Vorlesungsmitschrift

von David Hebbeker

Vorkurs Physik

für alle Fakultäten im Studienjahr 2007/2008

<u>Dozenten</u>:

Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Achim **Stahl**

Dr.rer.nat. Oliver **Pooth**

Dr.rer.nat. Thomas **Kreß**

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur Mitschrift vom Physik Vorkurs

Dies ist kein offizielles Skript des Lehrstuhls sondern eine von einem Studenten erstellte Mitschrift der Vorlesung.

Die Mitschrift beinhaltet nur die Teile der Vorlesung, die von den Professoren nicht als Skript zur Verfügung gestellt wurden. Diese Mitschrift hat nicht den Anspruch auf Vollständigkeit und ist kein Ersatz sondern eine Ergänzung zur Vorlesung!

Für die Richtigkeit übernehme ich keine Gewähr.

Solltet Ihr Ergänzungen/Erläuterungen zum Skript haben oder Fehler vorhanden sein, so bin ich per Mail zu erreichen.

Erstellt wurde diese Mitschrift von David Hebbeker. Der Teil von Kapitel III. 6 a. bis Kapitel IV wurde von Manon Wieschermann abgetippt. Er wurde nur leicht modifiziert um vom Aussehen zu passen.

Adresse für Fehlerberichtigungen: David.Hebbeker@rwth-aachen.de

Die Vorlesungsinhalte wurden von folgenden Dozenten vorgetragen:

- Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Achim Stahl
- Dr.rer.nat. Oliver Pooth

Die Angekündigten Themen sind:

- Grundrechnung (Montag)
- Komplexe Zahlen (Dienstag)
- Funktionen, Logarithmen (Donnerstag)
- Gleichungen lösen (Freitag)
- Geometrie (Samstag)
- Differenzialrechnung (Montag)
- Integralrechnung (Dienstag)
- mehrdimensionale Integral (Mittwoch, Donnerstag)
- Statistik (Freitag)

I Arithmetik

I. 1 Buchstabenrechnen

Buchstabe: Platzhalter für eine Zahl.

Beispiele

$x^2 > 0$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\mathrm{ab}$

wenn $u > v > 0$, dann $(u+v)(u-v) > 0$

$F = m \cdot a \quad a = x \cdot b$

$A = \frac{1}{2} g \cdot h$

> *Eigener Kommentar:*
>
> *In der Physik werden manche Buchstaben werden mehrfach belegt.*

Zahl erst am Ende einsetztten:

– Rechnungen werden übersichtlicher

– In der Physik interessiert der Zusammenhang nicht nur das Resultat

Beispiel

Ein PKW bremst aus $v_0 = 30 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ mit einer Verzögerung von $5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Bremsweg?

$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

$v = a_0 \cdot t + v_0$

Bremszeit $v = a_0 \cdot t + v_0 = 0 \Leftrightarrow - v_0 = a \cdot t \Leftrightarrow t = -\frac{v_0}{a_0}$

$$s = \frac{1}{2} a_0 \cdot \left(\frac{-v_0}{a_0} \right)^2 + v_0 \cdot \left(\frac{-v_0}{a_0} \right) = \frac{1}{2} a_0 \frac{v_0^2}{a_0^2} - \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_0} - \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{-1}{2} \frac{v_0^2}{a_0} = 90\,\mathrm{m}$$

I. 2 Klammern

Klammern bestimmen die Reihenfolge in der die Rechnung durchgeführt wird.

Beispiel

$2 + 3 \cdot 5 \neq (2+3) \cdot 5$

und weitere Beispiele...

$\vec{F}_{el} = q \cdot (\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}))$ Lorenz-Kraft

Die zweite Klammer ist nicht nötig, sondern dient der optischen Gliederung.

I. 3 Bruchrechnung

Bruchstrich entspricht einer Division.

Beispiele

$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \frac{1}{100} = 0{,}01$

> *Einschub:*
>
> *Im Deutschen:* $R_{\bullet}\, 6.378{,}140\,\mathrm{km}$
>
> *International:* $R_{\bullet}\, 6{,}378.140\,\mathrm{km}$

Kürzen:

$$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Lorenzkraft: $F_L=q\cdot v\cdot B=\frac{1}{2}m\frac{v^2}{r}=F_Z\Rightarrow r=\frac{1}{2}\frac{m v^2}{q\cdot v\cdot B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q\cdot B}$

gemeinsame Nenner:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Beispiel in der Relativitäts-Theorie

Ruhemasse: m_0

bewegte Masse: m

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Energiesätze $E^2=m_0^2c^4+p^2c^2$ (ersetzt $E=\frac{1}{2\cdot m}p^2=\frac{1}{2}m v^2$)

$$E^2=m_0^2c^4+m^2v^2c^2=m_0^2c^4+\frac{m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=m_0^2c^4+\frac{m_0^2v^2c^2}{\frac{1}{c^2}(c^2-v^2)}=m_0^2\frac{c^4}{1}+\frac{m_0^2v^2c^4}{c^2-v^2}$$

$$\ldots=\frac{m_0^2c^4(c^2-v^2)}{c^2-v^2}+\frac{m_0^2v^2c^4}{c^2-v^2}=\frac{m_0^2c^4}{\frac{1}{c^2}(c^2-v^2)}=\frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}=m^2c^4\Leftrightarrow E=mc^2$$

Erweitern

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

addieren

$$\frac{4}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{16}{12}+\frac{6}{12}-\frac{10}{12}=\frac{12}{12}=1$$

multiplizieren

$$\frac{4\mathrm{a}}{b}\cdot\frac{3\mathrm{c}}{b}=\frac{4\mathrm{a}\cdot3\mathrm{c}}{b\cdot b}=\frac{12\mathrm{ac}}{b^2}$$

dividieren

$$\frac{4\mathrm{a}}{b}:\frac{3\mathrm{c}}{2\mathrm{b}}=\frac{4\mathrm{a}\cdot2\mathrm{b}}{b\cdot3\mathrm{c}}=\frac{8\mathrm{a}}{3\mathrm{c}}$$

weitere Beispiele...

I. 4 Rechengesetze

Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz.

Einige Beispiele...

I. 5 Potenzen- und Wurzelrechnung

Potenzen $\underset{\text{Basis}}{a}^{\overset{\text{Exponent}}{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$

Beispiele

$5^2 = 25$

$a^0 = 1$ für $a \neq 0$ (Konvention!)

$(a+b)^3 = (a-b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3\mathrm{a}^{2\mathrm{b}} + 3\mathrm{ab}^2 + b^3$

negative Exponenten

$a - n = \frac{1}{a^n}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Weitere Beispiele...

$p \cdot a^n = p(a^n)$

$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Kommentar:

Die Klammern kann man auch weglassen im Fall $a^{(m+n)}$.

Beispiele

- 1 Atom hat die Größe $10^{-10}\,\mathrm{m}$.
- Atomkern $\frac{1}{10000}$ des Atoms
- Radius eine Protons ist $\frac{1}{10}$ des Kernradius

Frage: Wie groß ist das Proton?

$10^{-10}\,\mathrm{m} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-1} = 10^{-10-4-1}\,\mathrm{m} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$

Kommentar:

Symbole ersetzen Potenzen. Zum Beispiel: kilo 10^3 *, Milli für* 10^{-3}

Zahlensysteme

Beispiel

10110 → Dezimalsystem

$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 4 + 2 = 22$

Beispiel

Kraft zwischen zwei Protonen: $F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\Rightarrow\frac{1}{4\cdot 3\cdot 10\cdot 10^{-12}}\cdot\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2}\approx\frac{1}{10^2\cdot 10^{-12}}\cdot\frac{2\cdot 10^{-38}}{10^{-30}}$

$$\ldots\approx 2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{12}\cdot 10^{-38}\cdot 10^{30}\,\mathrm{N}=2\cdot 10^2\,\mathrm{N}=200\mathrm{N}$$

Beispiel

$4\mathrm{Mio}\ \mathrm{m}^3<1\,\mathrm{km}^3$?

$$4\cdot 10^6\,\mathrm{m}^3=4\cdot 10^6(10^{-3}\,\mathrm{km})^3=4\cdot 10^6(10^{-3})^2\,\mathrm{km}^3=4\cdot 10^6\cdot 10^{-9}\,\mathrm{km}^3=4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{km}^3<1\,\mathrm{km}^3$$

Wurzeln

$\overset{\text{Exponent}}{\sqrt[n]{\underset{\text{Radiant}}{a}}}\quad a\geq 0$!

$x=\sqrt[n]{a}\Leftrightarrow x^n=a$

Beispiel

$\sqrt{2}=1{,}41\ldots$

$\sqrt{3}=1{,}7\ldots$

$\sqrt{17}\approx 4{,}1$

$4{,}1^2\approx 16{,}81$

$4{,}2^2\approx 17{,}64$

<u>Schreibweise</u>

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{0{,}5}$

<u>Rechenregeln wie bei Potenzen</u>

$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a}$?

$\ldots=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{a^7}$

$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a\cdot b}$

Und weitere Beispiele...

Beispiel

Wasserspeicher in 2m Höhe. Es soll mindestens $1\frac{l}{s}$ fließen. Hagen – Poisseuille: $\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\pi r^4}{\eta}\cdot\frac{\Delta p}{l}$

$\Delta p=2\cdot 10^{-4}\,Pa$

$\eta=1\cdot 10^{-3}\,Pa\,s\,(bei\,20\,°C)$

$$r^4=\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{\eta}{\pi}\cdot\frac{l}{\Delta p}\Rightarrow r=\sqrt[4]{\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{\eta}{\pi}\cdot\frac{l}{\Delta p}}=\sqrt[4]{4\cdot 10^{-3}\,m^4}\approx 0{,}25\,m$$

I. 6 Logarithmen und Potenzen

$\log_{\underset{Basis}{a}}\overset{Numerus}{b}\quad \log_a b=x\Leftrightarrow a^x=b$

Beispiel

$\log_3 81=4$ denn $3^4=81$

$\log_4 16=2$ denn $4^2=16$

Schreibweisen

$\log_{10} b=\lg 10$

$\log_e b=\ln b$

$\log_2 b=\operatorname{ld} b$

Rechenregeln

$\log_a(p\cdot q)=\log_a p+\log_a q$

$\log_a \frac{p}{q}=\log_a p-\log_a q$

$\log_a p^r=r\cdot\log_a p$

$\log_a(p+q)$ geht nicht zu vereinfachen

Umrechnung von Logarithmen

$$a^x=u\Leftrightarrow a^{\log_a u}=u\Leftrightarrow \log_c\left(a^{\log_a u}\right)=\log_c u\Leftrightarrow \log_a u\cdot\log_c a=\log_c u\Leftrightarrow \log_a u=\frac{\log_c u}{\log_c a}$$

Beispiel

$\ln 10=\frac{\lg 10}{\lg e}=2{,}30\ldots$

Beispiel: Glühemission

Am Glühwedel wird eine Spannung angelegt. Die Elektronen werden durch ein E-Feld durch das Loch in der Anode beschleunigt. Dabei entsteht ein e^--trahl.

Es soll die Temperatur zum Lösen der Elektronen aus dem Glühwedel an Hand verschiedener Faktoren berechnet werden. Hier nicht weiter ausgeführt...

Beispiel

Lebensdauer des Müons

Elementarteilchenphysik $\mathrm{N}(t)=N_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Kernphysik $\mathrm{N}(t)=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$

gemessen: $\tau=2{,}19703\cdot 10^{-6}s$

Was ist $t_{\frac{1}{2}}$?

$N_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}=N_o\cdot 2^{-\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$ Rechnung nicht fortgesetzt...

I. 7 Beträge

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$|-5|=5$$

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

$$|a^n|=|a|^n$$

I. 8 Vektoren

$$\vec{a}=(a_{1,}a_{2,}\ldots,a_n)$$

Beispiel

Ortsvektor $\vec{r}=(x,y,z)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_{1,}a_2+b_{2,}\ldots,a_n+b_n)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_{1,}a_2-b_{2,}\ldots,a_n-b_n)$$

$$c\cdot\vec{a}=(a_1\cdot c,a_2\cdot c,\ldots,a_n\cdot c)$$

Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n$$

Länge eines Vektors

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(6+2-0)=8$$

Winkel zweier Vektoren

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{v}_{1,}\vec{v}_2)$$

$$8=\sqrt{10}\cdot\sqrt{9}\cdot\cos\sphericalangle(\vec{v}_{1,}\vec{v}_2)$$

$$\frac{8}{\sqrt{90}}=\cos\sphericalangle(\vec{v}_{1,}\vec{v}_2)$$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

II. Komplexe Zahlen

II. 1 Wiederholung: Zahlen

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen $1,2,3,4,\ldots$

$\mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen + Null

$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen $\pm 2, \pm 1, 0, \ldots$

$\mathbb{Z} \geq 0, \mathbb{Z} \leq 0$ ganze Zahlen positiv, negativ

$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen: alle Brüche $\frac{1}{2}$, $-713{,}62$, $1{,}\overline{3}$

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen: alle Dezimalzahlen $5{,}23698\ldots$ (endlos viele Nachkommastellen); enthält $\mathbb{Q}$ + zum Beispiel π, e, $\sqrt{2}$

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

II. 2 Die Wurzel negativer Zahlensysteme

bisher: $\sqrt{a}$, $a \geq 0$

$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

aber $\sqrt{-2}$ nicht definiert

lineare Gleichung $ax + b = 0$ hat 1 Lösung zum

Beispiel

$$2\mathrm{x} + 3 = 0 \quad x = \frac{-3}{2}$$

quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ manchmal 2 Lösungen, manchmal keine

Beispiel

$$x^2 - 5\mathrm{x} + 6 = 0 \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3$$

Beispiel

$$x^2 - 4\mathrm{x} + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$ hat keine Lösung

kubische Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ manchmal 3 Lösungen, manchmal 1 Lösung

Beispiel

$$x^3 - 2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6 = 0$$

$$(x-1)(x+2)(x-3) = 0 \; x = 1, -2, 3$$

Beispiel

$$x^3 + 1 = 0$$

hat nur eine Lösung $x = -1$

Gleichung 4. Grades $ax^4 + cx^3 \; bx^2 \, ü \, dx \, ü \, e = 0$ manchmal 4, 2 oder keine Lösung

Definition:

$x^2+1=0$ hat die Lösungen $x=\pm\sqrt{-1} \vee x=\pm i$. i heißt imaginäre Einheitszahl.

offensichtlich $i^2=-1$ denn $i^2+1=0$

II. 3 Rechnen mit komplexen Zahlen

a. Basics

$\sqrt{-4}$?

$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$

allgemein

$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot i$ (für $a\geq 0$)

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$

$\vdots$

b. komplexe Zahlen

Beispiel

$$\underset{\text{Realteil}}{4} + \underset{\text{Imaginärteil}}{2}\ i \quad \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i}_{\text{koplexe Zahl}}$$

allgemein

$\mathbb{C}=\{z=a+b\,i \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

Die komplexen Zahlen (abgekürzt $\mathbb{C}$) sind die Menge aller Zahlen geschrieben als $a+b\,i$ mit der Eigenschaft, dass a,b reelle Zahlen sind.

