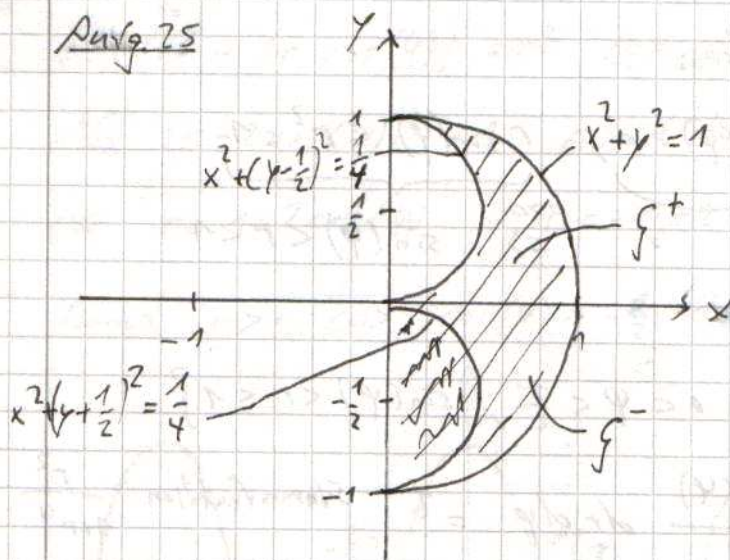
- $\mathcal{G}, \mathcal{G}^*$ sind ebene Gebiete
- T liefert eine umkehrbare eindeutige Zuordnung zwischen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}^*$
- $\partial \mathcal{G}$ wird auf $\partial \mathcal{G}^*$ abgebildet
- $|D| = |x^*| > 0$ auf $\overline{\mathcal{G}^*}$
- $f(x, y) := \exp\left(\frac{y}{x+y}\right)$ stetig auf $\overline{\mathcal{G}}$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{G}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{G}^*} f(\xi(x^*, y^*), \eta(x^*, y^*)) |D| dx^* dy^*$$

$$= \iint_{\mathcal{G}^*} f(x^* - x^* y^*, x^* y^*) |x^*| dx^* dy^*$$

$$= \iint_{\mathcal{G}^*} \exp\left(\frac{x^* y^*}{x^* - y^* x^* + x^* y^*}\right) |x^*| dx^* dy^*$$

$$= \iint_{\mathcal{G}^*} \exp(y^*) |x^*| dx^* dy^* = \dots = \frac{3}{2} (e-1)$$



$$x > 0$$

$$x^2 < y^2 < 1$$

Falls $y > 0$:

$$|y| < x^2 + y^2 \Leftrightarrow y < x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 + y^2 - y = x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

Falls $y < 0$:

$$|y| = -y < x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{(analog zu oben)}$$

$f = f^+ \cup f^-$ ist symmetrisch zur x -Achse

$$f^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, y < x^2 + y^2 < 1\}$$

$$f^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0, -y < x^2 + y^2 < 1\}$$

Der Integrand ist eine gerade Funktion in y

$$\Rightarrow \iint_f \frac{x}{(x^2 + y^2)^2 + 1} dx dy = 2 \iint_{f^+} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2 + 1} dx dy = (*)$$

Transformation auf Polarkoordinaten:

$$x = \xi(r, \varphi) = r \cdot \cos(\varphi) \quad r \geq 0$$

$$y = \xi(r, \varphi) = r \cdot \sin(\varphi) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$D = r$$

$$\Rightarrow (*) = 2 \iint_{(f^+)^*} \frac{r \cos(\varphi)}{(r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi))^2 + 1} r dr d\varphi$$

$\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{=1}$

$$= 2 \iint_{(f^+)^*} \frac{r^2 \cos(\varphi)}{r^4 + 1} dr d\varphi = (**)$$

Bestimme $(f^+)^*$: $x > 0, y > 0, y < x^2 + y^2 < 1$

Einsetzen in Polarkoordinaten:

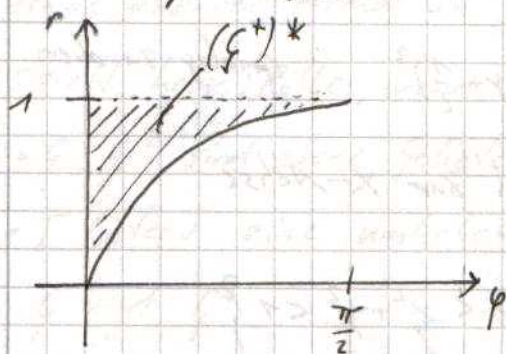
$$\underbrace{r \cos(\varphi) > 0, r \sin(\varphi) > 0}_{r > 0} \Rightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\underbrace{r \sin(\varphi) < r^2 < 1}_{r > 0} \Rightarrow \sin(\varphi) < r < 1$$

$$\Rightarrow (f^+)^* = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \sin(\varphi) < r < 1\}$$

$$(**) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sin(\varphi)}^1 \frac{r^2 \cos(\varphi)}{1+r^4} dr d\varphi = ? \quad \text{Stammfunktion } \frac{r^2}{1+r^4} ?$$

$\Rightarrow$ Umparametrisieren:



$$(f^+)^* = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 < r < 1, 0 < \varphi < \arcsin(r)\}$$

$$\Rightarrow (**) = 2 \int_0^1 \int_0^{\arcsin(r)} \frac{r^2 \cos(\varphi)}{1+r^4} d\varphi dr$$

$$= 2 \int_0^1 \left[\frac{r^2}{1+r^4} \cdot \sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\arcsin(r)} dr$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^4} dr = \frac{1}{2} [\log(1+r^4)]_0^1 = \frac{1}{2} \log(2)$$

~~Übung~~ Übung 7

Aufg. 26

a) Finde Parametrisierung für K

Polarkoordinaten: $x = r \cdot \cos(\varphi)$

$r > 0, \varphi \in [0, 2\pi]$

$y = r \cdot \sin(\varphi)$

Einsetzen in K

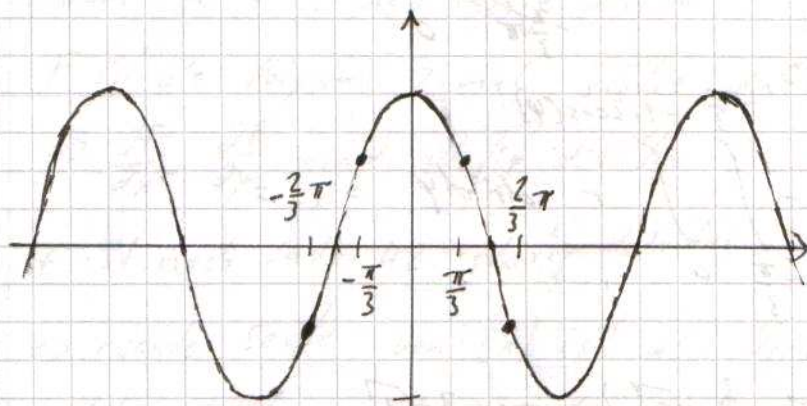
$$(r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) - 2r \cos(\varphi))^2 = r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow (r^2 - 2r \cos(\varphi))^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2(r - 2\cos(\varphi))^2 = r^2$$

$$\stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} (r - 2\cos(\varphi))^2 = 1 \Leftrightarrow r - 2\cos(\varphi) = 1 \vee r - 2\cos(\varphi) = -1$$

$$\Leftrightarrow r = 1 + 2\cos(\varphi) \vee r = -1 + 2\cos(\varphi)$$

$$\text{Damit } r > 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) > -\frac{1}{2} \text{ bzw. } \cos(\varphi) > \frac{1}{2}$$



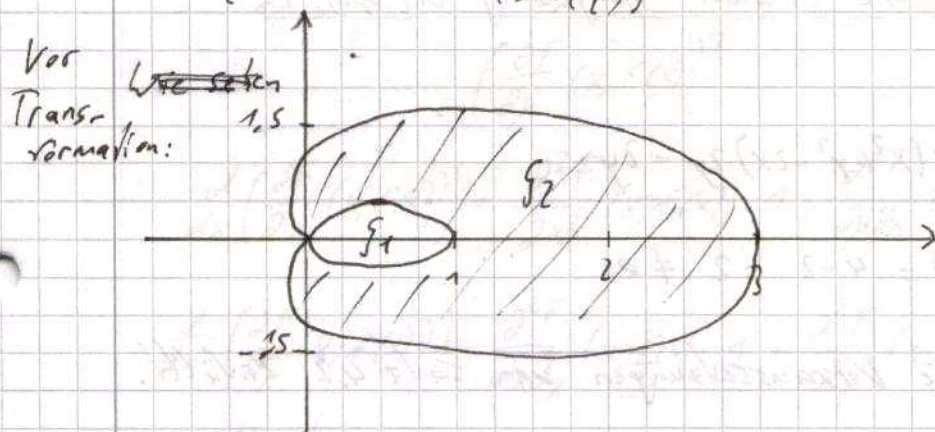
$$\cos(\varphi) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(\varphi) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\pi < \varphi < \frac{2}{3}\pi$$

Damit haben wir 2 Randkurven erhalten:

$$K_1 = \left\{ (1 + 2\cos(\varphi)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, -\frac{2}{3}\pi < \varphi < \frac{2}{3}\pi \right\}$$

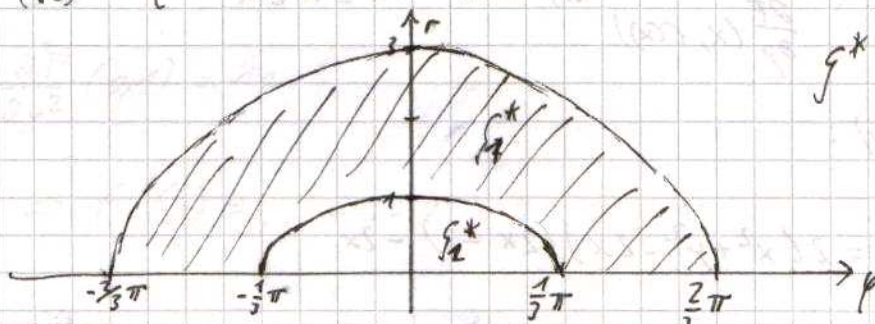
$$K_2 = \left\{ (-1 + 2\cos(\varphi)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, -\frac{1}{3}\pi < \varphi < \frac{1}{3}\pi \right\}$$



Wie sehen $\mathcal{S}_1$ bzw. $\mathcal{S}_2$ nach der Transformation auf Polarkoordinaten aus?

$$(\mathcal{S}_1^*) = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2, -\frac{2}{3}\pi < \varphi < \frac{2}{3}\pi, 0 < r < 1 + 2\cos(\varphi) \right\}$$

$$(\mathcal{S}_2^*) = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2, -\frac{1}{3}\pi < \varphi < \frac{1}{3}\pi, 0 < r < -1 + 2\cos(\varphi) \right\}$$



$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_1^* \cup \mathcal{S}_2^*$$

$$A(f) = \iint_f 1 \, dx \, dy = \iint_{f^*} r \, dr \, d\varphi \quad \leftarrow \text{Transformation auf Polar koordinaten}$$

$$= \iint_{f_1^*} r \, dr \, d\varphi - \iint_{f_2^*} r \, dr \, d\varphi = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \int_0^{1+\cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi - \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \int_0^{-1+2\cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{1+\cos(\varphi)} d\varphi - \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{-1+2\cos(\varphi)} d\varphi = \dots =$$

$$\left(\frac{3}{2} \sqrt{3} + 2\pi \right) - \left(\pi - \frac{3}{2} \sqrt{3} \right) = \pi + 3\sqrt{3}$$

b) Prüfe ob die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt sind (Satz 4.2) für den Punkt $(x_0, y_0) := (0, 1)$:

- F ist Polynom und damit stetig diff'bar auf $\mathbb{R}^2$, also auch insbesondere in einer Umgebung $U(0, 1)$

- $F(0, 1) = 0$

- $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 2x)2y - 2x$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt.

$$\Rightarrow \exists \text{ Rechteck } \bar{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -a \leq x \leq a, 1-b \leq y \leq 1+b\}$$

$\bar{R} \subset U(0, 1)$ und eine stetig diff'bare Funktion

$$f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F(x, f(x)) = 0 \text{ für } -a \leq x \leq a$$

$$\text{und } \frac{d}{dx} f(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad (*) \text{ für } -a \leq x \leq a$$

Bestimme $f'(0)$:

$$f(0) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 2x)(2x - 2) - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0, f(0)) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = -4$$

$$\Rightarrow f'(0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, f(0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, f(0))} = - \frac{-4}{2} = 2$$

Warum ist f 2-mal stetig diffbar?

