

Aufgabe 1

Man beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion

(7)

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Es ist } \left(\frac{n}{3}\right)^n \Big|_{n=1} = \frac{1}{3} < 1 = n! \Big|_{n=1} \quad (1)$$

$M \subset \mathbb{N}$ sei die Menge, für die Beh. gilt. $\Rightarrow 1 \in M$.

Sei $n \in M$. (1) Dann gilt

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{n+1}{3} \quad (1)$$

$$< \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot n! \cdot \frac{n+1}{3} \text{ nach Annahme} \quad (1)$$

$$= (n+1)! \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1)$$

$$< \frac{e}{3} (n+1)! \quad , \text{ da } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$< (n+1)! \quad , \text{ da } e = 2,7... < 3$$

$$\Rightarrow n+1 \in M \quad (1)$$

Aufgabe 2

Man bestimme die Punktmenge $M \subset \mathbb{C}$, die durch die Ungleichung

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) < \frac{1}{2}$$

beschrieben wird, und skizziere sie.

(5)

Es ist für $z \neq 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})} \quad (1)$$

$$= \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} \quad (1)$$

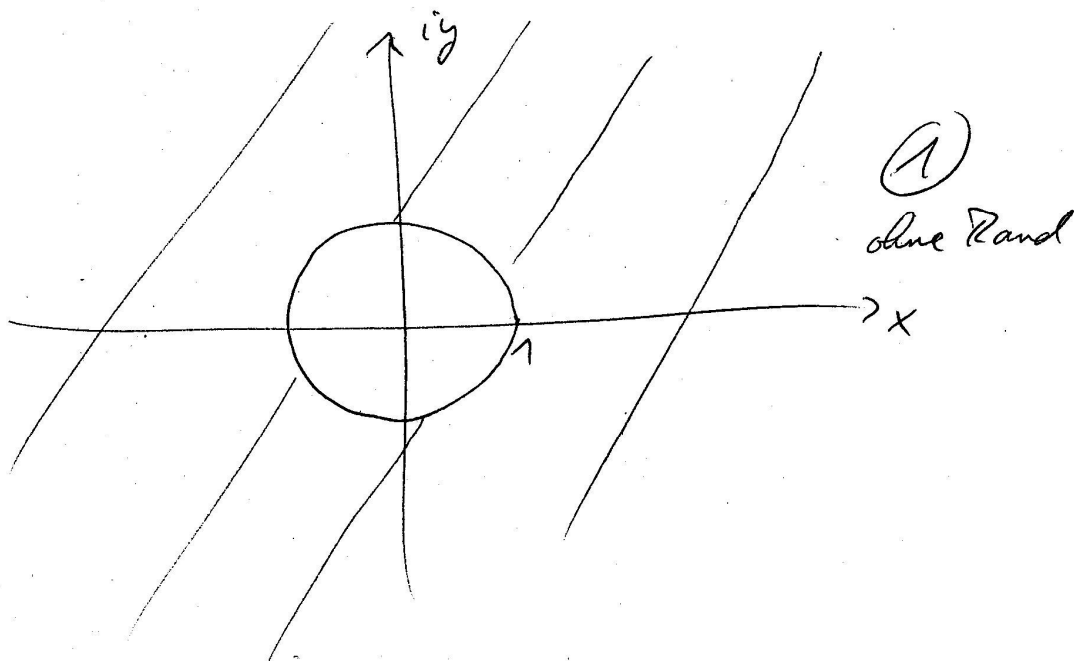
$$\Rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} < \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} < \frac{1}{2}, \quad z \neq 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2(1-x) < (1-x)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2-2x < 1-2x+x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow 1 < x^2 + y^2 \quad (1)$$

$$\text{d.h. } M = \{ z = x+iy \mid 1 < x^2 + y^2 \}$$



Aufgabe 3

Man untersuche, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n(\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 1}) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert hat, und berechne diesen ggf.