Realteil $\Re(a+b\,i)=a$

Imaginärteil $\Im(a+b\,i)=b$

Spezialfälle

- $b=0$ $z=a$ reelle Zahl
- $a=0$ $z=b\,i$ imaginäre Zahl

c. Addition und Subtraktion

Addition: $(a+b\,i)+(c+d\,i)=(a+c)+(b+d)\cdot i$

Subtraktion: $(a+b\,i)-(c+d\,i)=(a-c)+(b-d)\cdot i$

Beispiele

- $(2+3i)+(1+4i)=(2+1)+(3+4)\cdot i=3+7\cdot i$

- $(5+2i)+(3+2i)=8+4i$
- $(3+4i)-(1+3i)=2+1$

assoziativ

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

$((2+3i)+(1+4i))+(3+1)=(3+7i)+(3+i)=6+8i$

$(2+3i)+((1+4i)+(3+i))=(2+3i)+(4+5i)=6+8i$

☺

kommutativ

$z_1+z_2=z_2+z_1$

$(4+2i)+(1+5i)=5+7i$

$(1+5i)+(4+2i)=5+7i$

☺

d. Multiplikation

Beispiel

$(4+3i)(5+7i)=4\cdot5+4\cdot7i+3i\cdot5+3i\cdot7i=20+28i+15i+\underbrace{21i^2}_{-21}=-1+43i$

allgemein

$(a+bi)(c+di)=a\cdot c+b\cdot d\,i^2+a\cdot d\cdot i+b\cdot c\cdot i=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$

Beispiel

$(2+i)(3+2i)=(6-2)+(4+3)\cdot i=4+7i$

$(3+2i)(2+5i)=-4+19i$

$(4+7i)\cdot i=-7+4i$

assoziativ

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$

$((1+i)\cdot(3+2i))\cdot(2+2i)=-8+12i$

$(1+i)\cdot((3+2i)\cdot(2+2i))=-8+12i$

☺

kommutativ

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

$(1+i)(3+2i)=1+5i$

$(3+2i)(1+i)=1+5i$

☺

distributiv

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

$(1+i) \cdot [(3+2i)+(2+2i)] = 1+9i$

$(1+i) \cdot (3+2i)+(1+i)(2+2i) = 1+9i$

☺

komplexe Zahlen haben die selben Rechenregeln wie reelle Zahlen bezüglich $+, -, \cdot, :$ ☺

$5z - 3z = 2z$

$(5+0i) \cdot (a+bi)$

$4a \cdot (3+v) - v(1+4a) = 12u + 4av - v - 4uv = 12u - v$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Kommentar:

Ist richtig wenn $z, u, v \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$!

e. Division

$\frac{z_1}{z_2}$

Beispiel

$\frac{2+3i}{2+2i}$

Erweitern: $\frac{2+3i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{(2+3i) \cdot (2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{10+2i}{8} = \frac{10}{8} + \frac{2}{8} i = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} i$

allgemein

$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{a \cdot d + b \cdot d + (-ad+bc) \cdot i}{c^2+d^2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

$\frac{4+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{4-i^2-4i+i}{1-i^2} = \frac{5-3i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} i$

$\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$

kürzen

$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_2} = z_1$

$\frac{(4+3i)(2+i)}{(2+i)} = \frac{5+10i}{2+1} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i$

☺

$\frac{4u^2+4uv+v^2}{2u+v} - \frac{u^2-v^2}{u-v} = \frac{(2u+v)^2}{2u+v} - \frac{(u+v)(u-v)}{u-v} = 2u+v-(u+v) = u$

$z = a+bi$

$\bar{z} = a - bi$ heißt komplex konjugiert zu z

$z \cdot \bar{z}$ ist immer reell und positiv

$(a+b\,i)(a-b\,i)=a^2-b^2i^2-ab\,i+bai=a^2+b^2$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}$

$|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ heißt Betrag von z $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|4+3i|=\sqrt{(4+3i)(4-3i)}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$|4|=4$

In der Physik meist z^* statt $\bar{z}$.

II. 4 Darstellung komplexer Zahlen

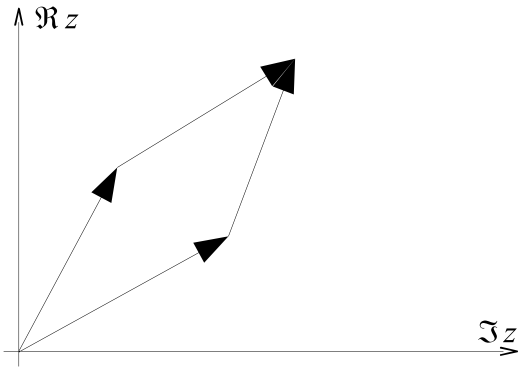
a. algebraische Form

$a+b\,i$

b. geometrische Form

$\underset{\text{reelle Einheit}}{a}+b\cdot\underset{\text{imaginäre Einheit}}{i}$

eine komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der komplexen Zahlenebene



$z_1=2+i$

$z_2=1+3\,i$

$z_1+z_2=3+4\,i$

c. Polardarstellung

$z=a+bi$

$\Re z=a$

$\Im z=b$

$\Re z=\cos\varphi\cdot r$

$\Im z=\sin\varphi\cdot r$

$z=a+b\,i=r\cdot\cos\varphi+r\cdot\sin\phi\cdot i=r(\cos\varphi+\sin\varphi\cdot i)=|z|\cdot(\overbrace{\cos\varphi+\sin\varphi\cdot i}^{Paare})=|z|\,e^{i\varphi}$

$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\varphi\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} = \frac{\Im z}{\Re z}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z| \cdot (\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot i) \cdot |z| (\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$$
$$\ldots = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + (\cos\varphi_1 \varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) \cdot i]$$
$$\ldots = |z_1| \cdot z_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i]$$

ins besondere

- $z^n = |z|^n \cdot [\cos(c \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) \cdot i] = |z|^n e^{i n \varphi}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{b}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \cdot c\right] = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n}}$

d. Vektorschreibweise

$$a + b i = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(a + b i) + (c + di) = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$(a + b i) \cdot (c + di) = \begin{pmatrix} ac - db \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

II. 5 Anwendungen

harmonische Schwingung

$$\mathrm{c}(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

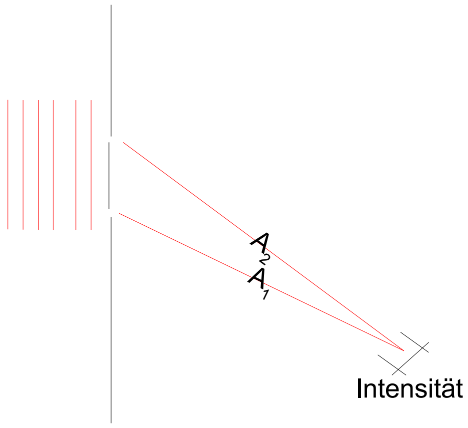
$$\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$$

$$x(t) = \Re(z(t))$$

Amplitude der Schwingung

$$z(t) = x_0 \cdot (\cos(\omega t + \varphi_0) + \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot i) = x_0 \cdot e^{i \cdot (\omega t + \varphi_0)}$$

Beispiel am Doppelspalt



$$\mathrm{A}_1(t)=A_0\cdot e^{i\cdot(\omega_1 t)}$$

$$\mathrm{A}_2(t)=A_0\cdot e^{i\cdot(\omega_2 t+\Delta\varphi)}$$

$\mathrm{A}(t)=\mathrm{A}_1(t)+\mathrm{A}_2(t)$ Intensität $I=|\mathrm{A}(t)|^2$

$$I=\left|A_0\cdot e^{i\omega_1 t}+A_0\cdot e^{i(\omega_2 t+\Delta\varphi)}\right|^2$$

$$\ldots=\left(A_0\cdot e^{i\omega_1 t}+A_0\cdot e^{i(\omega_2 t+\Delta\varphi)}\right)\left(A_0\cdot e^{-i\omega_1 t}+A_0\cdot e^{-i(\omega_2 t+\Delta\varphi)}\right)$$

$$\ldots=A_0^2\left(e^{i\omega_1 t}\cdot e^{-i\omega_1 t}+e^{i(\omega_2 t+\Delta\varphi)}e^{-i(\omega_2 t+\Delta\varphi)}+e^{i\omega_1 t}e^{-i(\omega_2 t+\Delta\phi)}+e^{-i\omega_1 t}e^{i(\omega_2 t+\Delta\varphi)}\right)$$

$$\ldots=A_0^2\left(e^{i\omega_1 t-i\omega_1 t}+e^0+e^{i\omega_1 t}e^{-i\omega_2 t}\cdot e^{-i\Delta\varphi}+e^{-i\omega_1 t}e^{i\omega_2 t}e^{i\Delta\varphi}\right)$$

$$\ldots=A_0^2\left(1+1+e^{i(\omega_1-\omega_2)\cdot t}\cdot e^{-i\Delta\varphi}+e^{-i(\omega_1-\omega_2)\cdot t}\cdot e^{i\Delta\varphi}\right)$$

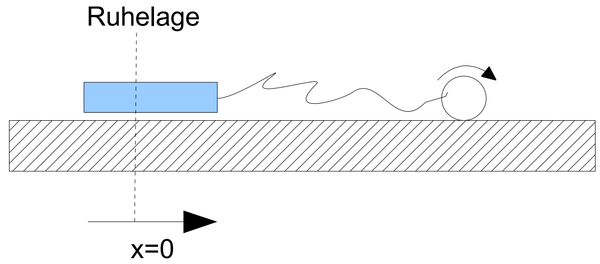
$$\{\text{Nebenrechnung nicht mitgeschrieben!}\}$$

$$\ldots=A_0^2(2+2\cos((\omega_1-\omega_2)\cdot t+\Delta\varphi))$$

$$\ldots=2A_0^2(1+\cos((\omega_1-\omega_2)\cdot t+\Delta\varphi))$$

$$\ldots=2A_0^2(1+\cos\Delta\varphi)$$

Beispiel mit einer Schwingung



freie Schwingung

$$F=m\cdot a=m\cdot\ddot{x}$$

$$F=-k\cdot x=-D\cdot x$$

$-k\cdot x=m\cdot\ddot{x}\Leftrightarrow m\cdot\ddot{x}+k\cdot x=0$ Differenzialgleichung (DGL)

$$x(t)=x_0\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)=e^{i(\omega_0 t+\varphi)}$$

gedämpfte Schwingung

$$F_R=-b\cdot\dot{x}$$
$$F=m\cdot\ddot{x}\ \rightarrow\ m\cdot\ddot{x}+b\cdot\dot{x}+k\,x=0$$

erzwungene Schwingung

$$F_{\text{ext}}=F_0-\cos\omega t$$
$$m\cdot\ddot{x}+b\cdot\dot{x}+k\cdot x=F_0\cdot\cos\omega t$$
$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\cdot\dot{x}+\frac{k}{m}\cdot x=\frac{F_0}{m}\cdot\cos\omega t$$
$$\ddot{x}+2\,\delta\cdot\dot{x}+\omega_0^2 x=k_o\cdot\cos\omega t$$

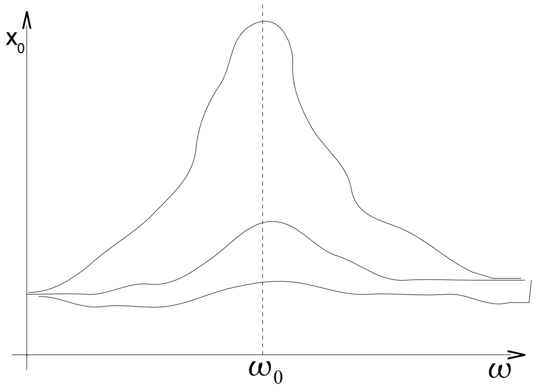
mit $\delta=\frac{b}{2\,m}\quad\omega_0^2=\frac{k}{m}\quad k_0=\frac{F_o}{m}$

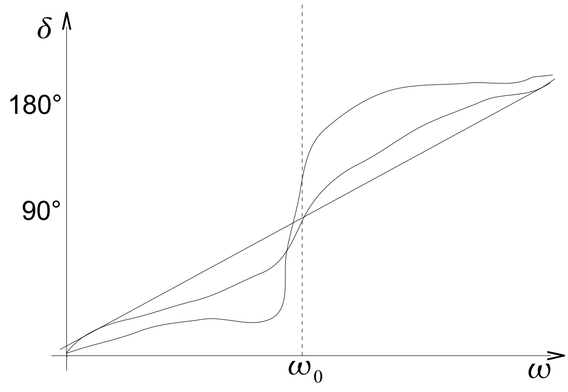
<u>komplexer Ansatz</u>

$$\ddot{x}+2\,\delta\,\dot{x}+\omega_0^2 x=k_0\cdot e^{i\omega t}$$

Ansatz $x(t)=x_0 e^{i(\omega' t-\varphi)}$

$$\dot{x}(t)=x_0 i\,\omega' e^{i(\omega' t-\varphi)}$$
$$\ddot{x}(t)=-x_0\omega'^2 e^{i(\omega' t-\varphi)}$$
$$-x_0\omega'^2 e^{i(\omega' t-\varphi)}+2\,\delta\,x_0 i\omega' e^{i(\omega' t-\varphi)}+\omega_0^2 x_0 e^{i(\omega' t-\varphi)}=k_0\cdot e^{i\omega t}$$
$$\omega'=\omega$$
$$-x_0\omega^2 e^{-i\varphi}+2\delta\,i\,\omega\,x_0 e^{-i\varphi}+\omega_o^2 x_0 e^{-i\varphi}=k_0$$
$$(-\omega^2+2\cdot i\,\delta\,\omega+\omega_0^2)e^{-i\varphi}=\frac{k_o}{x_0}$$
$$-\omega^2+2i\,\delta+\omega+\omega_0^2=\frac{k_0}{x_0}\cdot e^{i\varphi}$$
$$(\omega_0^2-\omega^2)+2\,\delta\,\omega\cdot i+\frac{k_0}{x_0}\cdot e^{i\varphi}$$
$$\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\,\delta^2\omega^2}=\frac{k_0}{x_0}$$
$$x_0=\frac{k_0}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\,\delta^2\omega^2}}$$
$$\tan\varphi=\frac{\Im}{\Re}=\frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$





Beispiel: Wechselstromschaltung

Kondensator

$$Q=C\cdot U \rightarrow \frac{dQ}{dt}=C\cdot\frac{dU}{dt}$$

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$U(t)=U_0\cdot\cos\omega t$$

$$I(t)=C\cdot\frac{d\,U(t)}{dt}=C\cdot U_0\cdot\omega\cdot(-\sin\omega t)=C\cdot U_o\cdot\omega\cdot\left(\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$U(t)=U_0\cdot e^{i\omega t}$$

$$I(t)=\omega C\,U_0\cdot e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

<u>Ohmsches Gesetz</u> $R=\frac{U}{I}$

Erweiterung

Impedanz $Z=\frac{U(t)}{I(t)}$

Kondensator $Z=\frac{U_0\cdot e^{i\omega t}}{\omega C\,U_0}\cdot e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{e^{i\omega t}}{\omega C\,e^{i\omega t}}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$Z=\frac{1}{i\omega C}$$

Spannungsteiler

$$U_{\text{aus}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot U_{\text{ein}}$$

Hochpars

$$U_{\text{aus}}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\cdot U_{\text{ein}}$$

$$Z_1=\frac{1}{i\omega C}\,Z_2=R$$

$$f=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{R}{R+\frac{1}{i\omega C}}=\frac{R}{R-\frac{i}{\omega C}}\cdot\frac{R+\frac{i}{\omega C}}{R+\frac{i}{\omega C}}=\frac{R^2+\frac{i}{\omega C}}{R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2}}=\frac{R^2\omega^2 C^2+i R\omega C}{1+R^2\omega^2 C^2}$$

$$|f|=\frac{R\omega C}{\sqrt{1+R^2+\omega^2+C^2}} \quad \tan\varphi=\frac{1}{\omega R C}$$

III. Funktionen

III. 1 Einführung

Eine Eingabe $\underbrace{x}_{\text{Definitionsbereich}\, x\in[-1,4]\, x\in\mathbb{R}} \overset{\text{Funktion}}{\rightarrow} \text{Rechnung} \rightarrow y = \underbrace{\text{Ausgabe}}_{y\in[1,19]\, y\in\mathbb{R}}$

Beispiel

$$x \rightarrow y = \overbrace{2(x-1)^2}^{Rechnung} \rightarrow x$$

Wertetabelle

x	y
-1	9
0	3
1	1
2	3
3	9
4	19

Abbildung $x \rightarrow y$

Funktion $\mathrm{f}: 0 \rightarrow W\ x \rightarrow y$

Beispiel: $\mathrm{f}: [-1,4] \rightarrow [1,19]$, $x \rightarrow \mathrm{f}(x) = 2(x-1)^2+1$

[Graph: an der x-Achse der Definitionsbereich, an der y-Achse der Wertebereich]

III. 2 Einfache Funktionen

a. konstante Funktion

$$\mathrm{f}(x) = c$$

b. lineare Funktion (Gerade)

$$\mathrm{f}(x) = ax+b$$

c. quadratische Funktion (Parabel)

$$\mathrm{f}(x) = ax^2+bx+c$$

$$2(x-1)^2+1 = 2(x^2-2\mathrm{x}+1)+1 = 2\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+3$$

d. kubische Funktion

$$\mathrm{f}(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$

e. ganz rationale Funktion (Polynom)

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{128}x^5 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{1}{6}x^2$$

$$f(x)=\frac{1}{18}(x^2-9)^2$$

f. gebrochen rationalen Funktionen

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

$$f(x)=\frac{4x^2-5x+5}{2x^3-1}$$

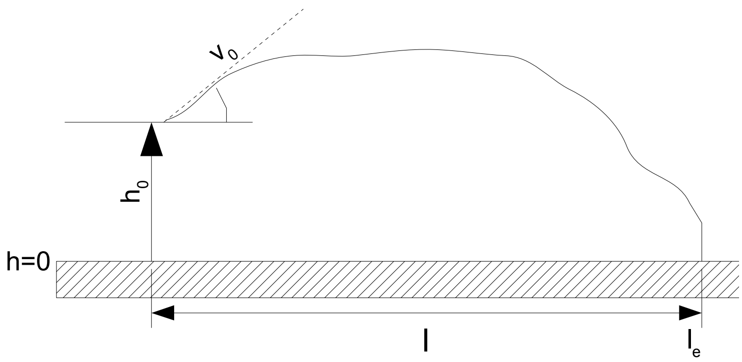
g. irrationale Funktionen

$$f(x)=4\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$f(x)=\frac{x+2\sqrt{x}-1}{1+x}$$

6 Beispiele...

III. 3 Funktionen in der Physik



$$h(t)=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\sin\alpha\cdot t+h_0$$