F ist als Polynom 2-mal stetig diffbar

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ sind stetig diffbar

f ist nach Satz 4.2 stetig diffbar

$\Rightarrow$ rechte Seite von (*) ist als Verkettung und Quotient stetig diffbarer Fkt. wieder stetig diffbar

$\Rightarrow f$ ist 2-mal stetig diffbar

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x))}{\frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x))} \right)$$

$$= - \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \right) \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) f'(x)$$

alternative Schreibweise: $\left[\begin{aligned} &= \nabla \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right) \cdot \frac{d}{dx} (x, f(x)) = \nabla \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right) \cdot (1, f'(x)) \end{aligned} \right]$

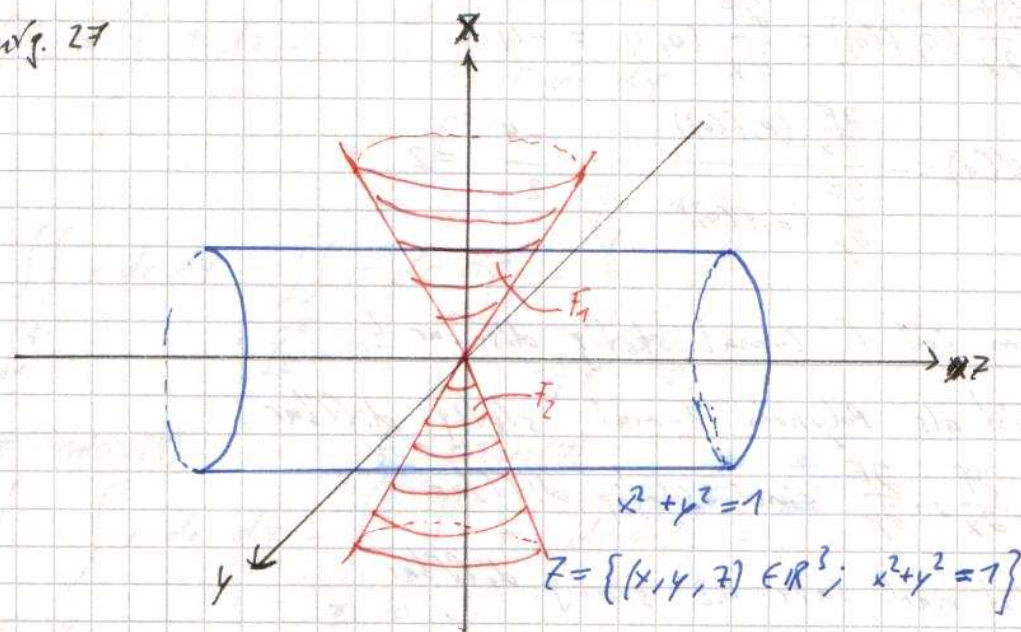
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2(x^2 + y^2 - 2x)(2x - 2) - 2x) = (2(2x - 2)(2x - 2) + 2(x^2 + y^2 - 2x)2 - 2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, f(0)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 1) = 10 \quad \text{analog:} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 1) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0, 1) = -8$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 1) = 10$$

$$\Rightarrow f''(0) = \dots = -9$$

Aufg. 27



$$\text{Aus } x^2 = y^2 + z^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$A(F) = A(F_1) + A(F_2) = 2 \cdot A(F_1)$$

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, z) \in f; x = \pm \sqrt{y^2 + z^2}\}$$

Was ist f ?

Die Schnittkurve von Z und Kegel in der (y, z) -Ebene liefert die Randkurve von f

$$\text{gleichsetzen} \rightarrow y^2 + z^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + z^2 = 1 \text{ ist die Randkurve von } f$$

Transformation auf "Polarkoordinaten":

$$y = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos(\varphi), \quad z = r \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow f^* = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 < \varphi < 2\pi; 0 < r < 1\}$$

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$A(F_1) = 2 \cdot A(F_1) = 2 \iint_f \sqrt{1 + |\nabla h(y, z)|^2} dy dz$$

$$= 2 \iint_f \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(y, z)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}(y, z)\right)^2} dy dz = 2 \iint_f \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2}} dy dz$$

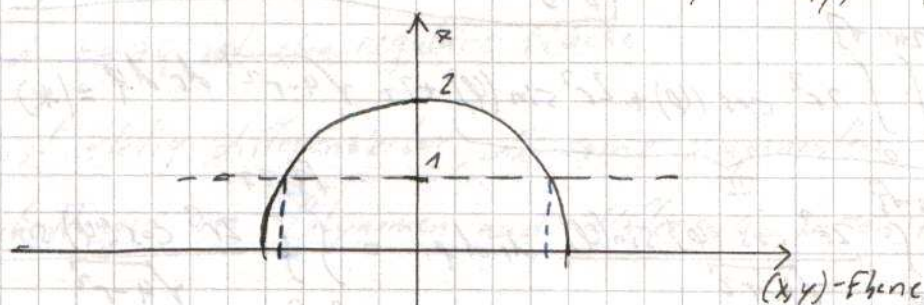
Koordinaten
transfer

$$= 2\sqrt{2} \iint_f 1 dy dz \xrightarrow{\text{Koordinaten transfer}} = 2\sqrt{2} \iint_{f^*} \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi = 2\pi$$

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 1 \}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{Da } z > 1 \text{ folgt } z = +\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = h(x, y) := \sqrt{4 - x^2 - y^2}, (x, y) \in G \}$$



$$G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + 1 \leq 4 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 3 \}$$

$\Rightarrow$ Wir haben die Fläche F als Graph über der (x, y) -Ebene geschrieben.

(Satz 5.5) $\Rightarrow \int_F x^2 + y(x+y) + z(x+y+z) d\sigma$

$$= \iint_G (x^2 + y(x+y) + h(x, y)(x+y+h(x, y))) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)^2} dx dy$$

$$= \iint_G (x^2 + xy + y^2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} (x + y + \sqrt{4 - x^2 - y^2})) \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$= \iint_G (x^2 + xy + y^2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} (x + y + \sqrt{4 - x^2 - y^2})) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Transformation auf Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$D = r$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$G^* = \{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \varphi < 2\pi; 0 < r < \sqrt{3} \}$$

$$= \iint_{\mathcal{G}} (r^2 + r^2 \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \sqrt{4-r^2} (r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) + \sqrt{4-r^2}))$$

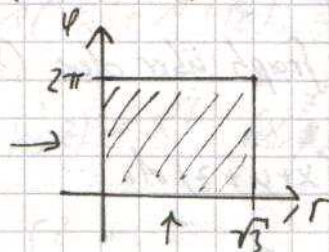
$$\frac{2}{\sqrt{4-r^2}} r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r^3}{\sqrt{4-r^2}} \, dr \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt{4-r^2}} \, dr \, d\varphi \quad I$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (2r^2 \cos(\varphi) + 2r^2 \sin(\varphi) + 2r \sqrt{4-r^2}) \, dr \, d\varphi = (*)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt{4-r^2}} \, dr \, d\varphi = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{2r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt{4-r^2}} \, d\varphi \, dr$$

Anmerkung: $\mathcal{G} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 < \varphi < 2\pi, 0 < r < \sqrt{3}\}$



Bei festen Grenzen, darf man diese einfach tauschen, bei Variablen muss man sich zuerst das Gebiet angucken!

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}} \sin^2(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, dr = 0$$

$$II = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (2r^2 \cos(\varphi) + 2r^2 \sin(\varphi)) \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (2r^2 \cos(\varphi) + 2r^2 \sin(\varphi)) \, d\varphi \, dr = \int_0^{\sqrt{3}} [2r^2 \sin(\varphi) - 2r^2 \cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, dr = 0$$

$$\Rightarrow (*) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2r^3}{\sqrt{4-r^2}} + 2r \sqrt{4-r^2} \right) \, dr \, d\varphi$$

Da keine φ -Abh.
mehr, kann
statt $\int_0^{2\pi}$
geschrieben werden

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r^3 + 2r(4-r^2)}{\sqrt{4-r^2}} \, dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{8r}{\sqrt{4-r^2}} \, dr$$

$$= 2\pi \cdot 8 \cdot [-\sqrt{4-r^2}]_0^{\sqrt{3}} = 16\pi (-1+2) = 16\pi$$

Übung 8

Aufg. 29

Hinweis: In der Klausur wird bei solchen Aufgaben der notwendige Satz genannt. Ohne dessen Anwendung gibt es 0 Punkte!

Prüfe ob die Vorr. des Satzes von Gauß erfüllt sind.

- $\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist ein beschränktes Gebiet und $F = \partial \mathcal{G}$ ist eine reguläre Fläche
- f ist stetig differenzierbar, da seine Komponenten Polynome bzw. Verkettungen von Polynomen und differenzierbaren Funktionen sind.

$\Rightarrow$ Der Satz von Gauß ist anwendbar:

$$\int_{\bar{F}} f \cdot N \, d\sigma = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div}(f) \, dx \, dy \, dz$$

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y + z) + \frac{\partial}{\partial y} (y^2 - 3x + z^5) + \frac{\partial}{\partial z} (-2z(x+y) + \sin(xy))$$

$$= 2x + 2y - 2(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{F}} f \cdot N \, d\sigma = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div}(f) \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathcal{G}} 0 \, dx \, dy \, dz = 0$$

Aufgabe 30

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x, y, z) := u(x, y, z) \nabla v(x, y, z)$

$$= (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

stetig auf $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ und $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z}$ existieren und sind

stetig auf $\bar{\mathcal{G}}$. Nach Vorr.: $\mathcal{G}$ erfüllt die Vorr. des Satzes von Gauß
wende Gauß an:

$$\int_{\partial \mathcal{G}} f \cdot N \, d\sigma = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div}(f) \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_{\partial F} \vec{u} \cdot \vec{N} d\sigma = \int_F \operatorname{div}(\vec{u}) dx dy dz$$

$$\int_{\partial F} u \nabla v \cdot \vec{N} d\sigma = \int_F \operatorname{div}(u \nabla v) dx dy dz$$

u ist skalare Funktion, ∇v ist Vektorfeld

Dann folgt mit Aufg. 30 (B-Teil) $\operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \operatorname{div}(\nabla v)$