(5)

Es ist

$$a_n = n \cdot \frac{n^3 + 2n - (n^3 + 1)}{(\sqrt[3]{n^3 + 2n})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 2n} \sqrt[3]{n^3 + 1} + (\sqrt[3]{n^3 + 1})^2} \quad (2)$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{n}}{(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2}})^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} + (\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}})^2} \quad (2)$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (1)$$

Aufgabe 4

Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 > 1 \text{ und } a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 1 \text{ f\"ur } n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert hat, und berechne diesen.

Hinweis: Banach'sches Kontraktionskriterium

(11)

Angenommen, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ existiere.

$$\Rightarrow x = \frac{1}{x} - 1, x \neq 0, \text{ d.h. } x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \quad (1)$$

Es gilt:

$$a_1 > 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{a_1} - 1 < 1 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 1 < 0 \text{ f\"ur } n \geq 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 1 < -1 \text{ f\"ur } n \geq 2 \quad (1)$$

Ferner ist

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right| = \left| \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} a_n} \right| \quad (1)$$

$$= \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) a_n} \right| = \frac{1}{|1 - a_n|} |a_{n+1} - a_n| \quad (2)$$

$$= \frac{1}{1 - a_n} |a_{n+1} - a_n| \text{ f\"ur } n \geq 2 \quad (1)$$

$$\leq \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n| \text{ f\"ur } n \geq 3 \quad (2)$$

$$\underbrace{\quad}_{=q < 1}$$

Banach'sches Kontraktionskriterium

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \quad (1)$$

Aufgabe 5

Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^{(n^2)}$$

für $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz oder Divergenz.

(8)

MIT $a_n(x) = \frac{1}{n} x^{(n^2)}$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{(n+1)^2}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{|x|^{(n^2)}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n |x|^{2n+1} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |x| > 1: \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| &= \frac{1}{(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} |x|^{2n+1} \\ &\geq \frac{1}{e} \frac{|x|^{2n+1}}{n+1}, \quad \text{da } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow e, n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2)$$

$\rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ wegen $|x| > 1$ (1)

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ Reihe divergiert für $|x| > 1$ (1)

$$\begin{aligned} |x| \leq 1: \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| &= \frac{1}{(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} |x|^{2n+1} \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1) \cdot 2} \quad (1) \\ &\quad \text{da } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow e \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{4} \quad \text{für } n \geq 1 \text{ wegen } |x| \leq 1 \quad (1)$$

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $|x| \leq 1$ (1)

oder Es ist $\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^{(n^2)}}{n^n}} = \frac{1}{n} |x|^n \quad (2)$

$$|x| > 1: \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{1}{n} |x|^n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

Wurzelkriterium $\Rightarrow$ Reihe divergiert für $|x| > 1$ (1)

$$\begin{aligned} |x| \leq 1: \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n(x)|} &= \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } n \geq 2 \\ &\quad (1) \quad (\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

Wurzelkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $|x| \leq 1$ (1)

oder E ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{(n^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{für } k=n^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ (1)

mit $\sqrt[n^2]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (1)

$\rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 1$ (1)

$\Rightarrow R=1$, d.h. Potenzreihe konvergiert für

$|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$ (1)

$x = \pm 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\pm 1)^{(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ (1)

$\leq \frac{1}{2(n+1)}$ (da $(1+\frac{1}{n})^n$ monoton wachsend) (1)

$\leq \frac{1}{4}$ für $n \geq 1$ ($\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $x = \pm 1$ (1)

oder E ist für $x = \pm 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\pm 1)^{(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq 2$ (1)

($\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)

Wurzelkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $x = \pm 1$ (1)

oder Für $x = \pm 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\pm 1)^{(n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 2$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert

Majorantenkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $x = \pm 1$ (1)

oder Mit $a_n(x) = \frac{1}{n^m} x^{(n^2)}$ folgt:

$|x| \leq 1$: Es ist

$$|a_n(x)| = \frac{1}{n^m} |x|^{(n^2)} \leq \frac{1}{n^m} \quad (1)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \text{ für } n \geq 2 \quad (2)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Majorantenkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert
für $|x| \leq 1$ (1)

$|x| > 1$: Es ist

$$|a_n(x)| = \frac{1}{n^m} |x|^{(n^2)} = \frac{|x|^{n \cdot n}}{n^m} \quad (1)$$

$$= \left(\frac{|x|^n}{n} \right)^n \geq 1^n = 1 \text{ für } n \geq n_0 \quad (1)$$

da $\frac{|x|^n}{n} \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$, falls $|x| > 1$ (1)

notwendiges Kriterium $\Rightarrow$ Reihe divergiert für $|x| > 1$ (1)

Aufgabe 6

Man untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$ auf Nullstellen, Polstellen sowie Asymptote und skizziere sie. Man berechne ggf. die Schnittpunkte des Graphen von f mit seiner Asymptote. (8)

$$\text{Es ist } x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x-2)(x+2)$$

$$\text{und } x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = x^2(x-3) - 9(x-3) \\ = (x^2 - 9)(x-3) = (x-3)^2(x+3)$$

$$\text{bzw. } (x^3 - 3x^2 - 9x + 27) : (x-3) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 3x^2) \\ \hline -9x + 27 \\ -(-9x + 27) \\ \hline 0 \end{array} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{x^2(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x+3)} \quad (1)$$

Nullstellen

$$x_1 = 0 \quad 2. \text{ Ordnung} \quad \text{kein VW}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\} 1. \text{ Ordnung} \quad \text{d.h. VW}$$

Polstellen

$$x_4 = -3 \quad 1. \text{ Ordnung} \quad \text{d.h. VW}$$

$$x_5 = 3 \quad 2. \text{ Ordnung} \quad \text{kein VW}$$

(1)

(1)

Asymptote

$$(x^4 - 4x^2) : (x^3 - 3x^2 - 9x + 27) = x + 3 + \frac{14x^2 - 81}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} \quad (1)$$