Ende des Fluges $h(t_e)=0$

$$-\frac{1}{2}g\,t_e^2+v_0\sin\alpha\,t_e+h_0=0$$

$$t_e=\frac{v_0\sin\alpha\pm\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh_0}}{g}$$

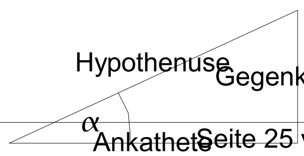
$$l(t_e)=v_0\cos\alpha\cdot t$$

$$l_e=l(t_e)=v_0\cdot\cos\alpha\cdot\left(\frac{v_0\sin\alpha+\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh_0}}{g}\right)$$

III. 4 Trigonometrische Funktionen

Definition

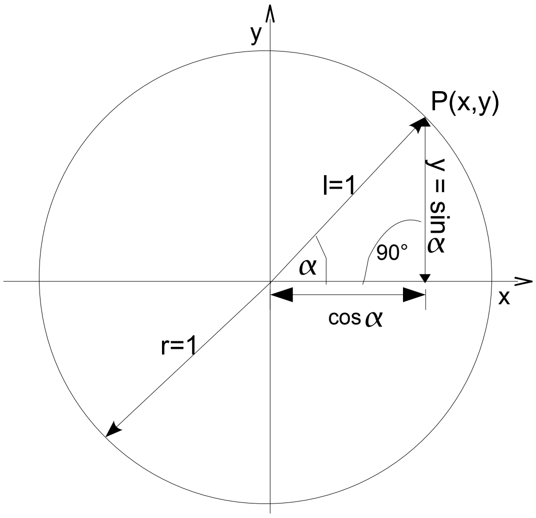
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$



$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

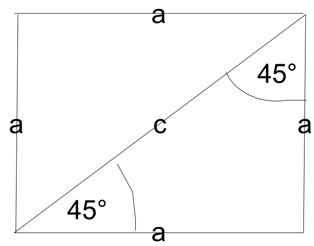
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$

Berechnung Sinus mit 45°

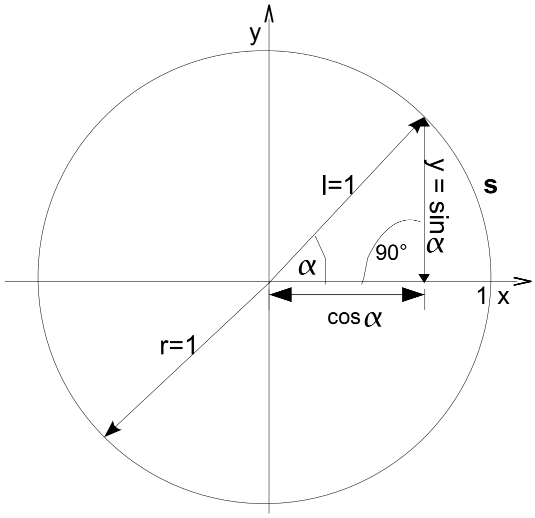


$a^2 + a^2 = c^2 \quad \sin 45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \frac{a}{c}$

$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°}$

Gradmaß und Bogenmaß



Kreisumfang $U = 2\pi \cdot r = 2\pi$

$\frac{\alpha}{s} = \frac{360°}{2\pi} \Rightarrow s = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha$

$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot s$

Einheiten

- „Grad“ $0° \ldots 360°$
- „rad“ $0 \ldots 2\pi$

$0° = 0\,rad$

$90° = \frac{\pi}{2}\,rad$

$180° = \pi\,rad$

$360° = 2\pi$

Wertebestimmung

➔ Tabelle

➔ Taschenrechner $\sin 13{,}2° = 0{,}228$

➔ Reihenentwicklung

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k)!}$$

Einschub

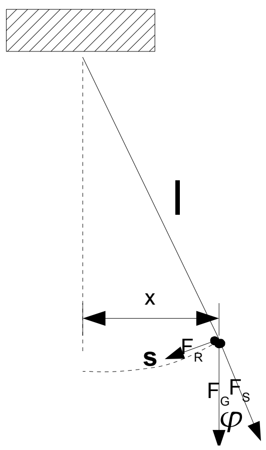
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Beispiel

$\cos 13{,}2° = \cos 0{,}23038$

k	$(-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \ldots$
0	1	
1	-0,02654	0,97346
2	0.00011	0,97357
3	~3	0,97357

Anwendung



$$\sin \varphi = \frac{F_R}{F_G} \Rightarrow F_R = F_G \cdot \sin \varphi = m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{x}{l}$$

$$F_R = m \cdot m \cdot \frac{x}{l}$$

2. Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \frac{l}{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \cdot x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

DGL → Lösung: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

zurückgelegte Strecke $s \neq x$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow -F_R = m \cdot \ddot{s}$$

$$s = l \cdot \varphi \Rightarrow \ddot{s} = l \cdot \ddot{\varphi}$$

$$-m \cdot g \cdot \sin \varphi = l \cdot \ddot{\varphi} \cdot m$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin\varphi = 0}$$

Für kleine Winkel ist $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0 \varphi = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$x = l \cdot \sin\varphi \approx l \cdot \varphi$$

$$\mathrm{x}(t) = \underbrace{l \cdot \hat{\varphi}}_{x_0} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2\mathrm{k}+1}}{(2\mathrm{k}+1)!} = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$$

zum Beispiel für 5° = $\left.\begin{array}{l} 0{,}08727\, rad \\ \dfrac{\varphi^3}{6} = 0{,}00011 \end{array}\right\} \approx 0{,}13$

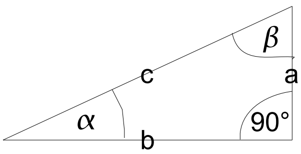
Korrektur

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \frac{\omega_0^2}{6} \cdot \varphi^3 = 0$$

Wichtige Relationen



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\beta = 90° - \alpha$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$$

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Achtung

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\alpha\in[0°,90°]$

$\alpha\in[90°,180°]$

<u>Additionstheoreme</u>

$\sin(x+y)=sinx\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\frac{\sin 2\mathrm{x}}{2\tan x}=\frac{\sin(x+x)}{2\tan x}=\frac{\sin x\cos x+\cos x\sin x}{2\tan x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\tan x}=\frac{\sin x\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\cos^2 x$$

<u>Beispiel: Akustische Schwebung</u>

$\mathrm{x}_1(t)=x_0\cos\omega_1 t$

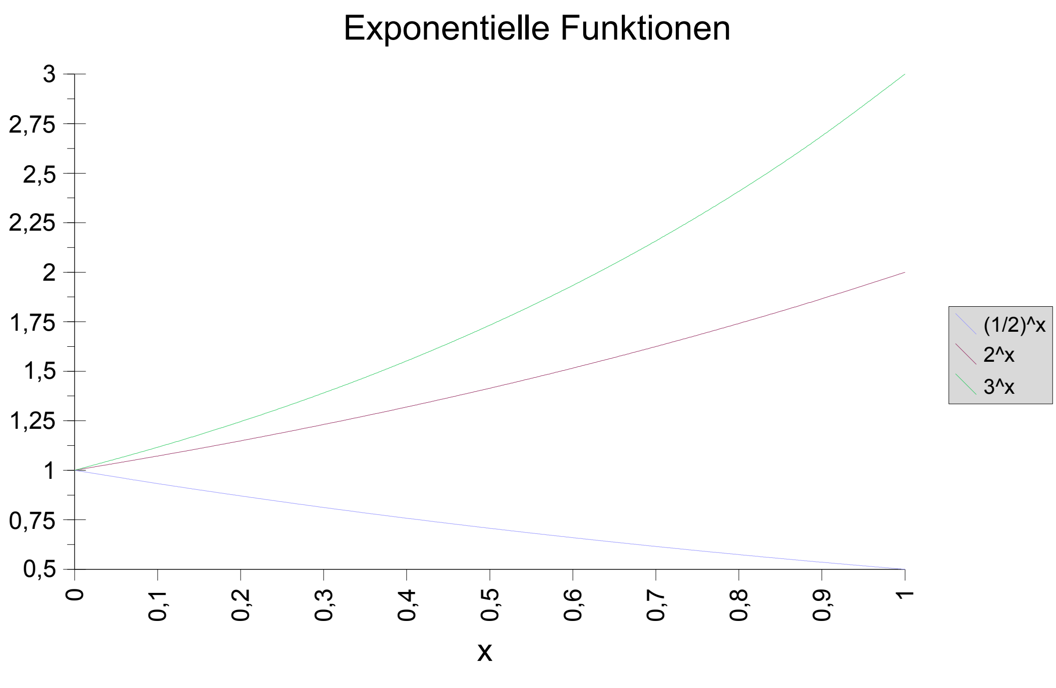
$\mathrm{x}_2(t)=x_0\cos\omega_2 t$

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{x}_1(t)+\mathrm{c}_2(t)=x_0(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)\overset{\text{Broustein}}{=}x_0 2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

<u>III. 5 Exponentialfunktionen</u>

a. Definition

$\mathrm{f}(x)=a^x$ oder allgemein $\mathrm{f}(x)=a^{\mathrm{Poly}(x)}$



Wiederholung

$3^{1,73}?$

$3^{1,73}=3^{1+0,7+0,03}=3^1\cdot 3^{0,7}\cdot 3^{0,03}=3\cdot 3^{\frac{7}{10}}\cdot 3^{\frac{3}{100}}=3\cdot\sqrt[10]{3^7}\cdot\sqrt[100]{3^3}$

aber 3^{π}

b. Exponentialgesetz

$A:\mathrm{f}(0)=1$

$B:\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\cdot\mathrm{f}(y)$

$a^0=1$

$a^{x+y}=a^x\cdot a^y$

c. Wachstum und Zerfall

$\mathrm{f}(0)=1$

$\mathrm{f}(t)=c$

$\mathrm{f}(2\mathrm{t})=\mathrm{f}(t+t)=\mathrm{f}(t)\cdot\mathrm{f}(t)=c\cdot c$

$\mathrm{f}(3\mathrm{t})=\mathrm{f}(2\mathrm{t}+t)=\mathrm{f}(2\mathrm{t})\cdot\mathrm{f}(t)=c\cdot c\cdot c$

$\mathrm{f}(4\mathrm{t})=\ldots=c^4$

exponentielles Wachstum für a^x

exponentieller Zerfall für a^{-x}

$\mathrm{N}(t)=N_0\cdot e^{ct}$

Herleitung des Wachstumsgesetzes

$t=0: N_0\,\text{Objekte}$

$t=\Delta t: N_0=\Delta N\,\text{Objekte}$

Jedes Objekt N_0 produziert die selbe Anzahl neuer Objekte.

$\Delta N=c\cdot N_0\cdot\Delta t$ Näherung für kleine Δt

$\mathrm{N}(\Delta t)=N_0+\Delta N=N_0+c\,N_0\cdot\Delta t=N_0\cdot(1+c\,\Delta t)$

Verbesserung

Unterteilung Δt in 2 Hälften

$$\Delta\,\mathrm{N}\left(0\rightarrow\frac{\Delta t}{2}\right)=c\cdot N_0\frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathrm{N}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)=N_0\cdot\left(1+c\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$\Delta\,\mathrm{N}\left(\frac{\Delta t}{2}\rightarrow\Delta t\right)=c\cdot\mathrm{N}_0\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\frac{\Delta t}{2}=c\cdot\mathrm{N}_0\left(1+\frac{c\cdot\Delta t}{2}\right)\cdot\frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathrm{N}(\Delta t)=N_0\cdot\left(1+c\frac{\Delta t}{2}\right)+\frac{c\cdot N_0\cdot\Delta t}{2}+c\,N_0\cdot c\frac{\Delta t}{2}=N_0\cdot\left(1+2c\frac{\Delta t}{2}+c^2\cdot\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)=N_0\cdot\left(1+\frac{c\cdot\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{N}(\Delta t)=N_0\cdot\left(1+\frac{c\cdot\Delta t}{3}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$N(\Delta t)=N_0\cdot\left(1+\frac{c\cdot\Delta t}{n}\right)^n$$

exakte Lösung

$$\mathrm{N}(\Delta t)=N_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c\cdot\Delta t}{n}\right)^n$$

Wertetabelle

Δt	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**	**4**
$n=1$	1,5	2	2,5	3	4	5
$n=2$	1,5625	2,25	3,0625	4	,25	9
$n=3$	1,5880	2,3703	3,375	4,6296	8	12,7037
$n=10$	1,5880	2,7048		$\dots$		28,93
$n=100$	1,6477	2,7169		$\dots$		50,50
$n=1000$	1,6485	2,7183		$\dots$		54,16
$e^{\Delta t}$	1,6487	2,7183		$\dots$		54,60

Die eulersche Zahl $e\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$e^x\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

- praktischer als $3^{1,73}=3\cdot\sqrt[10]{3^7}\cdot\sqrt[100]{3^3}$
- gilt auch für irrationale Zahlen

e. Die Exponentialreihe

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\dots$$

f. Die e-Funktion in Komplexen

$$\cos\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\varphi^{2\mathrm{k}}}{2\mathrm{k}!}$$

$$\sin\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\varphi^{2\mathrm{k}+1}}{(2\mathrm{k}+1)!}$$

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\ldots\right)$$

$$\ldots=1+i\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^2}{2!}-i\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+i\frac{\varphi^5}{5!}+\ldots$$

$$\ldots=\frac{(\varphi i)^0}{0!}+\frac{(i\varphi)^1}{1!}+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\varphi)^4}{4!}+\ldots+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Vergleiche $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{x!}\quad x\in\mathbb{R}$

Definition $e^{ix}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!}\quad x\in\mathbb{R}$

und $e^z=e^{a+ib}=e^a\cdot e^{ib}\ z\in\mathbb{C}$

$u=|u|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=|u|\cdot e^{i\varphi_1}$

$v=|v|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=|v|\cdot e^{i\varphi_2}$

$u\cdot v=|u|\cdot|v|\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\,\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$

$$\ldots=|u||v|(\cos(\varphi_1\,ü\,\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=|u||v|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

g. komplexe Zahlen (2. Teil)

$\Re(a+ib)=a$

$\Im(a+ib)=b$

$|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|\cdot\cos\varphi+i|z|\cdot\sin\varphi$

$\Re(z)=|z|\cdot\cos\varphi$

$\Im(z)¿|z|\cdot\sin\varphi$

$\cos\varphi=\frac{\Re z}{|z|}$

$\sin\varphi=\frac{\Im z}{|z|}$

$z^*=\bar{z}=a-ib=|z|(\cos\varphi-i\sin\varphi)=|z|(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))=|z|e^{-i\varphi}$

$$|z|^2=z\cdot z^*$$

$$\ldots=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$$

$$\ldots=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot|z|\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

$$\ldots=|z|^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+i\sin\varphi\cos\varphi-i\cos\varphi\sin\varphi)=|z|^2$$

$$\ldots|z|=|z|e^{i\varphi}\cdot|z|e^{-i\varphi}=|z|^2\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{ii\varphi}=|z|^2\cdot e^{i\varphi-i\varphi}=|z|^2$$

$1+i=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

$\frac{1}{2}(z+z^*)=\frac{1}{2}|z|\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}|z|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\right)$

$$\ldots=\frac{1}{2}|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos\varphi-i\sin\varphi)=|z|\cdot\cos\varphi$$

$$\boxed{\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\cos\varphi}$$

$\frac{1}{2i}(z-z^*)=\ldots=|z|\cdot\sin\varphi$

$$\boxed{\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}=\sin\varphi}$$

III. 6 Umkehrfunktionen

In der Physik $\underset{\text{Resultat}}{\mathrm{f}}\overset{\text{Anfangsbedingung}}{(x)}$

Beispiel

$\text{Wurfweite}(\textit{Abschusswinkel})$

Funktion $\mathrm{f}\ D \rightarrow W \quad x \rightarrow y = \mathrm{f}(x)$

Umkehrfunktion $\mathrm{f}^{-1}\ W \rightarrow D\ y \rightarrow x = \mathrm{f}^{-1}(y)$

unser Beispiel

$$\mathrm{l}_e(\alpha) = v_0 \cdot \cos\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2 g h_0}}{g} \right)$$

setze $h_0 = 0$

$$\mathrm{l}_e(\alpha) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \sin\alpha + v_0 \sin\alpha}{g} \right) = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{g \cdot l_e}{v_0^2}$$

Umkehrfunktion des sin: $arc\sin$

$$arc\sin(\sin 2\alpha) = 2\alpha$$

$$2\alpha = arc\,\alpha \left(\frac{g \cdot l_e}{v_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} arc\sin \left(\frac{g \cdot l_e}{v_0^2} \right)$$

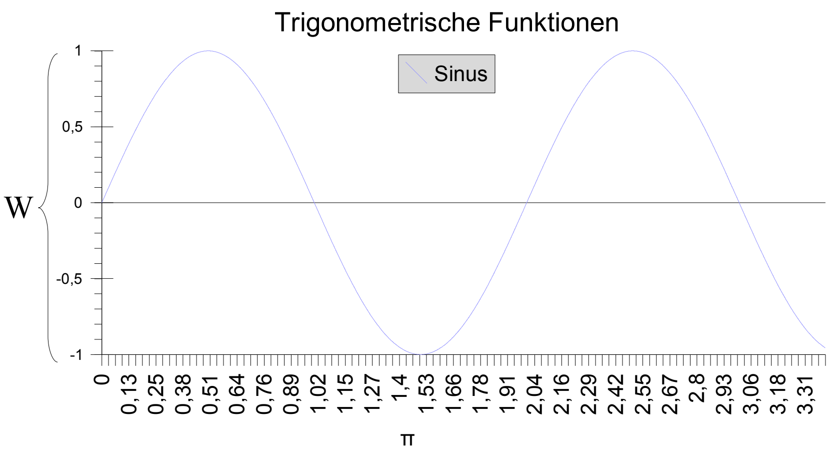
Einstellwinkel für Wurfweite

$g = \frac{10\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $v_0 = \frac{150\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

1400m → 19,24°

2000m → 31,37°

2400m → `Error` (wegen Wertebereich)



Umkehrung ist nicht immer eindeutig.