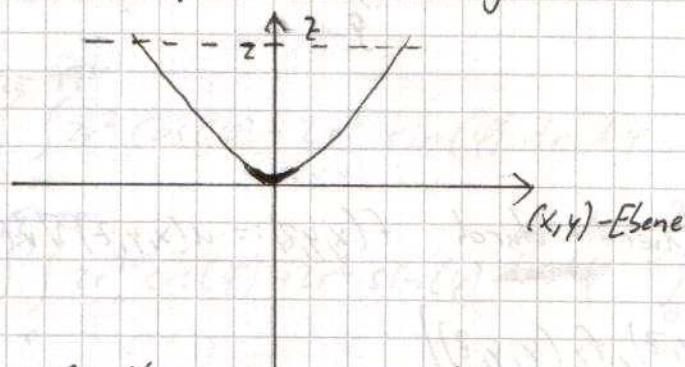
$$\Rightarrow \int_{\partial F} u \nabla v \cdot \vec{N} d\sigma = \int_F \nabla u \cdot \nabla v dx dy dz + \int_F u \cdot \operatorname{div}(\nabla v) dx dy dz$$

Aufg. 31

Aufgrund der Struktur des Integranden, versuchen wir den Satz von Stokes anzuwenden:

Prüfe ob die Vorr. erfüllt sind:

- F ist eine reguläre Fläche
- f ist stetig diff'bar, da die Komponenten von f Polynome sind
- Wird F von einer regulären Kurve berandet?



$$z = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)$$

Die Randkurve von F ist $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 = 2z, z=2\}$
 $= \{(x, y, 2) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 = 4\}$

Eine Parametrisierung von Γ ist: $\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (2 \cos(t), \sin(t), 2)$$

Die Parametrisierung ist regulär, denn

- differenzierbar ✓
- injektiv bis auf Anfangs- & Endpunkt: $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow$

$$\cos(t_1) = \cos(t_2) \wedge \sin(t_1) = \sin(t_2)$$

$$\Leftrightarrow t_1 = t_2 + 2m\pi \text{ für } m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \| \gamma'(1) \| &= \sqrt{(-2 \sin(1))^2 + \cos^2(1)} = \sqrt{3 \sin^2(1) + \sin^2(1) + \cos^2(1)} \\ &= \sqrt{1 + 3 \sin^2(1)} \stackrel{\text{Mon}}{\geq} 1 \text{ und damit } \| \gamma'(1) \| \neq 0 \end{aligned}$$

Γ wird im mathematisch positiven Sinn durchlaufen & die z -Komponente von N ist positiv $\Rightarrow N$ bildet mit dem Durchlaufsinne von Γ eine Rechtsschraube (Rechte-Faust-Regel)

$\Rightarrow$ Der Satz von Stokes ist anwendbar:

$$\begin{aligned} \int_F \operatorname{rot}(f) \cdot N \, d\sigma &= \int_{\Gamma} f \cdot dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(-2 \sin(1) 4, \frac{1}{2} 2 \cos(1) 16, \dots \right) \cdot (-2 \sin(1), \cos(1), 0) \, dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} 16 \sin^2(1) + 16 \cos^2(1) \, dt = 32\pi$$

Aufgabe 32

Wegen des e^{x^2} Terms in der ersten Komponente von f ist es möglicherweise schwierig das Kurvenintegral direkt zu berechnen.

Beobachtung: In der $\operatorname{rot}(f)$ tritt e^{x^2} nicht auf $\leadsto$ Stokes

Dazu brauchen wir eine Fläche die Γ als Randkurve besitzt.

Wähle z.B. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = h(x, y) = 2, (x, y) \in \mathcal{G}\}$

Wobei $\mathcal{G}$ der Kreis mit Radius 1 in der (x, y) -Ebene um den Mittelpunkt

Γ wird im mathematisch positiven Sinn durchlaufen $\Rightarrow \Gamma$ bildet mit $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Rechtsschraube

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} f \cdot dx = \int_F \operatorname{rot}(f) \cdot N \, d\sigma = (*)$$

$$\text{rot}(f) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = (0, -z^2, -4)$$

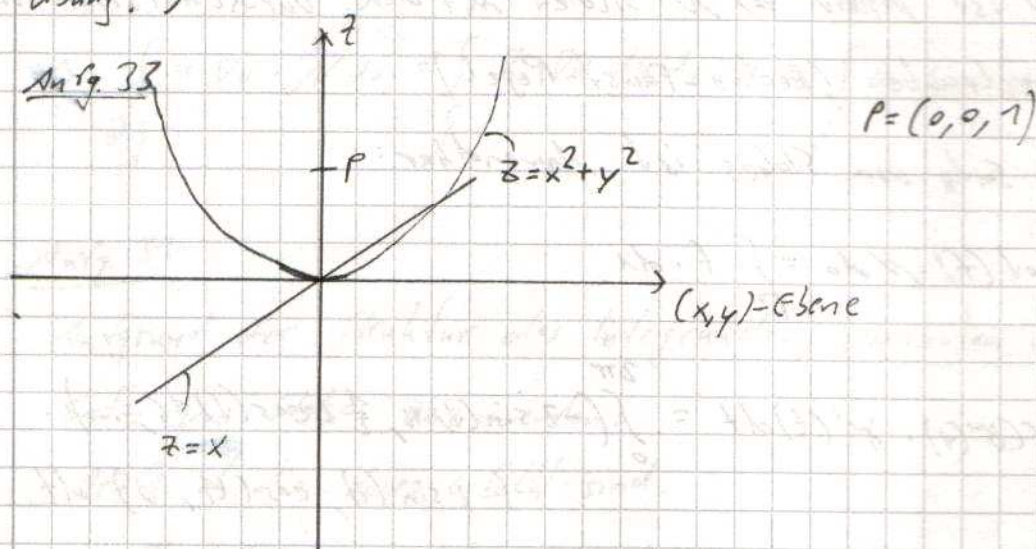
$$\Rightarrow (x) = \int_{\Gamma} -4 \, d\sigma = -4 \int_{\Gamma} 1 \, d\sigma = -4 \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \stackrel{!}{=}$$

$$= -4 \iint_{\Sigma} 1 \, dx \, dy = -4\pi$$

Übung 9

10.12.08

Aufg. 33



Schnittkurve Γ erhalten wir durch gleichsetzen:

$$x = z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - x + y^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = x \right\}$$

Eine Parametrisierung von Γ dessen Projektion auf die (x,y) -Ebene von P aus betrachtet positiv orientiert ist, ist $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := \left(\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin(t), \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \right)$$

Die Parametrisierung ist regulär

Wir wollen $\int_{\Gamma} f \, d\gamma$ mit Hilfe des Satzes von Stokes berechnen.

Dazu brauchen wir eine reguläre Fläche die von Γ berandet wird.

Wähle z.B.:

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}, z = x \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = h(x, y) := x \text{ und } (x, y) \in \mathcal{G} \right\}$$

Wobei: $\mathcal{G} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4} \right\}$

Vir benötigen noch die Normale an der Fläche:
Mit Bemerkung (i) nach Definition 5.3 gilt:

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial h}{\partial y}(x, y), 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)^2}} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

Da F im math. pos. Sinn durchlaufen wird und N positive z -Komponente hat, bilden ρ und N eine Rechtsschraube.
Das Vektorfeld ist differenzierbar.

$$(S + ds) \Rightarrow \int_F f \cdot dy = \int_F \operatorname{rot}(f) \cdot N \, d\sigma = (*)$$

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

$$= (0 - (1 - 2zy)e^{z^2 - x^2}), *, 2xye^{z^2 - x^2} - (-1))$$

$$= (-1 + 2zye^{z^2 - x^2}, *, 2xye^{z^2 - x^2} + 1)$$

$$\Rightarrow (*) = \int_F \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 2zye^{z^2 - x^2} + 2xye^{z^2 - x^2} + 1) \, d\sigma$$

Satz 5.5

$$\stackrel{!}{=} \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 - 2yh(x, y)e^{h^2(x, y) - x^2} + 2xye^{h^2(x, y) - x^2} \right) \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)^2}}_{=\sqrt{2}} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\mathcal{G}} 2 \, dx \, dy = \dots = \cancel{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

Aufg. 34

Das Vektorfeld f ist stetig diff'bar, da seine Komponenten aus Polynomen und Verkettungen von Polynomen mit der exp-Funktion bestehen.

Der Definitionsbereich von f ist ganz $\mathbb{R}^3$ und damit ein konvexes Gebiet $\Rightarrow$ Der 2. Hauptsatz über Kurvenintegrale ist anwendbar, d.h.:

$\int_{\Gamma} f \cdot dy$ ist in $\mathbb{R}^3$ vom Weg unabhängig $\Leftrightarrow \operatorname{rot}(f) = 0$
in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(f) &= (0-0, e^z - e^z, \cos(xy) + x(-\sin(xy))y - \cos(xy) - y(-\sin(xy))x) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{\Gamma} f \cdot dy$ ist vom Weg unabhängig

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \cdot dy &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^1 \left(t^2 \cos(t^3) + e^{\sin(\frac{\pi}{2}t)}, t \cos(t^2), t e^{\sin(\frac{\pi}{2}t)} \right) \cdot \left(1, 2t, \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \frac{\pi}{2} \right) dt = \dots ?\end{aligned}$$

$$\int_0^1 e^{\sin(\frac{\pi}{2}t)} dt = ? \text{ Problem!}$$

Idee: Da $\int_{\Gamma} f \cdot dy$ vom Weg unabhängig ist, ändert sich sein

Wert nicht, wenn wir eine andere Kurve mit gleichem Anfangspunkt $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ und Endpunkt $\gamma(1) = (1, 1, 1)$ wählen.

z.B. Γ^* parametrisiert durch $\gamma^*: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma^*(t) := (t, t, t)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \cdot dy &= \int_{\Gamma^*} f \cdot dy = \int_0^1 f(\gamma^*(t)) \cdot (\gamma^*)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t \cos(t^2) + e^t, t \cos(t^2), t e^t) \cdot (1, 1, 1) dt\end{aligned}$$

Wegunabhängigkeit

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 2t \cos(t^2) + e^t + t \cdot e^t dt \\
&= \int_0^1 2t \cos(t^2) dt + \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \\
&= [\sin(t^2)]_0^1 + [e^t]_0^1 + [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = \dots = \sin(1) + e
\end{aligned}$$

Bemerkung: Manchmal "funktioniert" der direkte Weg vom Anfangs- zu Endpunkt nicht! Dann kann man eine Kurve wählen die parallel zu den Koordinatenachsen verläuft.

$$\text{hier: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufg 35

Eine Dgl erster Ordnung $a(x, u(x)) + b(x, u(x)) u'(x) = 0$ heißt exakt in $\mathcal{G}$ wenn es eine Stammfunktion gibt.

Gesucht: $h: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar, sodass

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = b \quad \text{in } \mathcal{G}$$

$$\text{hier: } \mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$$

Idee: Benutze die Hauptsätze über Kurvenintegrale in der Ebene:

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) \quad \text{in } \mathcal{G} \Leftrightarrow \int_{\gamma} (a, b) \cdot dy \text{ ist in } \mathcal{G} \text{ vom Weg un-}$$

2. Hauptsatz 1. Hauptsatz

$$\text{abhängig} \Leftrightarrow \exists h: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ differenzierbar sodass}$$

$$\nabla h = (a, b) \text{ in } \mathcal{G}$$

Wichtig: Funktioniert nur wenn $\mathcal{G}$ einfach zusammenhängend ist.

$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ ist einfach zusammenhängend.

$\Rightarrow$ Es genügt $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ in $\mathcal{G}$ zu prüfen.