$$-(x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 27x)$$

$$3x^3 + 5x^2 - 27x$$

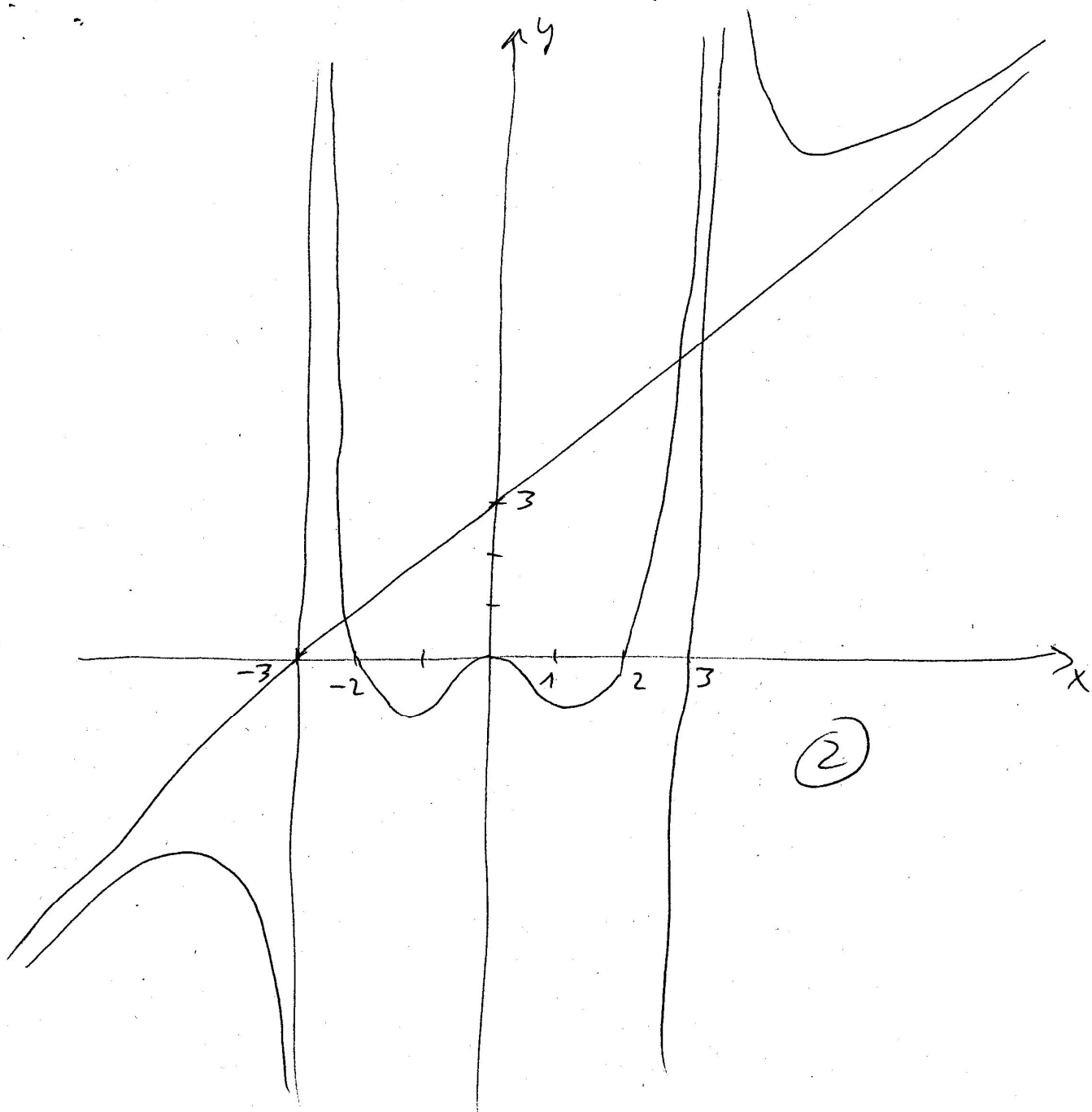
$$-(3x^3 - 9x^2 - 27x + 81)$$

$$14x^2 - 81$$

$$\Rightarrow g(x) = x + 3 \text{ ist Asymptote f\"ur } x \rightarrow \pm \infty \quad (1)$$

Schnittpunkte mit der Asymptote

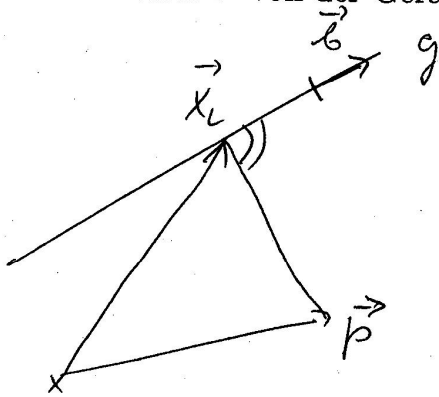
$$14x^2 - 81 = 0, \text{ d.h. } x_{6,7} = \pm \sqrt{\frac{81}{14}} \quad (1)$$



Aufgabe 7

Man bestimme den Lotfußpunkt des Punktes $P : \vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

bzgl. der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, und den Abstand des Punktes P von der Geraden g . (6)



Bedingung für Lotfußpunkt:

$$\langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{b} \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 0 = (6 + 3t) \cdot 3 - (5 - t) + (-2 + t) = 11 + 11t$$

$$\Rightarrow t = -1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{Lotfußpunkt } \vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Abstand P von g :

$$|\vec{x}(-1) - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \quad (1)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{54} \quad (1)$$
$$= 3\sqrt{6}$$