$l_e(19{,}24°)=1400\text{m}$

$l_1(70{,}76°)=1400\text{m}$

Funktionen vor der Umkehrung auf eindeutigen Bereich einschränken!

a. Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktionen

$f(\alpha)=\sin\alpha \Rightarrow f^{-1}(x)=arc\sin x \quad x\in[-1,+1]$

$f(\alpha)=\cos\alpha \Rightarrow f^{-1}(x)=arc\cos x \quad x\in[-1,+1]$

$f(\alpha)=\tan\alpha \Rightarrow f^{-1}(x)=arc\tan x \quad x\in\mathbb{R}$

Beispiel

$z_1 = 3 + 2i \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} z_1}{\operatorname{Re} z_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi = 33{,}69°$

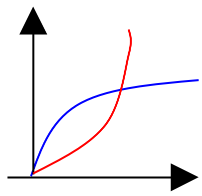
$z_2 = -3 - 2i \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-2}{-3} \Rightarrow \varphi = 33{,}69°$

! Der Winkel im zweiten Fall müsste eigentlich 213,69° groß sein, was aber außerhalb des Standardastes vom arctan liegt.

b. Die Umkehrung rationaler Funktionen

(1) $f(x) = y = x^2 \quad \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \sqrt{y}$

$f(x)=x^2, \; f^{-1}(y)=\sqrt{y}$



(2) $f(x) = y = \frac{x^2+3x+2}{2x}$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 2xy$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-2y)x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3-2y}{2} \pm \sqrt{\frac{(3-2y)^2}{4} - 2}$

(…)

Überlegung: Welchen Ast will man umkehren?

c. Die Umkehrung der Exponentialfunktion

(1) $f(x) = y = e^x \quad \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \ln x$

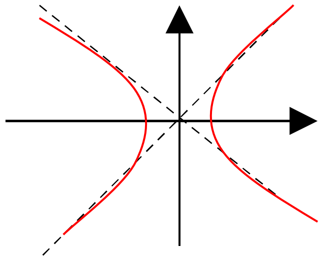
(2) $f(x) = y = 4e^{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \ln 4 + (x^2+1) = \ln y$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\ln\left(\frac{y}{4}\right) - 1}$

! Frage: Positive oder negative Wurzel?

d. Weitere Funktionen

(1) Hyperbelfunktion



Einheitshyperbel:

$x^2 - y^2 = 1$

(allgemein: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$)

Hier sind, analog zum Einheitskreis, folgende Funktionen definiert:

Sinus Hyperbolicus: $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Cosinus Hyperbolicus: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Tangens Hyperbolicus: $\tanh = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (coth x = 1/tanh x)

Alle diese Funktionen sind nicht periodisch.

Relationen:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

Umkehrfunktionen:

(Area Sinus Hyperbolicus)

$\text{ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

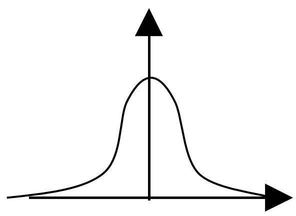
$\text{ar}\cosh x = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

$\text{ar}\tanh x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

$\text{ar}\coth x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

(2) Gaußsche Fehlerfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varsigma}$$



e. Bemerkungen

(1) Wichtig beim Graphen zeichnen:

- Achsenbeschriftung
- Einheiten an den Achsen
- Funktion dranschreiben
- Parameter angeben

(2) sin x => x DARF keine Einheit haben, wenn doch hat man sich verrechnet

(3) Man kann vermeiden für jeden Parameter eine neue Zeichnung anzufertigen, wenn man den

Parameter in die Achsenbeschriftung einbindet.

Bsp. f (t) = sin $(2\pi \frac{t}{t_o})$

Hier benennt man die x-Achse mit t/t_0.

(4) Logarithmische Darstellung:

Um einen besseren Überblick über einen Graphen zu erhalten kann man für eine oder beide Achsen eine logarithmische Darstellung wählen. So kann man auch Extremwerte, die weit weg vom Nullpunkt liegen noch erkennen. Man trägt dann also beispielsweise nicht x sondern ln(x) auf.

IV Das Lösen von Gleichungen

1. Äquivalenzumformungen

Bsp.: $3x+1=7 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$

Grundrechenarten sind hierbei okay, vorsichtig muss man nur mit den Vorzeichen bei Potenzen und Wurzeln sein.

Bsp.: $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

2. Rationale Gleichungen

(1) lineare Gleichungen:

Bsp.: $2x-4=2 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

(2) quadratische Gleichungen

a) p,q- Formel

$x^2 + px + q = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(p/2\right)^2 - q}$$

b)Linearfaktorzerlegung

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1{,}5)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1{,}5 \vee x = 4$$

(3) kubische Gleichungen

$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$

Substitution: $y = x + r/3$

$$\Rightarrow (y-\frac{r}{3})^3 + r(y-\frac{r}{3})^2 + s(y-\frac{r}{3}) + t = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y^2r + y\frac{r^2}{3} - \frac{r^3}{27} + ry^2 - \frac{2}{3}r^2y + \frac{r^2}{9} + sy - \frac{sr}{3} + t = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + (\frac{r^2}{3} + s)y + \frac{2}{27}r^3 - \frac{sr}{3} + t = 0$$

$$(y^3 + \quad p \quad y + \quad q \quad = 0)$$

Diskriminante: $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$$

v= $\sqrt[2]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$

Lösungen:

⇨ y1 = u + v

⇨ y2 = $-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}i\sqrt{3}$

⇨ y3 = $-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}i\sqrt{3}$

(4) gebrochenrationale Funktionen

Beispiel

$\frac{2x^2-3}{x+1}=4$

$\Leftrightarrow\ 2x^2-3=4x+4$

$\Leftrightarrow\ 2x^2-4x-7=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x-3{,}5=0$

$\Leftrightarrow\ x=1\pm\sqrt{1+3{,}5}$

$\Leftrightarrow\ x=1\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$

3. Transzendente Gleichungen

(a) Wurzeln

Wurzeln separieren und dann quadrieren:

Bsp.: $\sqrt{x+1}$ -2 = 0 $\Leftrightarrow\ \sqrt{x+1}=2\ \Leftrightarrow\ x+1=4\ \Leftrightarrow\ x=3$

(b) Potenzen und Logarithmen

separieren und dann logarithmieren, bzw. potenzieren

Bsp.: (1) 2x = 4 ⇔ log2 4 = x = 2

(2)(lnx + 1)(lnx – 1) = 3 ⇔ $\ln^2 x-1=3\ \Leftrightarrow\ \ln^2 x=4\ \Leftrightarrow\ \ln x=2\ \Leftrightarrow\ x=e^2$

(c) Kreisfunktionen

Vorgehensweise: - auf eine trigonometrische Funktion reduzieren (Additionstheoreme)

- Substituieren (u = Kreisfunktion)
- lösen
- Rücksubstitution

Beispiel

$\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2$

$\Leftrightarrow \sin\alpha + 2\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha = 1 - \sin\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 0 = -\sin\alpha + \frac{5}{4}\sin\alpha$

$Substitution: u = \sin\alpha$

$\Rightarrow 0 = -u + \frac{5}{4}u^2$

$\Leftrightarrow u = 0 \vee u = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \alpha = 90^\circ \vee \alpha = 53{,}13^\circ$

4. Gleichungssysteme

3 Techniken: - Einsetzen

- addieren oder subtrahieren von Zeilen
- Gleichsetzen

Bsp.:

(I) $4y + 1 = 2x^2$

(II) $4y + 2z = 4xz$

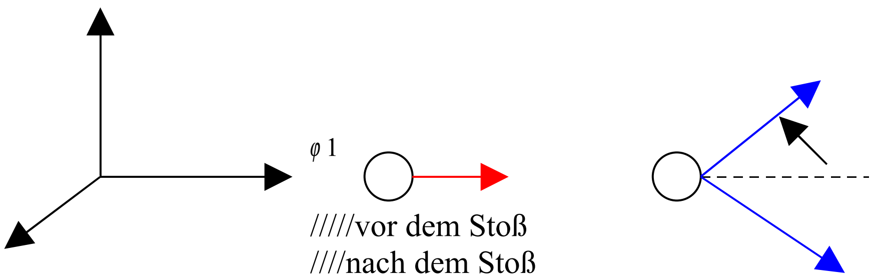
(III) $z = x + 1$

(III) in (II): $4y + 2(x+1) = 2x(x+1) \Leftrightarrow 4y + 2 = 2x^2$ (IV)

(I) und (IV) gleichsetzen: $4y + 2 = 4y + 1 \Leftrightarrow 2 = 1$

Es folgt: Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Bsp.: Stoßgesetze



m = Masse der anstoßenden Kugel

M = Masse der anderen Kugel

v1 = Geschwindigkeit der anstoßenden Kugel vor dem Stoß

u1/u2 = Geschwindigkeiten nach dem Stoß

Energieerhaltungssatz

E0 = E1 + E2 $\Rightarrow$ ½ mv1²= ½ mu1² + ½ Mu2²

Impulserhaltungssatz

$$m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + M\vec{u}_2$$

Daraus ergibt sich mit dem festgelegten Koordinatensystem ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen:

$$(I)\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2$$
$$(II)0 = mu_1\sin\varphi_1 + Mu_2\sin\varphi_2\cos\alpha_2$$
$$(III)0 = Mu_2\sin\alpha_2\sin\varphi_2$$
$$(IV)mv_1 = mu_1\cos\varphi_1 + Mu_2\cos\varphi_2$$

Unbekannte sind hierbei: u1, u2, φ_2, α_2

Aus Gleichung (III) folgt, da $M \neq 0 \wedge u_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \vee \sin\varphi_2 = 0$$
$$hier: \sin\alpha_2 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_2 = 0 \vee \alpha_2 = \pi$$

Logisch: $\boxed{\alpha_2 = \pi}$

Wenn man das jetzt einsetzt, hat man noch drei Gleichungen:

$$(I)\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2$$
$$(II)0 = mu_1\sin\varphi_1 + Mu_2\sin\varphi_2$$
$$(III)mv_1 = mu_1\cos\varphi_1 + Mu_2\cos\varphi_2$$

Wenn man die zweite Gleichung umformt und einen Sinus durch einen Cosinus ersetzt, erhält man:

$$\boxed{\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{mu_1}{Mu_2}\right)^2 \sin^2\varphi_1}}$$

Dieses Ergebnis setzt man nun in Gleichung (III) ein und erhält:

$$\frac{mv_1 - mu_1\cos\varphi_1}{Mu_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{mu_1}{Mu_2}\right)^2 \sin^2\varphi_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(mv_1)^2 - 2m^2 v_1 u_1 \cos\varphi_1 + (mu_1\cos\varphi_1)^2}{(Mu_2)^2} = 1 - \left(\frac{mu_1}{Mu_2}\right)^2 \sin^2\varphi_1$$

$$\Leftrightarrow (mv_1)^2 - 2m^2 v_1 u_1 \cos\varphi_1 + (mu_1\cos\varphi_1)^2 = (Mu_2)^2 - (mu_1)^2 \sin^2\varphi_1$$

$$\Leftrightarrow (mv_1)^2 + m^2 u_1^2 - 2m^2 u_1 v_1 \cos\varphi_1 = (Mu_2)^2$$

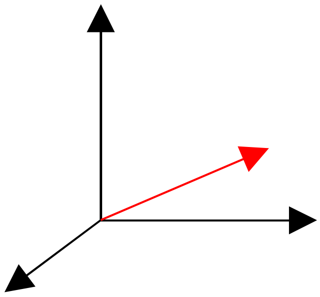
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2M}\left((mv_1)^2 + m^2 u_1^2 - 2m^2 u_1 v_1 \cos\varphi_1\right) = \frac{1}{2} M u_2^2$$

Das kann man jetzt in Gleichung (I) einsetzen und u1 berechnen:

$$\boxed{u_1 = \frac{\frac{m}{M}\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 \cos\varphi_1 + 1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}}{1 + \frac{m}{M}} v_1}$$

V Geometrie

1.Vektoren



$\vec{r} = (x, y, z)$

Vektoren existieren unabhängig vom Koordinatensystem, aber für die Komponentendarstellung braucht man eines.

In der Physik sind Vektoren gerichtete physikalische Größen.

Rechenregeln:

$\vec{a} + \vec{b} = (a1 + b1, a2 + b2, a3 + b3)$

$c * \vec{a} = (c * a1, c * a2, c * a3)$

Skalarprodukt: $\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\Leftrightarrow \quad \vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos\varphi$

Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Nullvektor: $\vec{0} = 0 * \vec{a} = (0,0,0)$

Der Nullvektor hat keine Richtung.

Dreiecksungleichung: $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Einheitsvektor von a: ^a

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ Vektor mit der gleichen Richtung wie a, aber der Länge 1

Physikalische Vektoren haben Einheiten!

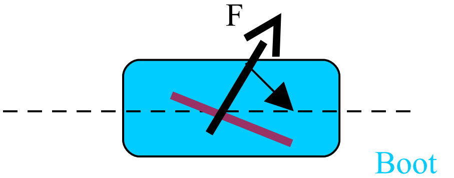
1. Skalarprodukt

(1) anderes Skalarprodukt (aus der speziellen Relativitätstheorie)

- 4-er Vektoren r = (t, x, y, z), wobei t die Zeit ist
- Skalarprodukt: a * b = $a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$

(2) Anwendungen

(a)



a sei der Winkel zwischen der Kraft und dem Segel. Dann gilt für die beschleunigende Kraft:

$|F_a| = |F| * \cos a$

oder

|Fa| = F * ^ex

$= |F| * \cos a$

(b) Arbeit: $W = F * s$

2. Vektorprodukt

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin\varphi$$

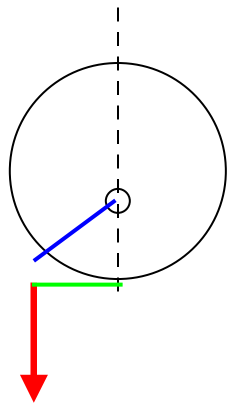
$a \times b$ steht senkrecht auf den einzelnen Vektoren

$\Rightarrow$ $a, b, a \times b$ bilden ein rechtshändiges System (3- Finger- Regel)

! Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist null, wenn die Vektoren parallel sind.

Anwendung:

Drehmoment:



Angreifende Kraft F

Radius der Drehscheibe l

Hebelarm a

$|D| = a * |\vec{F}| = \sin\varphi * |l| * |D| = |l \times F|$

$\Rightarrow$ $D = l \times F$

3. Spatprodukt

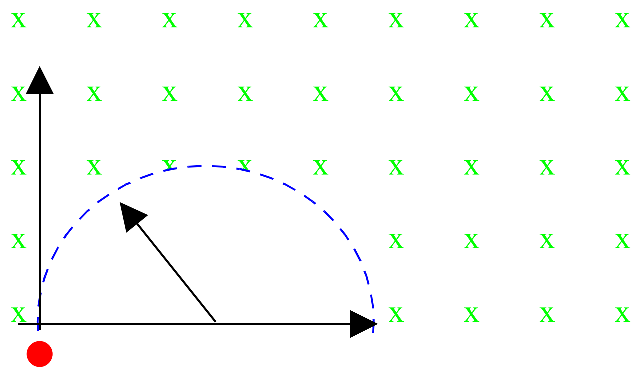
$(a \times b) * c$

Der Betrag des Spatproduktes entspricht dem Volumen des aufgespannten Spats oder Parallelpipeds.

4. Kurven

(1) allgemein: Beschreibung von Bewegungen

Bsp. Magnetisches Vektorfeld



B-Feld

Negativ geladenes Ion

Bahn des Ions

Für die Lorenzkraft gilt:

$$|F| = q * (v \times B) = |q| * |v| * |B| * \hat{e}_x$$

$$al\lg emein: \vec{F} * \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v}$$

Den Radius der Kreisbahn kann man berechnen, indem man die Lorenzkraft und die Zentrifugalkraft gleichsetzt.