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = \cosh(x^2+y) + 2x^2 \sinh(x^2+y)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = \cosh(x^2+y) + x \sinh(x^2+y) 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \Rightarrow \text{Die Dgl ist exakt!}$$

Bestimmen der Lösungsgesamtheit:

Die Lösungsgesamtheit liefert Satz 1.2. Dazu müssen wir die Stammfunktion ausrechnen:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = b$$

Integriere $\frac{\partial h}{\partial y} = b$ bzgl. y :

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x \cosh(x^2+y) \rightarrow h(x,y) = x \sinh(x^2+y) + c(x)$$

Wir nehmen an, dass c diff'bar ist und leiten nach x ab:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \underbrace{\sinh(x^2+y) + x \cosh(x^2+y) 2x}_{= a(x,y)} + c'(x)$$

$$\Rightarrow c' = 0$$

$\Rightarrow h(x,y) = x \sinh(x^2+y) + c$, für $c \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar und erfüllt $\frac{\partial h}{\partial x} = a$ und $\frac{\partial h}{\partial y} = b$ in $\mathcal{G}$

$\Rightarrow h$ ist die gesuchte Stammfunktion

(Satz 1.2.) $\Rightarrow$ Die Lösungsgesamtheit ist die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen u die

$$(*) = h(x, u(x)) = x \sinh(x^2 + u(x)) = c \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \text{ erfüllen.}$$

b) Für $x=1$ folgt aus (*):

$$c = 1 \cdot \sinh(1 + u(1)) = \sinh(1-1) = \sinh(0) = 0$$

$$\Rightarrow x \sinh(x^2 + u(x)) = 0 \Leftrightarrow \sinh(x^2 + u(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = -x^2$$

Aufgabe 36

Wir suchen nicht triviale Lösungen (d.h. $u \neq 0$) des Randwertproblems

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 & \text{in } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u'(0) \\ u(1) = u'(1) \end{cases}$$

Fall 1: Kann $\lambda = 0$ Eigenwert sein?

$$\Rightarrow u''(x) = 0 \text{ in } [0,1] \Rightarrow u(x) = C_0 x + C_1 \text{ für } C_0, C_1 \in \mathbb{R}$$

Prüfe ob die Randwerte erfüllt sind:

$$u'(x) = C_0$$

$$u(0) = C_1 = u'(0) = C_0$$

$$u(1) = C_0 + C_1 = u'(1) = C_0$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = C_1 = u'(0) = C_0 \\ u(1) = C_0 + C_1 = u'(1) = C_0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2C_0 = C_0 \Leftrightarrow C_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$\Rightarrow u(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda = 0$ kann kein Eigenwert sein.

2. Fall: Kann $\lambda < 0$ Eigenwert sein?

$$\text{Setze } \lambda = -\mu^2 \text{ für } \mu \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow u'' + \lambda u = u'' - \mu^2 u = 0 \Leftrightarrow u'' = \mu^2 u$$

$$\Rightarrow u(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

Prüfe ob die Randwerte erfüllt sind:

$$u'(x) = C_1 \mu e^{\mu x} - C_2 \mu e^{-\mu x}$$

$$(1) \quad u(0) = C_1 + C_2 = u'(0) = C_1 \mu - C_2 \mu$$

$$(2) \quad u(1) = C_1 e^{\mu} + C_2 e^{-\mu} = u'(1) = C_1 \mu e^{\mu} - C_2 \mu e^{-\mu}$$

$$(1) \Leftrightarrow C_1(1 - \mu) = -C_2(1 + \mu)$$

$$(2) \Leftrightarrow C_1(1 - \mu)e^{\mu} = -C_2(1 + \mu)e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow -C_2(1 + \mu)e^{\mu} = -C_2(1 + \mu)e^{-\mu} \Rightarrow \mu = -1$$

und damit (Einsetzen in (1)): $C_1 \cdot 2 = -C_2 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow u(x) = C_2 e^{-\mu x} = C_2 e^x$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $\rightarrow$

$$\lambda = -\mu^2 = -1$$

Normierung:

$$1 = \int_0^1 u^2(x) dx = \int_0^1 c_2^2 e^{2x} dx = c_2^2 \frac{1}{2} (e^2 - 1) \Leftrightarrow c_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{e^2 - 1}}$$

$\Rightarrow$ Es gibt 2 normierte Eigenfunktionen zu dem Eigenwert $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ Die Vielfachheit des Eigenvektors ist 2.

3. Fall: Kann ein $\lambda > 0$ Eigenwert sein?

$$\text{Setze } \lambda = \mu^2$$

$$\rightarrow u''(x) = -\mu^2 u(x) \text{ in } [0, 1]$$

$$\Rightarrow u(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

Prüfe ob die Randwerte erfüllt sind:

$$u'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x)$$

$$(1) u(0) = c_1 = u'(0) = c_2 \mu$$

$$(2) u(1) = c_1 \cos(\mu) + c_2 \sin(\mu) = u'(1) = -c_1 \mu \sin(\mu) + c_2 \mu \cos(\mu)$$

Einsetzen von (1) in (2) liefert:

$$c_2 \sin(\mu) = -\mu \frac{1}{\mu} c_1 \sin(\mu) = -\mu^2 c_2 \sin(\mu)$$

$$\Leftrightarrow c_2 (1 + \mu^2) \sin(\mu) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \vee \sin(\mu) = 0$$

Falls $c_2 = 0$ folgt mit (1): $c_1 = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ ist keine Eigenfunktion

$\Rightarrow$ Diesen Fall müssen wir nicht weiter betrachten.

$$\sin(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = n\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

Wir haben $\lambda > 0 \Rightarrow n \neq 0$ müssen wir nicht betrachten.

$$\Rightarrow u(x) = c_2 n\pi \cos(n\pi x) + c_2 \sin(n\pi x) \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

sind Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda = \mu^2 = n^2 \pi^2$

$$\text{Normierung: } 1 = \int_0^1 u^2(x) dx \text{ liefert: } c_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{1 + n^2 \pi^2}}$$

$\Rightarrow$ Jeder der Eigenwerte $n^2 \pi^2$ hat die Vielfachheit 2.

Aufg. 37

Randwertproblem (*)
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Greensche
Funktion

Def: $u(x) = \int_0^1 g(x,y) f(y) dy$ mit $g(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$

ist eindeutige Lösung von (*)

Für $x \in (0,1)$ gilt:

$$u(x) = \int_0^x y(1-x) f(y) dy + \int_x^1 x(1-y) f(y) dy$$

Leite diesen Ausdruck mit Hilfe der Leibnizregel ab
(Voraussetzungen sind erfüllt, da Integrand & seine partielle Ableitung nach x stetig auf dem Abschluss des Gebietes sind)

$$\begin{aligned} u'(x) &= \underline{x(1-x) f(x)} + \int_0^x -y f(y) dy - \underline{x(1-x) f(x)} + \int_x^1 (1-y) f(y) dy \\ &= -\int_0^x y f(y) dy + \int_x^1 (1-y) f(y) dy \end{aligned}$$

$$u''(x) = -x f(x) - (1-x) f(x) = -f(x) \Rightarrow -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

Überprüfe die Randwerte

$$u(0) = \int_0^0 y(1-0) f(y) dy + \int_0^1 0 \cdot (1-y) f(y) dy = 0$$

$$u(1) = \int_0^1 y(1-1) f(y) dy + \int_1^1 1(1-y) f(y) dy = 0$$

Zur Eindeutigkeit:

Es sei $\tilde{u}$ eine weitere Lösung von (*). Betrachte $v := \tilde{u} - u$,

dann gilt $v'' = \tilde{u}'' - u'' = -f(x) - (-f(x)) = 0$

v löst $\begin{cases} v''(x) = 0 \\ v(0) = 0 = v(1) \end{cases}$ Eindeutige Lösung hier: $v \equiv 0$

$$\Rightarrow \tilde{u}(x) - u(x) = 0 \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow \tilde{u}(x) = u(x)$$

Aufg. 38 $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$

a) zur gleichmäßigen Konvergenz

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$, d.h. $f_n \rightarrow 0$ punktweise

Wir müssen noch zeigen, dass $f_n \rightarrow 0$ glm.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$,

dann gilt für alle $n > N$ und für alle $x \in [0, \infty)$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| -\frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \right| = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} = \frac{x}{n^2} \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}}$$

Wir wissen: $e^y \geq y$ für alle $y > 0 \Rightarrow \frac{1}{e^y} < \frac{1}{y}$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{x}{n^2} \frac{1}{\frac{x}{n}} = \frac{x}{n^2} \frac{n}{x} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

b) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$?

Rechne beide Seiten aus. Es gilt

$$\int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{a}{n}} y e^{-y} dy$$

Partielle Integ.
 $u = y \Rightarrow u' = 1$
 $v' = e^{-y} \Rightarrow v = -e^{-y}$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-y e^{-y} \Big|_0^{\frac{a}{n}} + \int_0^{\frac{a}{n}} e^{-y} dy \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{a}{n} e^{-\frac{a}{n}} - e^{-\frac{a}{n}} + 1 \right] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Hinweis: Das ist kein Widerspruch zu Satz 1.3, da die Funktionenfolge dort auf einem abgeschlossenen endlichen Intervall definiert ist.

Aufg. 39 $f_n: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n} \cos(x^n) e^{-n(x+1)}$

a) Untersuche $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf Konvergenz. Wende Satz 1.7 an:

$$\left| \frac{1}{n} \cos(x^n) e^{-n(x+1)} \right| \leq \frac{1}{n} e^{-n(x+1)} \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], x = -\frac{1}{2} \text{ dann } \downarrow \\ = \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{2}}$$

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{2}}$ konvergent? Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n} e^{-\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow \text{Konvergent in } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{2}}$$

Satz 1.7

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist glm. (& punktweise) konvergent.

b) $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist stetig diffbar mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

Wende Satz 1.6 b) an: Die Funktionen f_n sind für jedes n stetig differenzierbar auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, außerdem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise gegen f . (sogar gleichmäßig) $\rightarrow$ Teil a)

Noch zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ konvergiert glm gegen eine Funktion g

$$f'_n(x) = -\sin(x^n) x^{n-1} e^{-n(x+1)} - \cos(x^n) e^{-n(x+1)}$$

$$= -e^{-n(x+1)} (x^{n-1} \sin(x^n) + \cos(x^n))$$

$$\text{Es gilt } |f'_n(x)| \leq e^{-n(x+1)} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \right) \leq e^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + e^{-\frac{n}{2}} \quad \& \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + e^{-\frac{n}{2}} \text{ konvergent (geometrische Reihe \& Wurzelkriterium)}$$

Reihe & Wurzelkriterium)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ glm. konvergent

Satz 1.6 b) $\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

$$\text{insbesondere } f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} -e^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} + 1 = -\frac{1}{1-\frac{1}{e}} + 1 = \frac{-1}{e-1}$$

Klassische Aufg. 40

Klausur-
Aufgabe

Funktionsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}$, $0 \leq x \leq 1$

Zeige: Die Reihe ist auf $[0, 1]$ punktweise, aber nicht glm. konvergent

Punktweise Konvergenz

Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Quotientenkriterium:

$$\text{Es gilt } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x_0}{x_0} \cdot e^{-(n+1)x_0^2} \cdot e^{nx_0^2} \quad x_0 \neq 0$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-x_0^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x_0^2} < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise konvergent für $x \in (0, 1]$

$x_0 = 0 \Rightarrow f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ ebenfalls konvergent

keine glm. Konvergenz

Angenommen, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert glm. gegen ein f . Da die f_n für jedes n stetig ist, ist f nach Satz 1.6 a) integrierbar und es gilt:

$$\infty > \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$\text{Es ist aber } \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n x e^{-nx^2} dx \quad \begin{array}{l} y = nx^2 \\ dy = 2nx dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-y} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$$

Aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$ konvergiert nicht, da $\frac{1}{2} (1 - e^{-1})$ keine Nullfolge

ist $\nwarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert nicht gleichmäßig