(2) Geraden

$$r(\lambda) = a + \lambda g$$

Diese Parameterdarstellung ist nicht eindeutig, da statt g auch ein anderer, zu g paralleler Vektor, gewählt werden kann und a der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Geraden ist.

(3) Ebenen

$$r(\lambda, \varepsilon) = a + \lambda b + \varepsilon c$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Ebene. a ist dabei der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene und b und c sind zwei Vektoren, die in der Ebene liegen aber nicht parallel sind.

Eine andere Möglichkeit ist die Darstellung der Ebene mit Hilfe des Einheitsnormalenvektors, der senkrecht auf der Ebene steht.

$$r * \hat{n} = p$$

VI Grenzwerte

1. Folgen

Definition:

Folgen sind Abbildungen aus den natürlichen Zahlen in ihren Wertebereich.

Bsp.: $a_n=n^2$

Frage: Wie verhalten sich Folgen für sehr große n?

Definition:

Eine Folge **divergiert**, wenn sich zu jeder Zahl c ein n_0 findet mit $|a_{n_0}|>c$.

Oder: Wenn sie größer wird als eine beliebige Zahl.

Bsp.: $a_n=n$ $\lim(n\to\infty)n=\infty$

Definition:

Eine Folge konvergiert gegen a, wenn sich zu jedem ε ein n_0 finden lässt mit $|a_n - a| < \varepsilon$. $(\forall\, n > n_0)$

Bsp.: $a_n = 1/n$ $\lim(n\to\infty)\frac{1}{n}=0$

2. Grenzwerte rationaler Funktionen

Beispiele

f(x) = x² => divergiert

f(x) = $\frac{x^3+x^2+2}{2x^3+1}$ $\lim(x\to\infty)f(x)=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$

3. Rechenregeln

$$\lim(x\to\infty)(c*f(x))=c*\lim(x\to\infty)f(x)$$
$$\lim(x\to\infty)(f(x)\pm g(x))=\lim(x\to\infty)f(x)\pm\lim(x\to\infty)g(x)$$
$$\lim(x\to\infty)(f(x)*g(x))=\lim(x\to\infty)f(x)*\lim(x\to\infty)g(x)$$

4. weitere Grenzwerte

(1) f(x) = lnx

$\to\ \lim(x\to\infty)\ln x=\,?$

$bekannt:\lim(x\to\infty)x=\infty$

d.h. f(x) = x wird größer als jede beliebige Zahl, also:

$x > e^c$

$e^{\ln x} > e^c$

$\ln x > c$

$\Rightarrow\ \lim(x\to\infty)\ln x=\infty$

(2) f(x) = cosh (x)

$\lim(x \to \infty)\cosh(x) = \lim(x \to \infty)(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))$

$= ½ * (\lim (x\to \infty) e^x + \lim(x\to \infty) e^{-x})$

$(= ½ * (\infty + 0)$

$= \infty$

VII Infinitesimalrechnung

Einführung

Differenzial- und Integralrechnung

Gesetzmäßigkeiten beinhalten oft Veränderungen von Größen. Zum Beispiel bei Raketen.

Gesamteffekte bedürfen oft der Summation (Integral) über eine veränderliche Größe.

Zum Beispiel Arbeit über einem Kraftfeld: $W=\int_{S_1}^{S_2} \vec{F}(\vec{s})\,ds$

Geschwindigkeitsbestimmung mittels der zurückgelegten Strecke

– Ein Stein sinkt im Wasser mit v = konstant. Nach 2 sek ist der Stein in 3m Tiefe.

$$|\vec{v}|=\frac{3\text{m}}{2\text{s}}=1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

– Ein Stein fällt vom Turm mit konstanter Beschleunigung

0s → 0m

1s → 5m

2s → 20m

3s → 45m

$s=5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$ (Eigentlich $\mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot t^2$)

Frage: Wie groß ist v nach 2 Sekunden?

1) Näherung

betrachte Zeitintervall zwischen $t_0=2\text{s}\wedge t_1=2{,}1\,\text{s}\Rightarrow\Delta t=0{,}1\,\text{s}$

→ Der zurückgelegte Weg: $\Delta s=5\frac{m}{s}\cdot(2{,}1\,s)^2-5\frac{m}{s^2}\cdot(2\,s)^2=2{,}05\,m$

→ mittlere Geschwindigkeit $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=2{,}05\frac{m}{0{,}1\,s}=20{,}5\frac{m}{s}$

2) Genauere Näherung

$\Delta t=0{,}01\,s$

$\Delta s=5\cdot(2{,}01)^2\,m-5\cdot 2^2=0{,}2005\,m$

→ mittlere Geschwindigkeit $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0{,}2005\,m}{0{,}1\,s}=20{,}05\frac{m}{s}$

3) Grenzübergang

$\Delta t=t_1-2\text{s}$

→ $\Delta s=5\frac{m}{s^2}t_1^2-\frac{5\text{m}}{s^2}(2\text{s})^2$

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=5\frac{m}{s^2}\cdot\frac{t_1^2-(2\text{s})^2}{t_1-2\text{s}}=5\frac{m}{s^2}\cdot(t_2+2\text{s})$$

$\Delta t\rightarrow 2\text{s}$ laufen lassen! $\ldots=5\frac{m}{s^2}(2\text{s}+2\text{s})=20\frac{m}{s}$

Umformungen vor dem Grenzübergang!

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=5\frac{m}{s^2}\frac{(2s)^2-(2s)^2}{2s-2s}=\frac{0}{0}$$ (sinnlos!)

4) allgemein: Geschwindigkeit nach der Zeit t

$$s=f(t)\quad \Delta t=t_1-t\quad \Delta s=5\frac{m}{s^2}(t_1^2-t^2)$$

$$v(t)=f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to t_0}5\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{t_1^2-t^2}{t_1^2-t}\right)=5\frac{m}{s^2}\lim_{\Delta t\to t}(t_1+t)=5\frac{m}{s^2}\cdot 2t=10\frac{m}{s^2}t$$

$$\dot{s}(t)=v=f'(t)=10\frac{m}{s^2}\cdot t$$

Schreibweisen: → Zeitableitungen: $v(t)=\dot{s}(t)$ oder $v=\frac{d}{dt}\cdot s(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$

Die Zuwachsrate des zurückgelegten Wegs heißt Geschwindigkeit. Analog bezeichnet man die Änderungsrate der Geschwindigkeit die Beschleunigung. $a=\dot{v}=\ddot{s}$. Wenn $a<0$ → Bremsweg

a) Wie weit fällt der Stein in der Zeit 1,9s bis 2s?

$$\Delta s=5\frac{m}{s^2}(2{,}01\,s)^2-5\frac{m}{s^2}(1{,}9\,s)^2=1{,}95\,m$$

b) ⇒ Abschätzung der Geschwindigkeit

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=1{,}95\frac{m}{0{,}1\,s}=19{,}5\frac{m}{s}$$

Berechnung des Wegs bei veränderlicher Geschwindigkeit

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit}\times\text{Zeit}$$

$$s=v\cdot t$$

Beispiel

Rakete nach einer Zeit t erreicht die Geschwindigkeit

$$v(t)=2\frac{m}{s^3}t^2 .$$

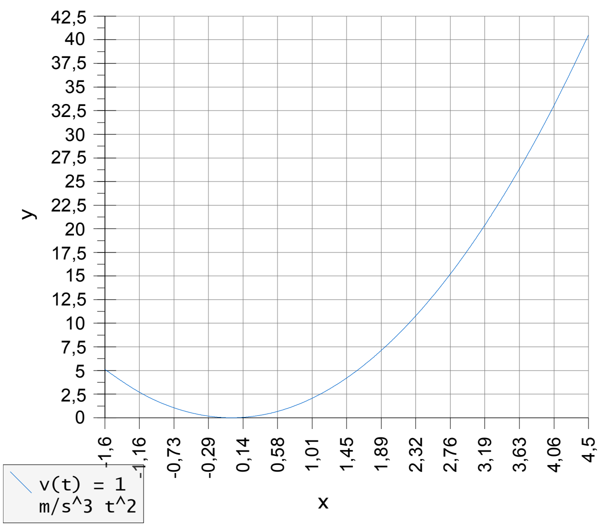
Frage: Wie groß ist die zurückgelegte Strecke nach 3 sek?

Wir haben Einschränkungen (Randbedingungen)

$$t=0s\to 0\frac{m}{s}\to s(0s)=0\cdot t=0m$$

$$t=3s\to v=2\frac{m}{s^3}\cdot 3s^2=s(3s)=v\cdot t=18\frac{m}{s}\cdot 3\,s=54\,m$$

(gleichförmige Bewegung)



Abschätzung

Teile Intervalle in 6 à 0,5s.

Zeit t in s	(0;0,5)	(0,5;1)	(1;1,5)	(1,5;2)	(2;2,5)	(2,5;3)
min-Weg	0	0,25	1,0	2,25	4	6,25
max-Weg	0,25	1,0	2,25	4	6,25	9

↳ nehme immer kleinere Zeitintervalle → bessere Abschätzung!

Nebenbemerkung:

Intervalle mit 0,1s ergeben einen zurückgelegten Weg zwischen 17,13m und 18,91m.

Nochmal:

Anzahl der Intervalle	Dauer in s	Min in m	Max in m
1	3	0	54
6	0,5	13,75	22,75
30	0,1	17,13	18,91

↳ Grenzwert → 18m

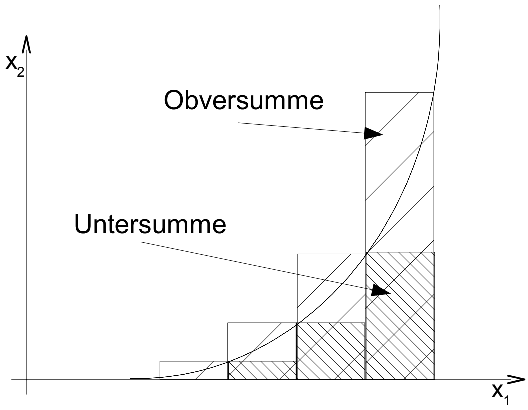
Begriffe Obersumme/Untersumme

Untersumme: $S_U = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{v}(t_1) \cdot \Delta t$

Obersumme: $s_O = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{v}(t_1) \cdot \Delta t$

$$v = \mathrm{f}(t)$$

$$S = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(0) = \int_0^t \mathrm{f}(t')\,dt'$$



$$\int_{0s}^{3s} 2\frac{m}{s^3} t'^2\,dt' = 2\frac{m}{s^3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0s}^{3s} = 2\frac{m}{s^3}\left(\frac{27}{3}s^3 - 0s^3\right) = 18\mathrm{m}$$

Nachtrag: Man hätte auch die „Mittelsumme“ bilden können. $S_m = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathrm{v}\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t\right)$

6 Intervalle: Mittelsumme = 17,87m

<u>Differenzialrechnung → Die Ableitung</u>

3 (physikalische) Variationen zu diesem Thema:

1) Ein Stein fällt eine Strecke von $5\frac{m}{s^2}t^2$ im Zeitraum t. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 2

Sekunden?

2) Gegeben ist eine Parabel $y=x^2$. Wie groß ist der Anstieg der Tangente an die Parabel im Punkt $(2;4)$ anliegt?

3) Gegeben ist eine inhomogene Stange der Länge l = 0,1m mit der Masse 100g. Die ersten $\xi \cdot L$ ($\xi=[0;1]$) der Stange haben eine Masse von $100\varphi g$. Wie groß ist die Dichte ϱ der Stange in $\frac{g}{cm^3}$ bei $\xi=0{,}2$? Querschnitt ist 1cm^2.

Lösungen:

zu1) siehe oben

$$v=\lim_{t\to 2\mathrm{s}} \frac{5\frac{m}{s^2}t^2-5\frac{m}{s^2}(2\mathrm{s})^2}{t-2\mathrm{s}}=20\frac{m}{s}$$

zu 2)

Steigung $m=\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{y}(x)-\mathrm{y}(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

zu 3) $\mathrm{Dichte}=\frac{\mathrm{Masse}}{\mathrm{Volumen}}=\frac{\mathrm{Masse}}{\mathrm{Länge}\cdot\mathrm{Querschnitt}}$

1. Pflicht: Suche funktionalen Zusammenhang!

⇒ Dichte $\varrho=\frac{1}{Q}\cdot\frac{m}{L}$

$$\rho\left[\frac{g}{cm^3}\right]=\lim_{\xi\to 0{,}2}\frac{100\mathrm{g}\cdot\xi^2-\overset{\downarrow 100\mathrm{g}\cdot 0{,}2^2}{4\mathrm{g}}}{10\mathrm{cm}[\xi-0{,}2]}=\lim_{\xi\to 0{,}2}10\frac{g}{cm^3}\frac{\xi^2-0{,}04}{\xi-0{,}2}$$

↪ $$\ldots=\lim_{\xi\to 0{,}2}10\frac{g}{cm^3}\frac{(\xi-0{,}2)(\xi+0{,}2)}{\xi-0{,}2}=\lim_{\xi\to 0{,}2}10\frac{g}{cm^3}(\xi+0{,}2)=4\frac{g}{cm^3}$$

Allgemeine Ableitungen

1) Ableitung eines Polynoms
2) Definition einer „Ableitung“
3) höhere Ableitungen
4) Kurvendiskussion
5) Optimierungsrechnungen
6) Taylor'sche Polynome / Reihenentwicklung (Relativitätstheorie $E=mc^2$)
7) Ableitung von Vektorfunktionen
8) Ableitung mehrerer Variablen

Ableitung eines Polynoms

Theorem: Für jede positive ganze Zahl n ist die Ableitung von x^n durch $n\cdot x^{n-1}$ gegeben.

Beweis

$\mathrm{f}'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{x_1^n-x^n}{x_1-x}=?$ mit $x_1^n-x^n=(x_1-x)\left(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x+x_1^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \underbrace{\left(x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x + \ldots + x^{n-1}\right)}_{n\text{-mal}} = n \cdot x^{n-1}$$

q.e.d

Beispiel

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \frac{d\,f(x)}{dx}$$

bei Ableitungen nach der Zeit: $f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) \equiv \dot{f}(t)$

Definition einer Ableitung

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich und Wertebereich aus $\mathbb{R}$. Ist x eine Zahl aus dem Definitionsbereich von f und existiert $\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, so nennen wir diesen Grenzwert „Ableitung von f an der Stelle x“.

Beispiel: Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x})}{(x_1 - x)(\sqrt{x_1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$$

alternative Definition

$$x_1 = x + h$$

$$\lim_{n \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Existiert ein Grenzwert so heißt f „differenzierbar an der Stelle x“.

Ableitung einiger Funktionen

Konstante $\frac{d}{dx} c = 0$

Polynom $\frac{d}{dx} x^n = n\,x^{n-1}$

Sinus $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

Cosinus $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

Logarithmus $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$

Exponentialfunktionen $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

Ableitungen von Summen, Produkten etc...

Konstante $\frac{d}{dx}(c\cdot f)=c\cdot\frac{fd}{dx}$

Summe $\frac{d}{dx}(g+f)=\frac{dg}{dx}+\frac{df}{dx}$

Produkt $\frac{d}{dx}(g\cdot f)=(g'\cdot f)+(g\cdot f')$

Kette $y=\mathrm{f}(u)$ mit $u=\mathrm{g}(x)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du\,f}\cdot\frac{d}{dx\cdot g}$

<u>Beispiel</u>

$5\mathrm{u}=y \quad u=3\mathrm{x}^2$

$\frac{dy}{dx}=5\cdot 6\mathrm{x}+30\mathrm{x}$

Quotient $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

Umkehrfunktion und deren Ableitung

Sei $\mathrm{f}(x)$ eine eindeutige Funktion. Die Funktion g wird Umkehrfunktion genannt, wenn sie jeden Wert von $\mathrm{f}(x)$ die der Zahl x zuordnet.

<u>Beispiel</u>

$\mathrm{f}(x)=2x \Leftrightarrow y=2\mathrm{x} \Leftrightarrow x=\frac{y}{2} \Leftrightarrow \mathrm{g}(y)=\frac{y}{2}$

↪ Spiegelung an der $x=y$ -Geraden

$\mathrm{f}(x)=\lg(x) \Leftrightarrow y=\lg(x) \Leftrightarrow 10^y=x \Rightarrow \mathrm{g}(y)=10^y$

<u>Warnung:</u>

$g=f^{-1}$ *Achtung:* $f^{-1}\neq\frac{1}{f}$

<u>Ableitung der Umkehrfunktion</u>

$(f^{-1})'(\mathrm{f}(x))=\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}$ falls $\mathrm{f}'(x)\neq 0$

oder $u=f^{-1}(y)$ und $y=f(x) \Rightarrow \mathrm{u}(x)=f^{-1}(\mathrm{f}(x))=x$

$1=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}\Rightarrow\frac{du}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

q.e.d.

Ableitungen von x^a, b^x und x^x (Herleitungen)

1) $y=x^a$ aus $x=e^{\ln x}\Rightarrow e^u$ mit $u=a\cdot\ln x$

↪ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx\cdot e^u}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\frac{a}{x}=e^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x}=x^a\cdot\frac{a}{x}=a\,x^{a-1}$

2) $y=b^x-\left(e^{\ln b}\right)^x=e^{x\ln b}=e^u$ mit $u=x\cdot\ln b$

↪ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}\cdot e^u\cdot\frac{du}{dx}=e^u\ln b=b^x\cdot\ln b$

3) $y=x^x=\left(e^{\ln x}\right)^x=e^{x\ln x}=e^u$ mit $u=x\cdot\ln x$

↪ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du\cdot e^u}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot\left[\ln x+\frac{x}{x}\right]=x^x\cdot(\ln x+1)$

Höhere Ableitungen

zurück zum Beispiel:

- Die Geschwindigkeit ist die Änderungsrate der Wegstrecke.
- Die Änderungsrate der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung

Position: $s=\mathrm{f}(t)$

Ableitung ist die Geschwindigkeit: $\dot{s}=v=\frac{d}{dt}\cdot\mathrm{f}(t)=\dot{\mathrm{f}}$

Ableitung der Ableitung ist die Beschleunigung: $\ddot{s}=\dot{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{f}(t)\right)=a$

$\mathrm{f}''(x)$ oder y'' oder $\frac{d^2}{dt^2}(f(t))$

Nachtrag

$y=x^a\Rightarrow y'=ax^{a-1}$
$y=b^x\Rightarrow y'=b^x\cdot\ln b$
$y=x^x=(e^{\ln x})^x=e^{x\ln x}=e^U\ U=x\cdot\ln x$
$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}\frac{e^U\cdot du}{dx}=e^U(\ln x+\frac{x}{x})=x^x(\ln x+1)$

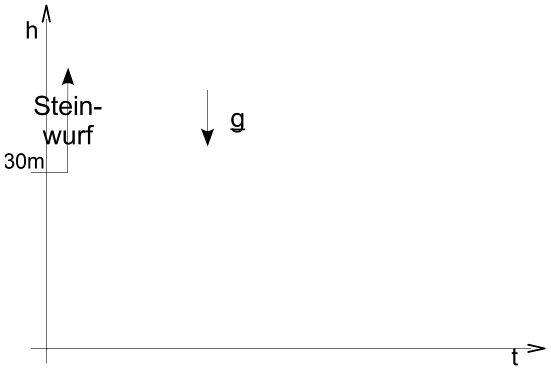
Zwei typischen Aufgaben

1. Ball von der Klippe

Ein Ball wird mit einer Geschwindigkeit von $20\frac{m}{s}$ von einer 30m hohen Klippe nach oben geworfen.

a) Wann erreicht der Ball seine größte Höhe?
b) Wie hoch ist er dann?
c) Wann fällt der Ball ins Meer?

Beschleunigung $a=-g=-9{,}81\frac{m}{s^2}=\frac{dv}{dt}$



Einschub:

Herangehensweise an Problem:

1) *Problem verstehen (zum Beispiel Skizze)*
2) *Übersetzen der Probleme in eine Formel*
3) *Rechnung (mit Buchstaben)*
4) *Zahlenwerte einsetzen (Einheitenkontrolle)*
5) *Einordnung der Ergebnisse*

$t=0$ → Geschwindigkeit $v=v_0=20\frac{m}{s} \Rightarrow c=20\frac{m}{s}$

mit Randbedingungen $\Rightarrow \mathrm{v}(t)=-g(t)+v_0$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_0\cdot t+R$$

$$\ldots=-\frac{1}{2}g\,t^2+20\frac{m}{s}t+30\mathrm{m}$$

Somit ist das Problem verstanden und in Formel übersetzt. Nun die Lösung der Aufgaben:

a) höchster Punkt bei $v=0$

$$\Rightarrow \mathrm{v}(t)=-g\,t+v_0=0 \Rightarrow t_m=\frac{v_0}{g}=\frac{20\frac{m}{s}}{9{,}81\frac{m}{s^2}}\approx 2\mathrm{s}$$

b) Wie hoch ist er dann?

$$y_m=-\frac{1}{2}g\,t\,m^2+v_0 t_m+y_0=-5\frac{m}{s^2}(2\mathrm{s})^2+20\frac{m}{s}\cdot 2\mathrm{s}+30\mathrm{m}=-20\mathrm{m}+40\mathrm{m}+30\mathrm{m}=50\mathrm{m}$$

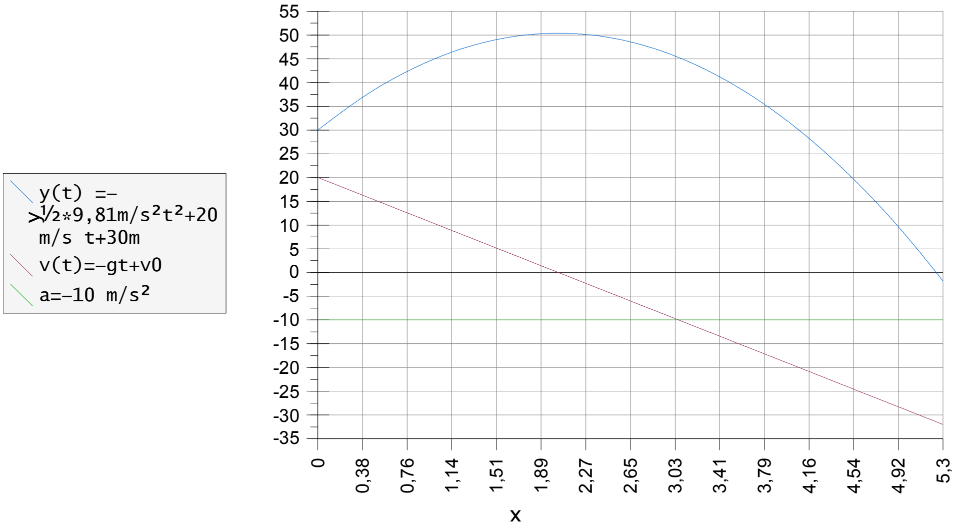
c) Wann auf dem Boden? Bei $y=0$!

$$\hookrightarrow\ -\frac{1}{2}g\,t^2+v_0 t+y_0=0 \Leftrightarrow t^2-\frac{2\mathrm{v}_0}{g}t-\frac{2\mathrm{y}_0}{g}=0$$

$$\Rightarrow t_b=-\frac{v_0}{g}\pm\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}+\frac{2\mathrm{y}_0}{g}}=\frac{-v_0}{g}\pm\frac{\sqrt{v_0^2+2\mathrm{gy}_0}}{g}=\frac{1}{g}\left[v_0\pm\sqrt{v_0^2-2\mathrm{gy}_0}\right]$$

$$\ldots=\frac{1}{9{,}81\frac{m}{s^2}}\left[20\frac{m}{s}\pm\sqrt{400\frac{m^2}{s^2}+600\frac{m^2}{s^2}}\right]=\left(2\pm\sqrt{10}\right)s=5{,}16\,s$$

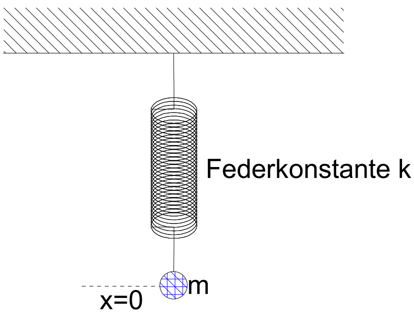
Graphische Darstellung



$$y(t)=-\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,t^2+20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,t+30\mathrm{m}$$

2. Federschwingungen

Federpendel



$$x(t)=A\cdot\sin(\omega t)$$

$$v(t)=\dot{x}=A\omega\cos(\omega t)$$

$$a(t)=\ddot{x}=-A\,\omega^2(\sin(\omega t))$$

bei $\frac{\pi}{4}$:

- ➔ min. Auslenkung
- ➔ max. Geschwindigkeit
- ➔ min. Beschleunigung

bei $\frac{5\pi}{2}$:

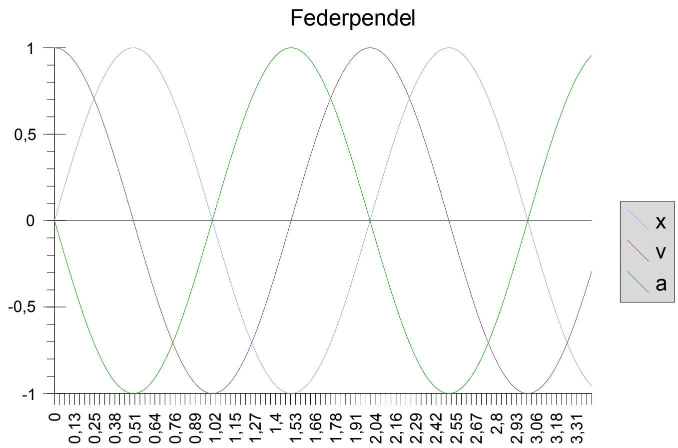
- ➔ max. Auslenkung
- ➔ min. Geschwindigkeit
- ➔ max. Beschleunigung

Bewegung der Masse m wird beschrieben durch die Bewegungsgleichung $x(t)=A\cdot\sin(\omega t)$.

Die Kreisfrequenz ist $\omega=2\pi f$ $[\omega]=\frac{1}{s}\left[\ldots=\frac{rad}{s}\right]$,

$[f]=\frac{1}{s}=\mathrm{Hertz}$.

Wie sieht die Bewegung also aus?



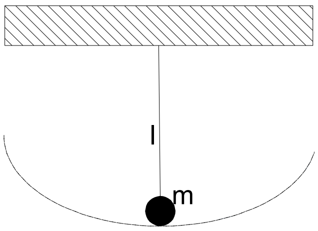
- mathematisch: $\ddot{x}=\omega^2 x(t)$ (※)
- „DGL einer harmonischen Schwingung“

– physikalisch: $m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \overset{\text{Hook'sches Gesetz}}{=} -k \cdot x$ (※※)

$$F = m \cdot a \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

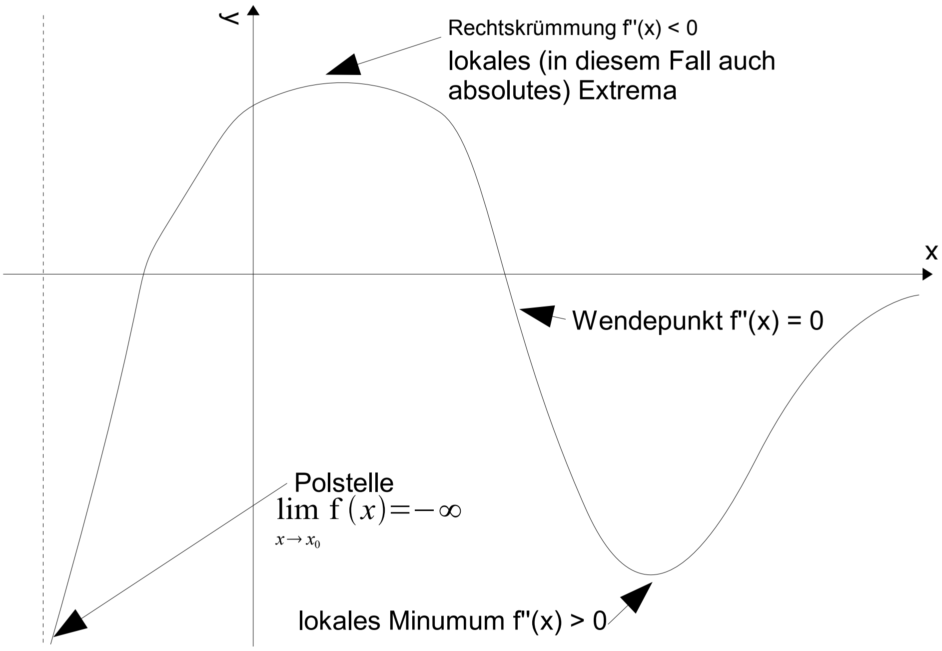
Vergleich (※) mit (※※) ⇒ $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$

Fadenpendel



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Kurvendiskussion



<u>Beispiel</u>

$$f(x) = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = e^x + x e^x = e^x(1+x)$$

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = e^x + e^x + x e^x = e^x(2+x)$$

Asymptotisches Verhalten:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x e^x = \infty$

Extremwerte:

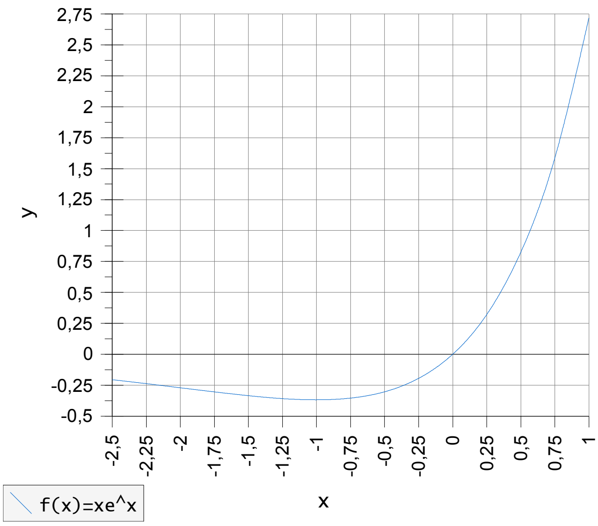
$$f'(x)<0$$
$$\Leftrightarrow e^x(1+x)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1$$

Krümmung:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x(2+x)$$

Vorzeichen ist $2+x$ bestimmt:

- $f''(x)<0 \Leftrightarrow 2+x<0 \Rightarrow x<-2$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2+x>0 \Rightarrow x>-2$
- Minimum bei $x=-1$
- Wendepunkt bei $x=-2$



Minimum-Maximum-Rechnungen

Oft nötig bei Optimierungsproblemen.

Beispiele:

- minimale Oberfläche einer Verpackung
- maximale Steifigkeit eines Balkens
- Kosten-Nutzen-Rechnungen (Finanzoptimierung)
- Optimierung der Dauer einer Wegstrecke

Vorgehensweise:

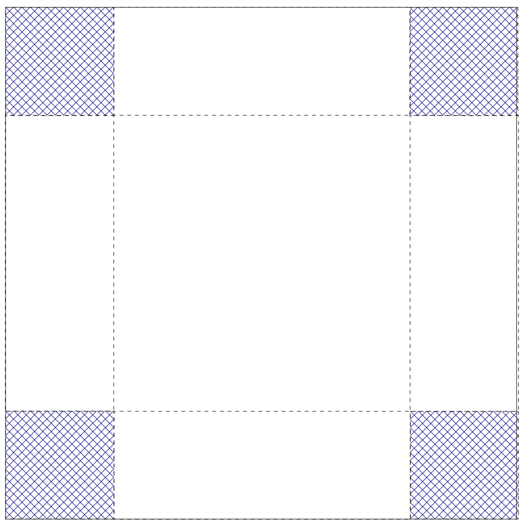
Das Problem muss in einer Funktion übersetzt werden

↳ Extremwerte dieser Funktion finden

↳ Nicht-trivale Lösungen ergeben viel aus lokalen Extremwerten

↳ Abhängigkeit muss mindestens quadratisch sein

Beispiel



Ein Karton mit Seitenlänge 12cm wird geschnitten und zu einer Schachtel gefaltet.

Frage: Wie groß muss x gewählt werden, damit das Volumen maximal wird?

Volumen

$$V(x)=(12-2x)^2=(144-48x+4x^2)x=4x^3-48x^2+144x$$

$$x \in [\overset{\text{gar nicht schneiden}}{0} ; \underset{\text{bis zur Mitte schneiden}}{6}]$$

Extrema

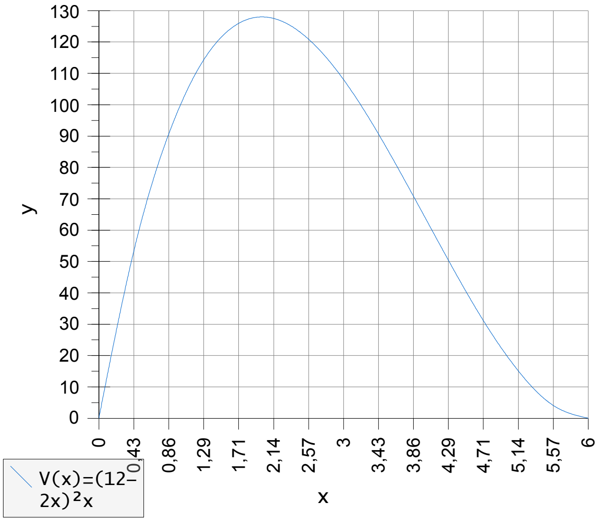
$$V(x) \to 0 \text{ für } \begin{matrix} x \to 0 \\ x \to 6 \end{matrix}$$

Ableiten

$$\frac{d}{dx}\mathrm{V}(x)=12x^2-96x+144\overset{!}{=}0\Leftrightarrow x^2-8\mathrm{x}+12=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{8}{2}\pm\sqrt{\frac{64}{4}-12}=4\pm\sqrt{4}\Rightarrow x_{1,2}=\begin{cases}4+\sqrt{4}=6\\4-\sqrt{4}=2\end{cases}$$

→ Volumen: $\mathrm{V}(2)=126[\mathrm{cm}^3]$



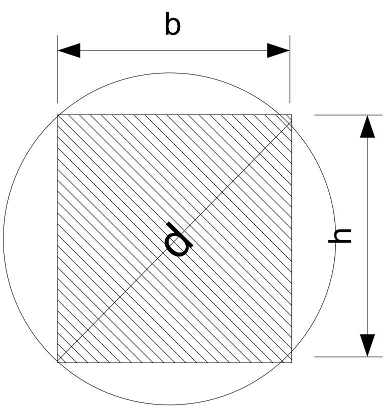
→ allgemeine Rechnung zeigt für einen Karton der Seitenlänge L $x=\frac{L}{6}$ optimiert das Schachtelvolumen.