Aufg. 41 $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodische Fortsetzung

Fourier-Koeffizienten von f : $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin(nx) dx$$

zu zeigen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0+2\pi} F(x) \cos(nx) dx \quad x_0 \in \mathbb{R}, x_0 = \tilde{x} + 2\pi k, \tilde{x} \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{Z}$$

außerdem $F(x_0) = F(\tilde{x} + 2\pi k) = F(\tilde{x})$

$$\cos(nx_0) = \cos(n\tilde{x}), \sin(nx_0) = \sin(n\tilde{x})$$

Es ist

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{x_0+2\pi} F(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{x}+2\pi k}^{\tilde{x}+2\pi(k+1)} F(x) \cos(nx) dx$$

$$y = x - 2\pi k$$

$$dy = dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+2\pi} F(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{x}}^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{2\pi}^{\tilde{x}+2\pi} F(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{x}}^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{x}} F(x) \cos(nx) dx$$

$$z = x - 2\pi$$

$$dz = dx$$

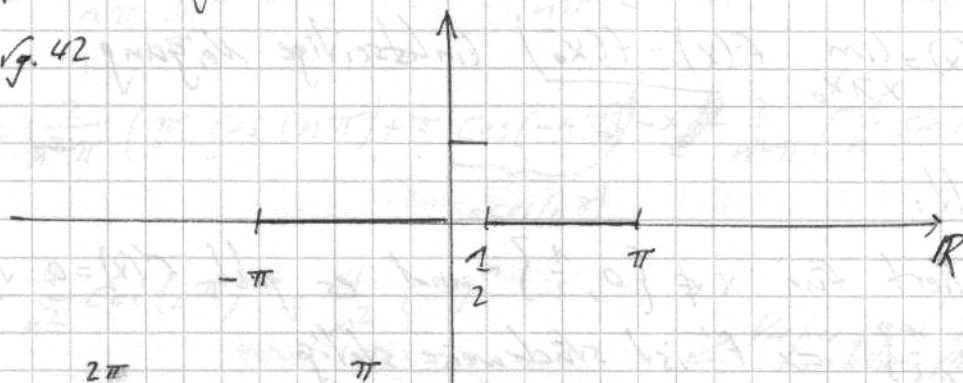
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx = a_n$$

b_n analog!

Aufg. 42 Übung 11

07.01.09

Aufg. 42



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{da } f \text{ } 2\pi\text{-periodisch (s. Aufg. 41)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{2\pi}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$

also

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(\frac{n}{2}))$$

$$\overline{T}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$= \frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\frac{n}{2})}{n\pi} \cos(nx) + \frac{1 - \cos(\frac{n}{2})}{n\pi} \sin(nx) \right)$$

f ist stückweise konstant und damit auch stückweise glatt,
also konvergiert die T_f nach dem Hauptsatz (Satz 3.3)
in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$

Γ stückweise glatt:

→ differenzierbar auf endlich vielen, disjunkten Teilintervallen

→ Rechts- & Linksseitige Neigungen müssen existieren, d.h.

$$\text{HMI} \left\{ \begin{array}{l} f(x_0^+) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) \quad f(x_0^-) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \\ f_{++}(x) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \text{ rechtsseitige Neigung} \\ f_{--}(x) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} \text{ linksseitige Neigung} \end{array} \right.$$

Weiter gilt:

$f'(x)$ existiert für $x \notin \{0, \frac{1}{2}\}$ und es gilt $f'(x) = 0$ für
 $x \notin \{0, \frac{1}{2}\} \Rightarrow f'$ ist stückweise stetig

Satz 3.3 (ii) $\Rightarrow T_f$ konvergiert absolut & gleichmäßig auf
jedem Intervall $[a, b]$ sofern $[a, b]$ keine Unstetigkeitsstellen
von f' enthält

Für $x = 0$ gilt: $T_f(0) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n}{2})}{n\pi}$

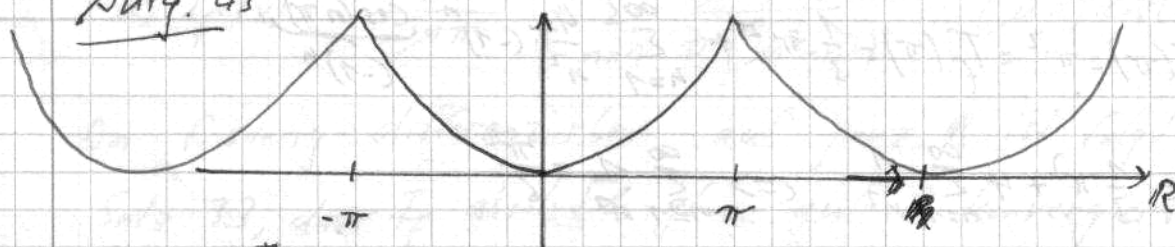
Wieder mit Satz 3.3: $T_f(0) = \frac{1}{2} [f(0^+) - f(0^-)]$

$$= \frac{1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n}{2})}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$$

Anmerkung:
Wahl von $x=0$
ist häufig eine geeignete
Wahl

Aufg. 43



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} \\ = \frac{1}{3\pi} [\pi^3 + \pi^3] = \frac{2}{3} \pi^2$$

Für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{1}{n} \sin(nx) dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{-2}{n\pi} \left[x \frac{(-1)^n}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} (\pi \cos(n\pi) + \pi \cos(-n\pi)) - \frac{2}{n^2\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$= \cos(n\pi)$

$$= \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

← Vorher, auf gerade/ungerade
Funktion prüfen spart Arbeit

$b_n = 0$ da f eine gerade Funktion ist (d.h. $f(x) = f(-x)$)

$$\Rightarrow T_f(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

f ist stückweise glatt und stetig auf $\mathbb{R}$

(Satz 3.3) $\Rightarrow T_f$ konvergiert punktweise und es gilt $T_f(x) = f(x)$

Für $x=0$ gilt:

$$f(0) = 0 = T_f(0) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = ~~\frac{1}{12} \pi^2~~ - \frac{1}{12} \pi^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Für $x=\pi$ gilt:

$$f(\pi) = \pi^2 = T_f(\pi) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{(-1)^n}$$

$$= \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Bsp. 44

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\mu} \sin(\mu x) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\mu \pi} (\sin(\mu \pi) - \sin(-\mu \pi)) = \frac{2}{\mu \pi} \sin(\mu \pi)$$

Für $x \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\mu} \sin(\mu x) \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\mu} \sin(\mu x) ~~\cos~~ \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\mu \pi} (\sin(\mu \pi) \cos(n\pi) - \sin(-\mu \pi) \cos(-n\pi))$$

$$+ \frac{n}{\mu \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\mu x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\mu \pi} \sin(\mu \pi) \overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} + \frac{n}{\mu \pi} \left[\frac{1}{\mu} (-1) \cos(\mu x) \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$- \frac{n}{\mu \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)}{\mu} \cos(\mu x) n \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\mu \pi} (-1)^n \sin(\mu \pi) + \frac{n^2}{\mu^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x) \cos(nx) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{n^2}{\mu^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\mu \pi} (-1)^n \sin(\mu \pi)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\mu\pi(1 - \frac{n^2}{\mu^2})} \cdot (-1)^n \cdot \sin(\mu\pi)$$

$$= \frac{2\mu}{\pi(\mu^2 - n^2)} (-1)^n \sin(\mu\pi)$$

$$b_n = 0, \text{ da } f(-x) = f(x)$$

$$\Rightarrow T_f(x) = \frac{\sin(\mu\pi)}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu(-1)^n}{\pi(\mu^2 - n^2)} \sin(\mu\pi) \cos(nx)$$

Da f stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist folgt mit Satz 3.3, dass T_f absolut & glm. auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

Insbesondere gilt: $T_f(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(\mu x) = T_f(x) = \sin(\mu\pi) \left(\frac{1}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu(-1)^n}{\pi(\mu^2 - n^2)} \cos(nx) \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\mu x)}{\sin(\mu\pi)} = \frac{1}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu(-1)^n}{\pi(\mu^2 - n^2)} \cos(nx)$$

Für $x = \pi$:

$$\cos(\mu\pi) = \frac{1}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu(-1)^n}{\pi(\mu^2 - n^2)} (-1)^n = \frac{1}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu}{\pi(\mu^2 - n^2)}$$

Schreiben wir nun x anstelle von μ folgt:

$$\cos(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{\pi(n^2 - x^2)}$$

Aufg. 45

f kann in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

d.h. a_0, a_n, b_n für $n \in \mathbb{N}$ sind die Fourierkoeffizienten von f .

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ist die Stammfunktion von f .

Wir wollen F in eine Fourierreihe entwickeln

Frage: Ist F 2π -periodisch?

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+2\pi} f(t) dt$$

$$= F(x) + \underbrace{\int_x^{x+2\pi} f(v) dv}_{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} f(v) dv = 0 \text{ nach Voraussetzung}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot F(x) dx = \frac{1}{\pi} [x F(x)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x F'(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} (2\pi F(2\pi)) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx \\ &= F(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) F(x) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) f(x) dx \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x) dx = -\frac{1}{n} b_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)}{n} \cos(nx) F(x) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-1)}{n} \cos(nx) f(x) dx \\ &= \frac{(-1)}{n\pi} (\cos(2\pi n) F(2\pi) - \cos(0) F(0)) + \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n} a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &\sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n} \cos(nx) + \frac{a_n}{n} \sin(nx) \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v) dv - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n} \cos(nx) - \frac{a_n}{n} \sin(nx) \right) \end{aligned}$$

15.01.09

Übung 12

Aufg. 46

Ergebnismenge: Ω hier $\Omega = \{(w, w, w); (w, w, z); (w, z, w); (w, z, z); (z, w, w); (z, w, z); (z, z, w); (z, z, z)\}$

Laplace-Experiment: Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit

Ergebnis = Elementarergebnis = Element aus Ω

~~#(A)~~ $P(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$

a) Ereignis (Teilmenge von Ω) $A = \text{"dreimal Wappen"} \subset \Omega$

$$A = \{(w, w, w)\} \subset \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$$

b) Ereignis $B = \text{"einmal Wappen und zweimal Zahl"} \subset \Omega$

$$B = \{(w, z, z); (z, w, z); (z, z, w)\} \subset \Omega$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

Aufg. 47

Bernoulli-Experiment: n -fache Ausführung eines Einzel-experiments, welches selbst nur zwei mögliche Ergebnisse hat.

Hier ist das Einzelexperiment das Spielen eines Satzes, hierfür ist die Ergebnismenge

$$\Omega_i = \left\{ \underbrace{\text{"Spieler 1 gewinnt den Satz"}}_{\hat{= 1}}, \underbrace{\text{"Spieler 2 gewinnt den Satz"}}_{\hat{= 0}} \right\} \\ = \{1, 0\}$$

Es gilt für alle i $P(\{1\}) = p \Rightarrow P(\{0\}) = 1 - p$

Welche Ergebnisse gehören zu den Ereignis $A = \text{"Spieler 1 gewinnt das Match"}?$

(i) Spieler 2 gewinnt keinen Satz

$$1 \ 1 \ 1 \ } p^3$$

(ii) Spieler 2 gewinnt einen Satz (iii) Spieler 2 gewinnt zwei Sätze

$$\left. \begin{array}{l} 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \right\} 3 \cdot p^3 \cdot (1-p)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \right\} 6 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$$

$$\Rightarrow P(A) = p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2$$

Aufg. 48

$$\textcircled{1}$$

G
G

$$\textcircled{2}$$

G
S

$$\textcircled{3}$$

S
S

G: Gold

S: Silber

Ergebnismenge $\Omega = \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{\text{Kästchen}} \times \underbrace{\{1, 2\}}_{\text{Schublade}}$

$$= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{6}$, d.h. alle Fächer sind gleichwahrscheinlich (Laplace-Experiment)

A = "Gold liegt im anderen Fach"

B = "Gold liegt im bereits geöffneten Fach"

Gesucht $P(A|B)$ bedingte Wahrscheinlichkeit

Es gilt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (Definition 2.1)

$$\left. \begin{aligned} A &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\} \\ B &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Aufg. 49

Wir haben die folgenden Ereignisse

M = "Testperson ist ein Mädchen"

J = "Testperson ist ein Junge"

B = "Testperson hat den Test bestanden"

$\bar{B}$ = "Testperson hat den Test nicht bestanden"

Laut Aufgabenstellung gegeben:

$$P(M \cap B) = 0,25$$

$$P(M \cap \bar{B}) = 0,3$$

$$P(J \cap B) = 0,25$$

$$P(J \cap \bar{B}) = 0,2$$

Frage: Sind M und B
stochastisch unabhängig?