Beispiel

Die Stetigkeit eines Balkens ist proportional zur Breite b und einem Kubus seiner Höhe h^3 $\left(s\propto b\cdot h^3\right)$.

Aufgabe

In welche Form soll der Balken aus einem Rundbalken mit Durchmesser d geschnitten werden für maximale Steifigkeit?



Pythagoras: $d^2=b^2+h^2\Rightarrow h=\sqrt{d^2-b^2}$

→ $S=b\cdot\sqrt{d^2-b^2}^3=\mathrm{S}(b)$

Ableiten:

$$\frac{dS}{db}=\left(d^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}+b\left(\frac{3}{2}\cdot\left(d^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\underset{\uparrow\text{ Nachdifferenzieren nicht vergessen!}}{(-2\mathrm{b})}\right)\overset{!}{=}0$$

1. Lösung:

   $d^2-b^2=0\Rightarrow b=d$ (Unsinn!)

2. Lösung

$$d^2-b^2-3\mathrm{b}^2=0\Rightarrow\Rightarrow d^2-4\mathrm{b}^2=0\Rightarrow b=\frac{d}{2}$$

⇒ h (Wurzel einsetzen)

$$h=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{4}}=d\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}d$$

Taylorsches Polynom

Man kann komplizierte analytische Ausdrücke annähern und zwar durch eine (nach wenigen Gliedern abgebrochene) Potenzreihe.

Einschub

später: $E = \underset{m=\mathrm{m}(\gamma)}{m} c^2 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Folge

Funktion, die jeder positiven ganzen Zahl n eine Zahl a_n zuordnet.

Beispiel

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (Definition der Eulerzahl)

Beispiel

ein radioaktives Präparat. Innerhalb einer Stunde zerfällt die Hälfte des Atome.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (konvergente Folge)

Reihe

Folge der Summen $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ die sich aus der Folge a_n ergibt.

Beispiel

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$ („geometrische Reihe“)

Beispiel

$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ „harmonische Reihe“

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\ldots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \to \infty$$

harmonische Reihe ist divergent.

Merke: Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ist konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potenzreihe

Potenzreihe von $\mathrm{f}(x)$ im Intervall um $x=0$. Es sei $R>0$ und es gelte $\mathrm{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$ für $|x| < R$ dann sind die Koeffizienten a_n gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

„Beweis“

$$f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \ldots = a_0$$
$$f'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0 \ldots = a_1\, 1!$$
$$f''(0) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 \cdot 0 + \ldots = a_2\, 2!$$
$$f'''(0) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 \cdot 0 + \ldots = a_3\, 3!$$
$$f^{(4)}(0) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 + \ldots = a_4\, 4!$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = \ldots = a_n\, n!$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

q.e.d.

Beispiel

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = e^x$$
$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{n} \frac{x^n}{n!}$$

zu Hause:

zeige dass $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

Das Taylor'sche Polynom

Die Funktion f hat an der Stelle a alle Ableitungen bis zur Ordnung n.

Dann ist:

$T_n(x, a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a)(x-a)^n$ das Taylor'sche Polynom vom Grad n an der Stelle a.

Satz

Es sei $T_n(x, a)$ das Taylor'sche Polynom vom Grad n an der Stelle a. Dann ist für $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ die j-te Ableitung von $T_n(x, a)$ an der Stelle $x = a$ gleich der j-ten Ableitung von $f(x)$ bei $x = a$.

Nebenbemerkung

$T(x, 0)$ ist die obige Potenzreihe um $x = 0$, spezielle Taylorreihe

Beispiel

$$f(x) = \ln(x)_{[x=1]}$$

$$\ln(x)_{[x=1]} = \ln(1)$$
$$+\frac{d}{dx}(\ln x)_{[x=1]}(x-1)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(\ln(x))_{[x=1]}(x-1)^2$$
$$+\ldots$$
$$\ldots = 0 + \frac{1}{x_{[x=1]}}(x-1) + \frac{1}{2}(-1)\frac{1}{x^2_{[x=1]}}(x-1)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(-1)(-2)\frac{1}{x^3_{[x=1]}}(x-1)^3 + \ldots$$
$$\ldots = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$$
$$\ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k}$$

$[x=1]$ heißt: 'in der Umgebung von $x=1$ '

Beispiel aus der Relativitätstheorie

$$\underset{\uparrow 1}{E} = mc^2 \Rightarrow E_{\text{kin}} = \underbrace{mc^2}_{\text{Gesamternergie}} - \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}}$$

Gesamtenergie: setzt sich zusammen aus „Ruheenergie" eines Körpers und der „kinetischen Energie". Die kinetische Energie ist aus der Schule bekannt: $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$

γ -Faktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}(\beta) = m_0 \cdot c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow E_{kin} = mc^2 m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_{0c}^2(\gamma - 1)$$

Idee: Taylorentwicklung von $\mathrm{E}(\beta)$ um $\beta = 0$

$$\mathrm{E}(\beta) = m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{d\beta}\mathrm{E}(\beta) = m_0 c^2 \left[-\frac{1}{2}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}(-2\beta)\right] = m_0 c^2 \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-b^2}^3}\right)$$

$$\frac{d^2}{d\beta^2}\mathrm{E}(\beta) = m_0 c^2 \left[(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} + \beta\left(-\frac{3}{2}(1-\beta^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2\beta)\right)\right] = m_o c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{3\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}^5}\right]$$

Ergebnis:

$$\mathrm{E}(\beta)_{[\beta=0]} = \mathrm{E}(0) + \beta\,\mathrm{E}'(0) + \frac{\beta^2}{2}\mathrm{E}''(0) = m_0 c^2\left[1 + 0 + \frac{1}{2}\beta^2\right] = m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2}m_0 c^2 \beta^2 \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

$\ldots = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2$ (dies kennen wir aus der Schule ☺)

⇒ Taylorentwicklung der relativistischen Gesamtenergie um $\beta = 0$ (niedrige Energien, nicht relativistische Grenze) ergibt wieder die „bekannte" kinetische Energie.

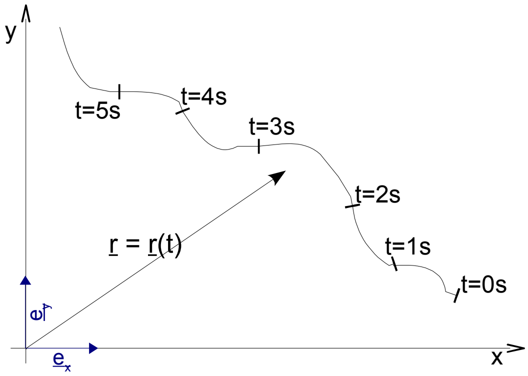
Ableiten einer Vektorfunktion

Viele Größen sind Vektorgrößen wie zum Beispiel Geschwindigkeit, Beschleunigung, ... !

Beispiel

Ein Massepunkt (Teilchen) bewegt sich in einem Koordinatensystem

Zur Zeit t wird sein Aufenthaltsort durch einen Ortsvektor angegeben.



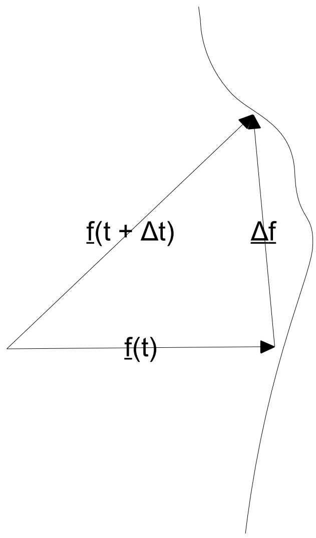
$$\underline{r} = x \cdot \underline{e_x} + y \cdot \underline{e_y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(positiv) \\ y(positiv) \end{pmatrix}$$

Eigener Kommentar:

Siehe Animation unter

http://www.walter-fendt.de/ph14d/wurf.htm

Bildlich



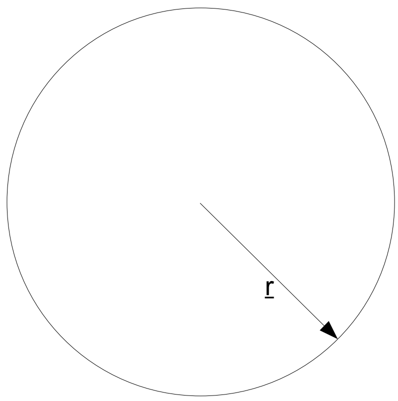
t: Laufvariable ersetzt x.
Abhängigkeit kann nicht gezeichnet werden (oder nur komplizierter Weise).

Für $\Delta t \rightarrow 0$ wird sich $\underline{\Delta f}$ immer mehr der Tangente an die Wegstrecke, die die Spitze von $\underline{f}$ erklärt, annähern. $\Rightarrow \underline{f}'(t)$: „Tangentenvektor“ genannt.

Beispiel: Kreisbewegung

Länge von $\underline{r}(t)$ ist nicht von t abhängig

$$r^2 = \underline{r} \cdot \underline{r}$$



$$\frac{d}{dt}(r^2) = \underline{\dot{r}} \cdot \underline{r} + \underline{r} \cdot \underline{\dot{r}} = 2 \cdot \underline{r} \cdot \underline{\dot{r}}$$

außerdem: $2\,\underline{r}\,\underline{\dot{r}} = 2r\frac{dr}{dt}$

$$\Rightarrow 2\,\underline{r}\,\underline{\dot{r}} = 2r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \underline{2}r = r\frac{dr}{dt}$$

$r = |\underline{r}|$ ist konstant $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{r} \cdot \underline{\dot{r}} = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{r}$ und $\underline{\dot{r}} = \underline{v}$ stehen senkrecht aufeinander (siehe oben).

Eigener Kommentar:

Siehe Animation für Kreisfunktionen unter

http://www.walter-fendt.de/ph14d/kreisbewegung.htm

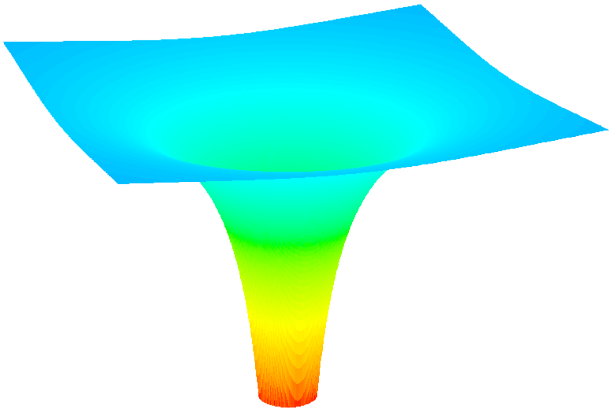
Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Der Graph einer Funktion $f(x, y)$ besteht aus Punkten (x, y, z), die die Gleichung $z = f(x, y)$ erfüllen.

Die sist die Funktion zweier Variabler ⇒ der Graph ist eine Fläche.

Beispiel

$\mathrm{f}(x,y)=x^2+y^2$



Gravitationspotential

$$E=-\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\underline{e}_r$$

$$\phi(r)=\gamma\frac{m_1 m_2}{r}$$

Partielle Ableitung

Betrachte 1-dimensionale Funktion $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x,b)$
$b=\text{konstant}$

⇒ Steigung der Funktion $\mathrm{g}(x)$ an der Stelle $x=a$ bestimmen, wie im Fall der 1-dimensionalen Differenziation.

Definition der partiellen Ableitung

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x,y)-\mathrm{f}(x,y)}{\Delta x}$$

analog für $\mathrm{f}_y=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}$

Beispiele

- $\mathrm{f}(x,y)=x^2 y$ $\quad\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}=2\mathrm{xy}$ $\quad\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}=x^2$
- $\mathrm{f}(x,y)=2x+4\mathrm{y}+x^2$ Steigung in $(0{,}0)$?

  $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}=2+2\mathrm{x}$

  $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}=4$

  ⇒ $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}$ an der Stelle $x=0$ = 2

2. Ableitung oder höhere

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x\,\partial y}=2\mathrm{xy}$$

ohne Beweis: $f_{xy}=f_{yx}$

Gestern:

Anwendungen in der Differentialrechnung:

- $\mathrm{s}(t)\to\mathrm{v}(t)\to\mathrm{a}(t)$
- Kurvendiskussion → Minimal-Maximal-Rechnungen

- Taylorreihenentwicklungen → $\mathrm{E}(\beta)$ um $\beta=0$ entwickelt
- Ableitungen von Vektorfunktionen
- Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen

$$\mathrm{f}(x,y)=x^2+y^2$$
$$\Rightarrow \frac{\delta f}{\delta x}=2\mathrm{x}$$

Integralrechnung

Motivation

Bestimmung des zurückgelegten Weges bei veränderlicher Geschwindigkeit.

Rakete: $\mathrm{v}(t)=2\frac{m}{s^3}t^2$

$$\left.\begin{aligned} S_u&=\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{v}(t_i)\Delta t \\ S_o&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}(t_i)\Delta t \end{aligned}\right\}\text{gemeinsamer Grenzwert}=\text{gesuchtes Ergebnis}$$

$$S=\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(0)=\int_0^t \mathrm{f}(t')\,dt'$$

$$S=\int_{0\mathrm{s}}^{3\mathrm{s}} 2\frac{m}{s^3}t'^2\,dt'=2\frac{m}{s^3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0\mathrm{s}}^{3\mathrm{s}}=2\frac{m}{s^3}\left[\frac{27}{3}s^3-0\,s^3\right]=18\mathrm{m}$$

Themen

- Beispiele für bestimmte Integrale
- Hauptsatz der Infinitesimalrechnung
- Schreibweisen und Begriffe
- Finden einer Stammfunktion – Methoden
- Integralfunktionen
- Uneigentliche Integrale
- Nummerische Integrale
- Anwendungen
- [Kurvenintegrale, Flächenintegrale, DGL]

Integralrechnung

Beispiele für bestimmte Integrale

Aufgaben

A1) Ein Stein fällt mit einer Geschwindigkeit von $\mathrm{v}(t)=10\frac{m}{s^2}t$. Wie tief ist er nach 2 Sekunden gefallen?

A2) Wie groß ist die Fläche des Gebiets, das durch $y=x$, der x-Achse und die Vertikale bei $x=3$ begrenzt ist?

A3) Eine inhomogene Stange ($l=10\text{cm}$, Querschnitt = 1cm^2) hat die Dichte $\varrho=100\frac{g}{cm^3}\cdot\frac{x}{cm}$. Wie groß ist die Gesamtmasse der Stange?