$\Rightarrow$ Def. 2.4 M & B stoch. unabh., falls $P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B)$

Berechne also noch $P(M)$ und $P(B)$

$$M = (M \cap B) \cup (M \cap NB) \Rightarrow P(M) = P(M \cap B) + P(M \cap NB), \text{ da } B, NB \text{ disjunkte Ereignisse sind} = 0,55$$

$$B = (B \cap M) \cup (B \cap J) \Rightarrow P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap J), \text{ da } M, J \text{ disjunkte Ereignisse sind} = 0,5$$

$$\Rightarrow P(M) \cdot P(B) = 0,55 \cdot 0,5 = 0,275 \neq 0,25 = P(M \cap B)$$

$\Rightarrow M$ und B sind nicht stochastisch unabhängig

Aufg. 50

Wir haben die folgenden Ereignisse:

F = "Person ist eine Frau"

M = "Person ist ein Mann"

Z = "Person ist Zuckerkrank"

Laut Aufgabenstellung gegeben:

$$P(F) = 0,6, \quad P(M) = 0,4, \quad P(Z|M) = 0,05, \quad P(Z|F) = 0,01$$

a) gesucht $P(Z) = P(Z \cap F) + P(Z \cap M)$, da F, M disjunkt

$$\text{Es gilt } P(Z|M) = \frac{P(Z \cap M)}{P(M)} \Leftrightarrow P(Z|M) \cdot P(M) = P(Z \cap M)$$

$$\Rightarrow P(Z \cap M) = 0,05 \cdot 0,4 = 0,02$$

$$\text{analog } P(Z|F) = \frac{P(Z \cap F)}{P(F)} \Rightarrow P(Z \cap F) = P(Z|F) \cdot P(F) = 0,01 \cdot 0,6 = 0,006$$

$$\Rightarrow P(Z) = 0,02 + 0,006 = 0,026 = 2,6\%$$

b) Z und F stochastisch unabhängig d.h. gilt $P(Z \cap F) = P(Z) \cdot P(F)$?

$$P(Z \cap F) = 0,006$$

$$P(Z) \cdot P(F) = 0,026 \cdot 0,6 = 0,0156$$

$\Rightarrow P(Z \cap F) \neq P(Z) \cdot P(F) \Rightarrow$ nicht stochastisch unabhängig

c) $P(M|Z)$ & $P(F|Z)$

$$P(M|Z) = \frac{P(M \cap Z)}{P(Z)} = \frac{0,02}{0,026} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{26}{1000}} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} (\approx 77\%)$$

$$P(F|Z) = \frac{P(F \cap Z)}{P(Z)} = \frac{0,006}{0,026} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{26}{1000}} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$$

Aufg. 51

Ereignisse: R_i = "rote Kugel im i-ten Zug"

B_i = "blaue Kugel im i-ten Zug"

Behauptung: $P(R_n) = \frac{r}{r+b}$

Es gilt $P(R_1) = \frac{r}{r+b}$, $P(B_1) = \frac{b}{r+b}$

Einschub: Was passiert im 2. Zug?

Das hängt davon ab, welche Kugel im vorherigen Zug gezogen wurde.

Fall 1: Rote Kugel im ersten Zug

$\Rightarrow$ neue Situation: $r+c$ rote Kugeln, b blaue Kugeln

$$P(R_2 | R_1) = \frac{r+c}{r+b+c}$$

Fall 2: Blaue Kugel im ersten Zug

$\Rightarrow$ Situation: r rote Kugeln, $b+c$ blaue Kugeln

Gesucht $P(R_2)$. Da R_1 und B_1 eine vollständige

Ereignisdiskjunktion (vgl. Def. 3.1 $R_1 \cap B_1 = \emptyset$, $R_1 \cup B_1 = \Omega$)

bilden, folgt mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(R_2) = P(R_2 | B_1) \cdot P(B_1) + P(R_2 | R_1) \cdot P(R_1)$$

$$= \frac{r+c}{r+b+c} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b+c} \cdot \frac{b}{r+b} = \frac{r}{r+b} \left(\frac{r+c+b}{r+b+c} \right) = \frac{r}{r+b}$$

$\Rightarrow$ Beh. wahr für $n=2$

allgemeines $n \in \mathbb{N}$: vollständige Induktion:

IA: $n=1$ $P(R_1) = \frac{r}{r+b}$ ✓

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $P(R_n) = \frac{r}{r+b}$

IS: Wir haben zu zeigen: $P(R_{n+1}) = \frac{r}{r+b}$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} | R_n) \cdot P(R_n) + P(R_{n+1} | B_n) \cdot P(B_n)$$

Wir wissen $P(R_n) = \frac{r}{r+b} = \frac{r_n}{r_n+b_n}$ r_n : Anzahl roter Kugeln
vor der n-ten Zug

$$P(B_n) = 1 - P(R_n) = 1 - \frac{r}{r+b} = \frac{b}{r+b} = \frac{b_n}{r_n+b_n}$$

b_n : " blauer "

Fall 1: Rote Kugel im n-ten Zug

$\Rightarrow r_n + c$ rote Kugeln b_n blaue Kugeln

$$P(R_{n+1} | R_n) = \frac{r_n + c}{r_n + b_n + c}$$

Fall 2: Blaue Kugel im n-ten Zug

$\Rightarrow r_n$ rote Kugeln

$b_n + c$ blaue Kugeln

$$\Rightarrow P(R_{n+1} | B_n) = \frac{r_n}{r_n + b_n + c}$$

Insgesamt erhalten wir

$$P(R_{n+1}) = \frac{r_n + c}{r_n + b_n + c} \cdot \frac{r_n}{r_n + b_n} + \frac{r_n}{r_n + b_n + c} \cdot \frac{b_n}{r_n + b_n}$$

$$= \frac{r_n}{r_n + b_n} \left(\frac{r_n + c}{r_n + b_n + c} + \frac{b_n}{r_n + b_n + c} \right) = \frac{r_n}{r_n + b_n} = \frac{r}{r+b}$$

13. Übung

21.01.09

Aufg. 52

Wir haben die folgenden Ergebnisse

A_{Mo} = "Auto wird an einem Montag hergestellt"

A_{Di} = " " " " " Dienstag " "

A_{Mi} = " " " " " Mittwoch " "

A_{Do} = " " " " " Donnerstag " "

A_{Fr} = " " " " " Freitag " "

F = "Auto ist fehlerbehaftet"

$$P(F | A_{Mo}) = \frac{4}{100}, \quad P(F | A_{Di}) = 0,01 = \frac{1}{100}, \quad P(F | A_{Mi}) = 0,01$$

$$P(F | A_{Do}) = 0,01, \quad P(F | A_{Fr}) = 0,02$$

$$P(A_{Mo}) = P(A_{Di}) = P(A_{Mi}) = P(A_{Do}) = P(A_{Fr}) = \frac{1}{5} = 0,2$$

Da Autos nur von Montag bis Freitag hergestellt werden, bilden ~~$A_{Mo}, \dots, A_{Fr}$~~ $A_{Mo}, \dots, A_{Fr}$ eine vollständige Ereignisdisjunktion.

$$\text{gesucht: } P(A_{Mo} | F) = \frac{P(F | A_{Mo}) \cdot P(A_{Mo})}{P(F)}$$

Es fehlt noch $P(F)$

↳ Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P(F) = P(F | A_{Mo}) \cdot P(A_{Mo}) + P(F | A_{Di}) \cdot P(A_{Di}) + \dots + P(F | A_{Fr}) \cdot P(A_{Fr})$$

(ausklammern da $P(A_{Mo}) = P(A_{Di}) = \dots$)

$$= \frac{1}{5} (0,04 + 0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,02)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 0,09$$

$$\Rightarrow P(A_{Mo} | F) = \frac{0,04 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} \cdot 0,09} = \frac{4}{9}$$

Aufg. 52

Wir haben die folgenden Ereignisse:

T = "Ein Schuss trifft"

S_1 = "Schuss von Schütze 1"

S_2 = " " " " 2 "

S_3 = " " " " 3 "

$$P(T | S_1) = \frac{3}{10} \quad P(T | S_2) = \frac{6}{10} \quad P(T | S_3) = \frac{8}{10}$$

$$P(S_1) = \frac{3}{6}$$

$$P(S_2) = \frac{2}{6}$$

$$P(S_3) = \frac{1}{6}$$

$$\text{gesucht: } P(S_1 | T) = \frac{P(T | S_1) \cdot P(S_1)}{P(T)}$$

$$P(S_2 | T) = \frac{P(T | S_2) \cdot P(S_2)}{P(T)}$$

$$P(S_3 | T) = \frac{P(T | S_3) \cdot P(S_3)}{P(T)}$$

$$P(T) = P(T|S_1) P(S_1) + P(T|S_2) \cdot P(S_2) + P(T|S_3) P(S_3) \quad \text{Satz der totalen Wk/r-Scheitelkeit}$$

da S_1, S_2, S_3 eine vollständige Ereignisdisjunktion bilden

$$P(T) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{29}{60}$$

$$\Rightarrow P(S_1|T) = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{29}{60}} = \frac{9}{29}$$

$$P(S_2|T) = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{29}{60}} = \frac{12}{29}$$

$$P(S_3|T) = \frac{\frac{8}{10} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{29}{60}} = \frac{8}{29}$$

Aufg. 54

Laplace-Experiment: Alle möglichen Verteilungen der k ununterscheidbaren Kugeln auf die n unterscheidbaren Urnen sind gleich wahrscheinlich.

1. Schritt: Anzahl der Möglichkeiten k ununterscheidbare Kugeln auf n unterschiedliche unterscheidbare Urnen zu verteilen

→ Skript: Seite ~~105~~ ¹⁰⁴ ~~105~~ ^{104/105} ~~$\binom{n+k-1}{k}$~~ Möglichkeiten

2. Schritt: Wie viele Möglichkeiten gibt es die Kugeln so zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt?

Idee: Wir legen zunächst je eine Kugel in jede Urne.

→ $(k-n)$ Kugeln bleiben übrig

→ Wir müssen $(k-n)$ Kugeln auf n Urnen verteilen

→ $\binom{n+(k-n)-1}{(k-n)}$ Möglichkeiten

~~$\binom{n+k-1}{k}$~~ $= \binom{k-1}{k-n} \Rightarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p = \frac{\binom{k-1}{k-n}}{\binom{n+k-1}{k}}$$

Aufgabe 55

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ idealer Würfel $\rightarrow$ Laplace-Experiment

$$P(\omega) = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad X(1)=1, X(2)=2, \dots, X(6)=6$$

$$E(X) = \sum_{\omega_i \in \Omega} \underbrace{X(\omega_i) \cdot P(\omega_i)}_{= \frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \left(\sum_{\omega_i \in \Omega} X(\omega_i) \right)$$

$$= \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$$

b) Sei X_i die Zufallsvariable, die die Augenzahl des i -ten Würfels beschreibt ($i=1, 2, 3, 4$)

Der Gewinn in beiden Spielen wird durch die folgenden Zufallsvariablen beschrieben:

$$G_1 = 5 \cdot (X_1 + X_2 + X_3) - 50$$

$$G_2 = 3 \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) - 50$$

Berechne $E(G_1)$, $E(G_2)$

$$E(G_1) = E(5(X_1 + X_2 + X_3) - 50) = E(5(X_1 + X_2 + X_3)) - E(50)$$

$$= 5 \cdot \left(\underbrace{E(X_1)}_{= \frac{21}{6}} + \underbrace{E(X_2)}_{= \frac{21}{6}} + \underbrace{E(X_3)}_{= \frac{21}{6}} \right) - \underbrace{E(50)}_{50}$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot \frac{21}{6} - 50 = 7,50 = \frac{5}{2} > 0$$

$$E(G_2) = E(3(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) - 50) = 3(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)) - 50$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot \frac{21}{6} - 50 = -8 < 0$$

Ans. 5f

Wir beschreiben die Elementarereignisse dieses Zufalls-

experiments durch $(n, 2)$ -Matrizen

$$w = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$

wobei $a_i, b_i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i \neq a_j$ und $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$ (*)

$$\Omega = \{w_i \mid w_i \text{ erfüllt } (*)\}$$

z.B. für $n=2$:

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$x=20$ $x=-2$ $x=-2$ $x=20$

Die Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kann nur Werte der Form $x(k) = 10k - (n-k)$ annehmen, wobei k die Anzahl der Übereinstimmungen ist. Dabei kann k Werte zwischen 0 und $n-2$ sowie den Wert n annehmen

Für den Erwartungswert gilt:

$$E(X) = \sum_{w_i \in \Omega} X(w_i) P(w_i)$$

$X(w_i)$ können wir nur bestimmen, wenn wir die Anzahl der Übereinstimmungen innerhalb des Elementarereignisses w_i kennen
→ Problem: Anzahl der Elementarereignisse mit genau k Übereinstimmungen ist (wahrscheinlich) schwierig zu bestimmen.

Idee: Wir fassen die Anzahl der Übereinstimmungen K als Zufallsvariable auf und zerlegen

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$$

wobei K_i Zufallsvariablen sind für die folgendes gilt:

$$K_i(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls Übereinstimmung in Zeile } i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{Es gilt: } E(K_i) = 1 \cdot P(K_i = 1) + 0 \cdot P(K_i = 0) = P(K_i = 1) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow E(K) = E\left(\sum_{i=1}^n K_i\right) = \sum_{i=1}^n E(K_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$E(X) = E(10K - (n-K)) = E(11K - n) = 11E(K) - E(n) \\ = 11 - n$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = E((11K - n)^2) - (11 - n)^2 \\ &= E(121K^2 - 22Kn + n^2) - (11 - n)^2 \\ &= 121E(K^2) - 22n \underbrace{E(K)}_{=1} + E(n^2) - (11 - n)^2 \\ &= 121E(K^2) - 22n + n^2 - (121 - 22n + n^2) \\ &= 121E(K^2) - 121 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(K^2) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n K_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n K_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n K_i K_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n E(K_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E(K_i K_j) \end{aligned}$$

$$K_i, K_j = \begin{cases} 1 & \text{falls \u00dcbereinstimmung in Zeile i und Zeile j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(K_i, K_j) &= 1 \cdot P(K_i K_j = 1) + 0 \cdot P(K_i K_j = 0) \\ &= P(K_i K_j = 1) \end{aligned}$$

$$\text{falls } i=j: P(K_i^2=1) = P(K_i=1) = \frac{1}{n}$$

$$i \neq j: P(K_i K_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \text{VAR}(X) = 121 \cdot 2 - 121 = 121$$

\"Ubung 14

28.01.09

Aufg. 5f Die Zufallsvariable X ist ~~stetig~~ stetig

("kontinuierliches Roulette") und gleichverteilt ("jeder Winkel ist gleich wahrscheinlich") auf dem Intervall $[0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \text{skript} \\ \Rightarrow f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{falls } x \in [0, 2\pi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ist die Dichte zur gleichverteilten ^{Zufallsvariable} ~~ZRV~~ X .

$\Rightarrow$ Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \frac{x}{2\pi} & \text{falls } x \in [0, 2\pi) \\ 1 & \text{falls } x \geq 2\pi \end{cases}$$

Für den Erwartungswert gilt nach Def. 5.2:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(x) dt = \int_0^{2\pi} t \frac{1}{2\pi} dt = \left[\frac{t^2}{4\pi} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

Mit Satz 5.5 folgt für die Varianz von X :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - \pi^2 = \int_0^{2\pi} t^2 \frac{1}{2\pi} dt - \pi^2 \\ &= \left[\frac{t^3}{6\pi} \right]_0^{2\pi} - \pi^2 = \frac{1}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Aufg. 58 (typische Aufgabe)

a) Mit Lemma 4.1 folgt für die Dichte einer Zufallsvariable X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

wegen Betrag muss nur der Bereich von 0 bis ∞ berechnet werden und mal 2 genommen werden

$$\Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot e^{-p|t|} dt = 2 \cdot \int_0^{\infty} c e^{-pt} dt$$

$$= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b c \cdot e^{-pt} dt = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-c \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^b$$

$$= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(c \frac{1}{p} - c \frac{1}{p} e^{-pb} \right) = 2 c \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{p}{2}$$

b) Nach Definition der Dichte gilt:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(y) dy = \int_{-\infty}^t \frac{p}{2} e^{-p|y|} dy$$

Falls $t \leq 0$:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\rho}{2} e^{+\rho y} dy = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^t \frac{\rho}{2} e^{\rho y} dy$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{\rho y} \right]_a^t = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^{\rho t} - \frac{1}{2} e^{\rho a} \right) = \frac{1}{2} e^{\rho t}$$

Falls $t > 0$:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\rho}{2} e^{-\rho|y|} dy = \int_{-\infty}^0 \frac{\rho}{2} e^{-\rho|y|} dy + \int_0^t \frac{\rho}{2} e^{-\rho|y|} dy$$

$$= \frac{1}{2} e^{\rho \cdot 0} + \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho y} \right]_0^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\rho t} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\rho t}$$

$$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\rho t} & t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\rho t} & t > 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 t \frac{\rho}{2} e^{-\rho|t|} dt}_I + \underbrace{\int_0^{\infty} t \frac{\rho}{2} e^{-\rho|t|} dt}_{II}$$

$$I = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 t \frac{\rho}{2} e^{\rho t} dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\left[t \frac{1}{2} e^{\rho t} \right]_a^0 - \int_a^0 \frac{1}{2} e^{\rho t} dt \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-a \frac{1}{2} e^{\rho a} - \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} e^{\rho t} \right]_a^0 \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-a \frac{1}{2} e^{\rho a} - \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\rho} e^{\rho a} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\rho}$$

Analog folgt: $II = \frac{1}{2\rho} \Rightarrow E(X) = -\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2\rho} = 0$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{\rho}{2} e^{-\rho|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} t^2 \frac{\rho}{2} e^{-\rho t} dt$$

$\therefore$ 2x partielle Integration + Grenzübergang analog zu oben

$$= \frac{2}{\rho^2}$$

Aufg. 59

a) Binomialverteilung: n -fache Wiederholung eines Bernoulli-Experiments (d.h. genau 2 Elementarereignisse)

1 $\hat{=}$ "Person ist Alkoholiker"

0 $\hat{=}$ " " " nicht " "

$$p = P(\{1\}) = 0,02 \quad q = P(\{0\}) = 0,98$$

Sei X die Zufallsvariable, die angibt wie oft bei n Experimenten das Ergebnis 1 auftritt.

Dann gilt: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

hier: $n = 100$

gesucht: $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$
 $= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = \dots = 0,323314$

b) Poissonverteilung: ^{nn.} Grenzwert der Binomialverteilung für $n \rightarrow \infty$

Für X und p wie oben und $\lambda = n \cdot p$ gilt:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \lambda = 100 \cdot 0,02 = 2$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) = 1 - e^{-2} (1 + 2 + 2) = 1 - 5e^{-2} \\ &= 0,323324 \end{aligned}$$

Aufg. 60

Tschebyschevsche Ungleichung: Für eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert $E(X) = \mu$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2$ gilt:

$$P(\{ \omega \in \Omega; |X(\omega) - \mu| \geq a \}) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

für $a > 0$. hier: X folgt der Poissonverteilung mit Parameter λ
 $E(X) = \lambda$ und $\text{Var}(X) = \lambda$ (skript)

Es gilt: $|X(\omega) - \mu| \geq a$

$$\Leftrightarrow X(\omega) - \mu \geq a \quad \text{oder} \quad X(\omega) - \mu \leq -a$$

μ durch λ
ersetzen, da $E(X) = \lambda$

$$\Leftrightarrow X(\omega) \geq \lambda + a \quad \text{oder} \quad X(\omega) \leq \lambda - a$$

Für $a = \frac{\lambda}{2} > 0$ folgt:

$$\Leftrightarrow X(\omega) \geq \frac{3}{2}\lambda \quad \text{oder} \quad X(\omega) \leq \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \omega \in \Omega; |X(\omega) - \lambda| \geq \frac{\lambda}{2} \right\} = \left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \geq \frac{3}{2}\lambda \right\} \cup \left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \leq \frac{\lambda}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow P\left(\left\{ \omega \in \Omega; |X(\omega) - \lambda| \geq \frac{\lambda}{2} \right\}\right)$$

$$= P\left(\left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \geq \frac{3}{2}\lambda \right\}\right) + P\left(\left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \leq \frac{\lambda}{2} \right\}\right)$$

$$\stackrel{\geq 0}{\geq} P\left(\left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \leq \frac{\lambda}{2} \right\}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{a^2} = \frac{\lambda^2}{\frac{\lambda^2}{4}} = \frac{4}{\lambda} \geq P\left(\left\{ \omega \in \Omega; |X(\omega) - \lambda| \geq \frac{\lambda}{2} \right\}\right) \geq P\left(\left\{ \omega \in \Omega; X(\omega) \leq \frac{\lambda}{2} \right\}\right)$$

Aufg. 61

$\Rightarrow$

X_i sei die Zufallsvariable, die die Lebensdauer des i -ten Maschinenteils beschreibt. Wir nehmen an, dass die X_i unabhängige Zufallsvariablen sind.

$$E(X_i) = 50 = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i) = 900 = \sigma^2 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

Die Summenvariable $L_k(\omega) = \sum_{i=1}^k X_i(\omega)$ beschreibt die Lebensdauer für k Maschinenteile.

Gesucht ist $k \in \mathbb{N}$, sodass $P(L_k \geq 5000) = 0,95$

Wir werden k nicht exakt berechnen können, da wir die Verteilungsfunktion der X_i nicht kennen.

Wir können k mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise berechnen.

Wir benötigen die standardisierte Zufallsvariable

$$L_k^* := \frac{L_k - E(L_k)}{\sqrt{\text{Var}(L_k)}}$$

$$\text{Es gilt: } E(L_k) = \sum_{i=1}^k E(X_i) = k\mu$$

Da die X_i als unabh. vorausgesetzt werden kann, gilt:

$$\text{Var}(L_k) = \sum_{i=1}^k \text{Var}(X_i) = k\sigma^2 \quad (\text{nach Satz 6.4})$$

$$L_k^* = \frac{L_k - k\mu}{\sqrt{k}\sigma}$$

Unter diesen Vorausss. liefert der zentrale Grenzwertsatz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(L_k^* \leq t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Für große k gilt

$$P(L_k^* \leq t) \approx \Phi(t) \Leftrightarrow P(L_k^* \geq t) \approx 1 - \Phi(t)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{L_k - k\mu}{\sqrt{k}\sigma} \geq t\right) = P(L_k \geq k\mu + t\sqrt{k}\sigma) = 1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$$

$\rightarrow$ Wähle t so, dass $\Phi(-t) = 0,95$

$$\text{Tabelle} \Rightarrow -t \approx 1,65 \Leftrightarrow t = -1,65$$

$$P(L_k \geq k\mu - 1,65\sqrt{k}\sigma) = 0,95$$

$$\text{Bestimme nun } k \text{ so, dass } k\mu - 1,65\sqrt{k}\sigma = 5000$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert $k = 111$

Übung 15

04.02.09

Aufg. 62

Die Zufallsvariable X ist stetig und folgt der Gleichverteilung auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \text{Die Dichtefunktion ist } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{falls } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{falls, } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Betrachte $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $Y := \tan(X)$

Wir bestimmen die Verteilungsfunktion von Y :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &:= P(\{\omega; Y(\omega) \in x\}) = P(\{\omega; \tan(X(\omega)) \leq x\}) \\ &= P(\{\omega; X(\omega) \leq \arctan(x)\}) \\ &= F_X(\arctan(x)) \\ &= \begin{cases} 0 & \arctan(x) \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} (\arctan(x) + \frac{\pi}{2}) & \text{falls } -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \arctan(x) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

F_Y ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Übung Blatt 15 Themenschwerpunkt: Problemfall-Aufgaben

Aufg. 63

Prüfe ob die Vor. von Satz XI, 1.6. erfüllt sind:

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergiert punktweise auf $(2, \infty)$, da
 $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^2}$ für $x > 2$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert

folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ mit dem
Majorantenkriterium. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$
insbesondere punktweise.

• $f_n: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) := \frac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{\log(n^{-x})} = e^{-x \log(n)}$ ist auf

$(2, \infty)$ stetig diffbar $f'_n(x) = -(\log(n)) \frac{1}{n^x}$

• Wir müssen zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ glm. auf $(2, \infty)$ konvergiert.

Dazu brauchen wir die Abschätzung ~~$\log(y) < y^{\frac{1}{n}}$~~

(*) $\log(y) < y^{\frac{1}{n}}$ für $y > (4k^2)^k$ für $k \in \mathbb{N}$

[Beweis: $e^z > e^k \quad \forall z > 4k^2$ (Satz II, 3.17)]

Für $z = y^{\frac{1}{k}}$ folgt:

$e^{y^{\frac{1}{k}}} > (y^{\frac{1}{k}})^k = y \quad \text{für } y^{\frac{1}{k}} > 4k^2$

$\Rightarrow \log(e^{y^{\frac{1}{k}}}) > \log(y) \quad \text{für } y > (4k^2)^k$

$\Leftrightarrow y^{\frac{1}{k}} > \log(y) \quad \text{für } y > (4k^2)^k$

Für $y = n$ folgt mit (*):

$|f'_n(x)| = \left| -\frac{\log(n)}{n^x} \right| < \frac{n^{\frac{1}{k}}}{n^x} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Für $k=2$ folgt: $|f'_n(x)| < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert (da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$, s.Bsp NA I)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ konvergiert glm. auf $(2, \infty)$ (mit Majorantenkriter.)

Die Vorr. von Satz 1.6 sind erfüllt $\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

Die Aussage über die Ableitungen höherer Ordnung zeigen wir mit vollst. Induktion:

IS: $i=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ erfüllt die Vor. von Satz 1.6 und damit ist f stetig diffbar

I.V.: Es gebe ein $i \in \mathbb{N}$ sodass $f^{(i-1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i-1)}(x)$ die Vor. von Satz 1.6. erfüllt. Damit folgt, dass $f^{(i-1)}$ stetig diffbar ist und dass $(f^{(i-1)}(x))' = f^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)}(x)$ gilt.

IS: $i \rightarrow i+1$
 • Wir wissen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)}(x)$ glm. konvergiert

• $f_n^{(i)}(x) = (-1)^i (\log(n))^i \frac{1}{n^x}$ ist stetig differenzierbar

$$f_n^{(i+1)}(x) = (-1)^{i+1} (\log(n))^{i+1} \frac{1}{n^x}$$

• Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i+1)}(x)$ glm. konvergiert

Mit (*) folgt:

$$|f_n^{(i+1)}(x)| = \frac{(\log(n))^{i+1}}{n^x} < \frac{\left(n^{\frac{1}{k}}\right)^{i+1}}{n^x} < \frac{n^{\frac{i+1}{k}}}{n^2} = \frac{1}{n^{2 - \frac{i+1}{k}}}$$

Für $k=2(i+1)$ folgt: $|f_n^{(i+1)}(x)| < \frac{1}{n^{3/2}}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i+1)}$ konvergiert glm. (Majorantenkrit.)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)}$ erfüllt die Vor. von Satz 1.6.

$\Rightarrow f^{(i)}$ ist stetig diffbar und es gilt

$$(f^{(i)}(x))' = f^{(i+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i+1)}(x)$$

□

Aufg. 64

a) Sei $\tilde{r}$ definiert durch $\tilde{r}(t) := (\cos(t), \sin(t))$

für $t \in [0, 2\pi)$ die Einheitskreislinie

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} \frac{\alpha x - \beta y}{x^2 + y^2} dx + \frac{\alpha y + \beta x}{x^2 + y^2} dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)}{1} (-\sin(t)) + \frac{\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)}{1} \cos(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \beta \sin^2(t) + \beta \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \beta dt = 2\pi\beta$$

Da $\tilde{\Gamma}$ geschlossen ist, kann das Kurvenintegral für $\beta \neq 0$ nicht wegunabhängig sein.

Sei ~~also~~ im Folgenden $\beta = 0$, d.h. wir betrachten

$$\int_{\Gamma} \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} dx + \frac{\alpha y}{x^2 + y^2} dy$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ 2. Hauptsatz über Kurvenintegrale nicht anwendbar.

$\Rightarrow$ Wir versuchen den 1. Hauptsatz anzuwenden und suchen eine Potentialfunktion

$$\text{Betrachte: } h(x, y) := \alpha \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

h ist in $\mathbb{R}^2$ stetig diffbar und es gilt:

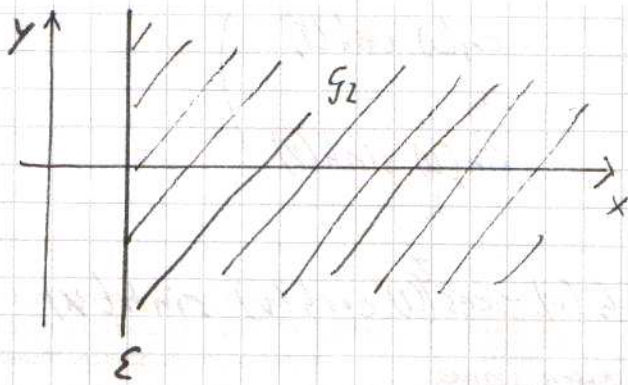
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\alpha y}{x^2 + y^2}$$

$$(1. \text{ Hauptsatz}) \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} dx + \frac{\alpha y}{x^2 + y^2} dy \text{ ist in } \mathbb{R}^2 \text{ vom}$$

Weg unabhängig

Insgesamt: Das Kurvenintegral ist genau dann vom Weg unabhängig wenn $\beta = 0$

$$b) \mathbb{R}_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \varepsilon > 0\}$$



Die Einheitskreislösung
liegt nicht in f_2 .

Aber: f_2 ist einfach zusammenhängend

→ 2. Hauptsatz

Wir müssen zeigen, dass für $A(x,y) := \frac{\alpha x - \beta y}{x^2 + y^2}$ und

$$B(x,y) := \frac{\alpha y + \beta x}{x^2 + y^2} \quad \text{gilt:} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

A, B sind auf $\bar{f}_2$ stetig (wäre für $\epsilon = 0$ falsch, da dann $(0,0) \in \bar{f}_2$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) &= \frac{-\beta(x^2+y^2) - 2y(\alpha x - \beta y)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) &= \frac{\alpha(x^2+y^2) - 2x(\alpha y + \beta x)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \right\} \text{stetig auf } \bar{f}_2$$

Werner gilt:

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} (-\beta x^2 - \beta y^2 - 2\alpha xy + 2\beta y^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} (-\beta x^2 + \beta y^2 - 2\alpha xy)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} (\beta x^2 + \beta y^2 - 2\alpha xy - 2\beta x^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} (-\beta x^2 + \beta y^2 - 2\alpha xy)$$

⇒ Das Kurvenintegral ist in f_2 wegunabhängig

Aufg. 65

Die Fläche ist in Parameterdarstellung gegeben (vgl. Def. 5.1.)

Prüfe ob die Fläche regulär ist, d.h. ob

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial u} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial w} \right|^2 > 0 \quad \text{gilt.}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial u} = \text{def} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\sin(u) \cosh(v) & \cos(u) \cosh(v) \\ \cos(u) \sinh(v) & \sin(u) \sinh(v) \end{pmatrix}$$

$$= -\sin^2(u) \cosh(v) \sinh(v) - \cos^2(u) \cosh(v) \sinh(v)$$

$$= (-1) (\sin^2(u) + \cos^2(u)) \cosh(v) \sinh(v)$$

$$= - \underbrace{\cosh(v)}_{>0} \underbrace{\sinh(v)}_{=0 \Leftrightarrow v=0}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0 \Leftrightarrow v=0$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \dots = \underbrace{-\sin(u)}_{=0 \Leftrightarrow u=\pi} \underbrace{\cosh(v)}_{>0}$$

Die Fläche ist regulär.

Nach Satz 5.2 gilt: $A(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$

Wobei $\Sigma = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial u}(u,v) = (-\sin(u) \cosh(v), \cos(u) \cosh(v), 0)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial v}(u,v) = (\cos(u) \sinh(v), \sin(u) \sinh(v), 1)$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v}(u,v) = (\cos(u) \cosh(v) \cdot 1 - 0, 0 - (-1) \sin(u) \cosh(v), (-1) \sin(u) \cosh(v) \cdot \sin(u) \sinh(v) - \cos(u) \cosh(v) \cos(u) \sinh(v))$$

$$= (\cos(u) \cosh(v), \sin(u) \cosh(v), (-1) \underbrace{(\sin^2(u) + \cos^2(u))}_{=1} \cosh(v) \sinh(v))$$

$$\left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} \wedge \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} \right\| = \sqrt{\cos^2(u) \cosh^2(v) + \sin^2(u) \cosh^2(v) + \cosh^2(v) \sinh^2(v)}$$

$$= \sqrt{\underbrace{(\sin^2(u) + \cos^2(u))}_{=1} \cosh^2(v) + \cosh^2(v) \sinh^2(v)}$$

$$= \sqrt{\cosh^2(u) \underbrace{(1 + \sinh^2(u))}_{= \cosh^2(u)}} = \sqrt{\cosh^4(u)} = \cosh^2(u)$$

$$\Rightarrow A(\mathbb{F}) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \cosh^2(u) \, du \, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 \cosh^2(u) \, du$$

$$= 2\pi (1 + \sinh(1) \cosh(1))$$