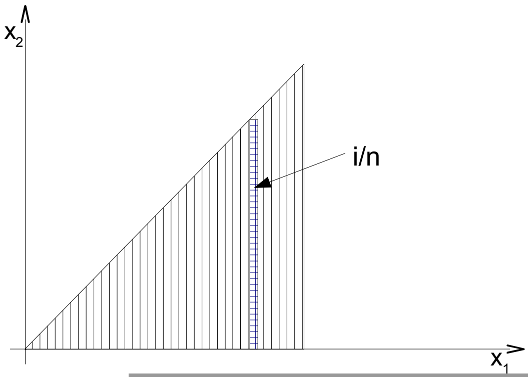
Lösungen

A1) $S=\lim_{n\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}_i(t_i)\Delta t_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{v}_i\left(\frac{t}{n}\cdot 2\mathrm{s}\right)\cdot\frac{2\mathrm{s}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{i}{n}\cdot 2\mathrm{s}\cdot\frac{2\mathrm{s}}{n}=40\mathrm{m}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}$

A2) $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{y}(x_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot 3\cdot\frac{3}{n}=9\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}$

A3) $m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varrho(x_i)\cdot Q\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}1\,cm^2\cdot 100\frac{g}{cm^3}\cdot\frac{i}{n}\cdot 10\frac{cm}{cm}\cdot 10\frac{cm}{n}=10\mathrm{kg}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}$

Immer wieder: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}$ ← Riemann Summe



Fläche:

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

→ Bestimmtes Integral ist Grenzwert einer Summe.

zu 1) 20m

zu 2) 4,5

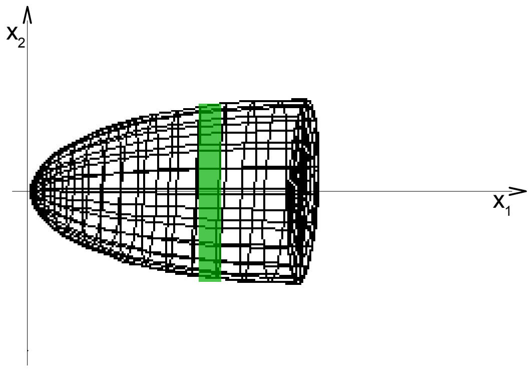
zu 3) 5kg

Kommentar:

Oft gibt es keine analytische Lösung für das Integral $\int 2^{x^2}dx$
→ Nummerische Lösung über Summenbildung

Erweiterung in mehr Dimensionen

Beispiel: Volumen eines Scheinwerfers $\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)$



Einteilung in infinitesimal kleine Scheibchen mit Volumen

$$\underbrace{r^2\pi}_{\text{Kreis}}\cdot\Delta x=\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2\pi\,\Delta x=x\cdot\Delta x$$

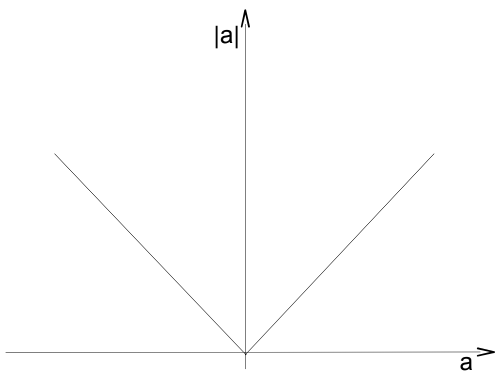
$$\Rightarrow V_{ges}=\sum_{i=1}^{n}V_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{1}{n}$$

$$\to\ V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Ableitung: Steigung an einem Punkt → lokale Information (nur möglich, wenn Funktion differenzierbar ist → „keinen Knick“).

$\mathrm{f}(a)=|a|$ ist nicht differenzierbar bei $a=0$



Integral: Fläche eines Gebiets → globale Information (möglich, wenn die Funktion stückchenweise stetig ist in der Regel eher möglich als Differenziation)

Enge Beziehung zwischen Integrieren und Ableiten.

$$\mathrm{f}(x) \overset{\text{INT.}}{\rightarrow} \mathrm{F}(x)$$

$$\mathrm{F}(x) \overset{\text{ABL.}}{\rightarrow} \mathrm{f}(x)$$

1. Hauptsatz

Sei $\mathrm{f}=F'$ die Ableitung einer Funktion und stetig in $[a;b]$, dann gilt $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

plausible Erklärung: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\int_a^b \frac{dF}{dx}dx=\int_a^b dF=\mathrm{F}[\ldots]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

Also will man das Integral von $\mathrm{f}(x)$ bestimmen, suchen $\mathrm{F}(x)$ mit der Ableitung $\mathrm{f}(x)$.

Beispiel

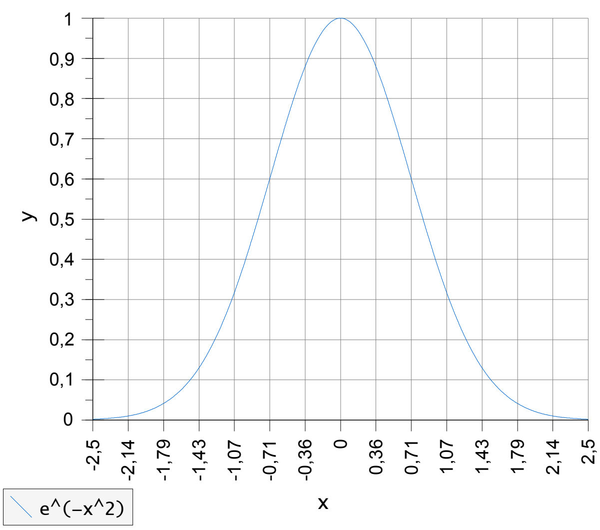
$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \mathrm{F}(x)=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)$ „Stammfunktion"

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \overset{\downarrow\text{HS}}{=} \mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)=2e^1\left(\sqrt{1}-1\right)-2(-1)=2$$

Beispiel

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \Rightarrow \mathrm{F}(x)=?$ Es existiert keine elementare Funktion, deren Ableitung e^{-x^2} ist.

Trotzdem existiert das Integral (als Fläche unter der Kurve) zum Beispiel die Lastverteilung:
$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$



→ Das Bilden einer Ableitung immer möglich

→ Finden einer Stammfunktion ist oft schwierig, oft unmöglich.

2. Hauptsatz

(Ist die Umkehrung des 1. Hauptsatzes.)

Sei f stetig in $[a;b]$ mit $a\leq x<b$ und sei $\mathrm{G}(x)=\int_a^x \mathrm{f}(x')\,dx'$, dann ist $\mathrm{G}'(x)=f(x)$.

Schreibweisen

$\int f(x)\,dx = \int dx\, f(x)$ (Vorteil: sofort klar, über welche Variable integriert werden muss)

$\int dx$ = Operator, der auf alles rechts von ihm wirkt

$\int dx\, x^2 + 5$ → Klammern setzen ist sehr wichtig!

$\int_a^b dx\,(x^2+5) \neq \left(\int_a^b dx\, x^2\right) + 5$

„Stammfunktion“

Jede Funktion F mit Ableitung f wird Stammfunktion genannt (von f).

Ist F Stammfunktion, dann ist $F + C$ ($C = \text{Konstante}$) ebenfalls Stammfunktion.

Beispiel

$(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow x^3$ ist Stammfunktion zu $3x^2$

$x^3 + 2\frac{\pi}{27}$ ist ebenfalls Stammfunktion! $\left(x^3 + 2\frac{\pi}{27}\right)' = 3x^2$

In Physik oft als Randbedingung des Problems!

Begriffe

- Integral = Operator $\int dx$
- Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ = Zahl [ggf. Einheit]
- unbestimmte Integrale = Stammfunktion $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- Integrant $\int dx \quad \underbrace{f(x)}_{\text{zu integrierende Funktion}}$
- Differenzial = dx

Berechnen von Integralen

(Finden der Stammfunktion)

1. Weg in der Praxis:

- Wissen
- Integraltafeln
- Computeralgebra-Programme (zum Beispiel Maple)

Dennoch ist Grundwissen nötig um

1) ein spezielles Integral in eine Form umzuwandeln, die man in Tafeln findet
2) Ergebnis des Computeralgebra-Programms zu überprüfen/beurteilen. (Auf Eingabefehler / Syntaxfehler achten!)

Wissenswerte Integrale

(in der Regel wird das c weggelassen)

- $\int 1\,dx = x$

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$
- $\int e^x\,dx = e^x$
- $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x\,dx$
- $\int \cos c\,dx = \sin x$

Grundregeln

- $\int c\,\mathrm{f}(x) = c\int \mathrm{f}(x)\,dx$ Tipp: Am Anfang der Rechnung eine Ersetzung $K = [\text{alle Konstanten hier rein}]$
- $\int (\mathrm{f}(x)+\mathrm{g}(x))\,dx = \int \mathrm{f}(x)\,dx + \int \mathrm{g}(x)\,dx$
- $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|\mathrm{f}|$

Beispiel

$$\int\left(3\cos x - 4\sin x + \frac{1}{x^2}\right)dx = 3\int dx\cos x - 4\int dx\sin x + \int\frac{dx}{x^2} = 3\sin x + 4\cos x - \frac{1}{x}$$

Methoden in der Integralrechnung

Substitutionsmethode (inspiriert von Kettenregel)

Eine Funktion wird eingeführt, die die Form der Integranden vereinfachen soll.

Beispiel

$$\int \sin(x^2)\cdot 2\mathrm{x}\,dx$$

$2\mathrm{x}$ ist die Ableitung von x^2 ! ⇒ Definition $\mathrm{u}(x) = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\mathrm{x} \Rightarrow dx = \frac{du}{2\mathrm{x}}$

Also: $\int \sin(x^2)\cdot 2\mathrm{x}\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u \underset{\uparrow 1}{=} -\cos(x^2)$

1: Substitution wieder rückgängig machen

Beispiel

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx\,u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3\mathrm{x}^3\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3\mathrm{x}^2}$$

Also: $\int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{2}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{u} \underset{\uparrow 1}{=} \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$

1: Substitution wieder rückgängig machen

> *Kommentar:*
>
> $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ *hat keine elementare Stammfunktion!*

Beispiel

$$\frac{\int x^2+1}{2x-3}dx$$

Versuch: $u=2x-3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2 \quad x=\frac{u+3}{2}$

Also: $\frac{\int \left(\frac{u+3}{2}\right)^2+1}{u}\frac{du}{2}=\frac{\int (u+3)^2+4}{8u}du=\frac{\int u^2+6u+13}{8u}du$

$$\ldots=\int\left(\frac{u}{8}+\frac{3}{4}+\frac{13}{8u}\right)du=\frac{u^2}{16}+\frac{3}{4}u+\frac{13}{8}\ln|u|$$

$$\ldots\underset{\uparrow 2}{=}\frac{(2x+3)^2}{16}+\frac{3}{4}(2x-3)+\frac{13}{8}\ln|2x-3|$$

2: Substitution rückgängig machen

> *Tipp:*
> *Nochmal eine Substitution verwenden.*

Partielle Integration

(inspiriert durch die Produktregel)

$(uv)'=u\cdot v'+u'\cdot v$ (integriere ganze Gleichung)

$\Rightarrow \int (uv)'\,dx=\int uv'\,dx+\int u'v\,dx$

$\Leftrightarrow u\cdot v=\int uv'\,dx+\int u'v\,dx$

$$\Rightarrow \underbrace{\int uv'\,dx}_{\text{schwer zu lösen}}=uv-\underbrace{\int u'v\,dx}_{\text{(hoffentlich) leicht zu lösen}}$$

Vereinfachte Schreibweise: $\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$

Beispiel

$\int x\cdot e^{-x}\,dx$

$u=x \quad \Rightarrow du=dx$

$dv=e^{-x} \quad \Rightarrow v=-e^{-x}$

$$\Rightarrow \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\underbrace{e^{-x}}_{v'}dx}_{dv}=\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v}-\int\underbrace{-e^{-x}}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x}\,dx=-xe=(-1-x)\,e^{-x}=-(1+x)\,e^{-x}$$

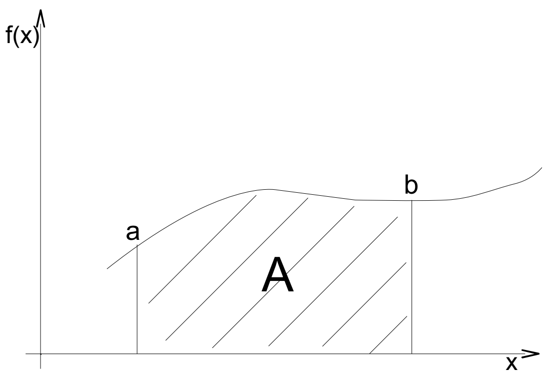
Beispiel

$\int \ln x=\int 1\cdot\ln x\,dx$, $u=\ln x$, $dv=1$, $du=\frac{1}{x}$, $v=x$

$$\int \ln(x)dx=x\cdot\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln(x)-x=x(\ln x-1)$$

Bestimmtes Integral

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$



Beispiel

$$m = \int \varrho \, dV$$

$$\mathrm{s}(t) = \int_{t_i}^{t_2} \mathrm{v}(t) \, dt$$

allgemeine Eigenschaften bestimmter Integrale

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \, dx = -\int_b^a \mathrm{f}(x) \, dx$$

$$\int_a^a \mathrm{f}(x) \, dx = 0$$

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \, dx = \int_a^c \mathrm{f}(x) dx + \int_c^b \mathrm{f}(x) \, dx$$

$\int_a^b \mathrm{f}(x) \, dx \leq \int_a^b \mathrm{g}(x) \, dx$ falls $(\mathrm{f}(x) \leq \mathrm{g}(x)) \in [a; b]$

$\int_a^b \mathrm{f}(x) \, dx = \underbrace{\mathrm{f}(\xi)(b-a)}_{\text{Rechteck}}$ „Mittelwertsatz der Integralrechnung"

Integralfunktionen

Stößt man immer wieder auf einen Integranden zu dem man die Stammfunktion nicht finden kann, „dann dreht man den Spieß einfach um".

Man definiert eine neue Funktion: $\mathrm{F}(x) = \int_a^x \mathrm{f}(x') \, dx'$

➔ numerisch auswerten für viele x

➔ Tabellen

Beispiele

1) Gamma-Funktion

   $$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \, dt$$

   für den Fall $n = x$ ist $\Gamma(n+1) = n!$

   Die Gamma-Funktion erweitert die Fakultätsfunktion auf die positiven reellen Zahlen.

2) Fehler-Funktionen

   $$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

   ist die Integration der Gauß Normalverteilung (Große Bedeutung in der Statistik)

3) Elliptisches Integral

   $\mathrm{F}(k; x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$ hilft bei der Umfangsbestimmung von Ellipsen

Uneigentliche Integrale

➔ Integral über ein unbeschränktes Intervall

➔ Integral über eine unbeschränkte Funktion

$\int_a^\infty \mathrm{f}(x) \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b \mathrm{f}(x) \, dx$ heißt „uneigentliches Integral" falls dieses linear existiert.

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right)=1$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{\substack{b\to\infty\\a\to\infty}}\arctan x\Bigg]_a^b=\lim_{\substack{b\to\infty\\a\to-\infty}}\arctan(b)-\lim_{\substack{b\to\infty\\a\to-\infty}}\arctan(a)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

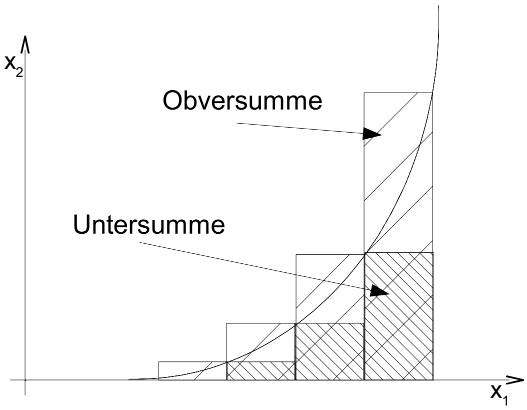
$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$ (existiert nicht, obwohl $f(x)\to 0$ für $x\to 0$)

$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (keine elementare Stammfunktion, aber das uneigentliche Integral ist elementar)

Numerische Integration

(für wenn man nicht elementar integrieren kann)

1) „Kästchen Zählen"
   Zeichne die Funktion (Millimeterpapier) und bestimme die Fläche durch Zählen der Kästchen.
2) Heute: Nummerische Integration mit Rechnern



- Rechteckformel mit Ober- und Untersumme
- Trapezformel mit linearen Verlauf zwischen x_i und x_{i+1}
- Parabelformel mit Parametrisierung von $f(x)$.

⇒ Summen

Nummerische Integration liefert <u>immer</u> ein bestimmtes Integral (keine Stammfunktion!).

Genauigkeit liegt in Ihrem Ermessen.

Ergebnis sollte sich so wenig ändern, dass man es für zulässig hält.

Gestern

- Grundregeln der Integralrechnung
- Begriffe
- Handwerk der Infinitesimalrechnung
- Methoden zum Finden einer Stammfunktion
  - Partielle Integration

  - Substitution
- Bestimmte Integrale
- Uneigentliche Integrale (mit Unendlichkeiten)
- Nummerische Integration

Anwendungen bestimmter Integrale

Mittelung von Funktionen:

arithmetisches Mittel

(Addition von einzelnen Werten x_i und Division durch die Anzahl der einzelnen Werte $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$)

analog hierzu lassen sich Mittelwerte von Summen bestimmen

$$\bar{\mathrm{f}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum \mathrm{f}(x_i)\Delta x_i}{n\cdot\Delta x}=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx$$

$$\overline{\mathrm{f}^2}=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b \mathrm{f}^2(x)\,dx$$

mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert „Varianz“

$$\Delta\mathrm{f}=\sqrt{\overline{\mathrm{f}-\bar{\mathrm{f}}^2}}=\sqrt{\overline{\left(\mathrm{f}^2-2\,\mathrm{f}\,\bar{\mathrm{f}}+\bar{\mathrm{f}}^2\right)}}=\sqrt{\overline{\mathrm{f}^2}-\bar{\mathrm{f}}^2}$$

Beispiele

Harmonischer Oszillator (Federpendel)

$\mathrm{x}(t)=A\cdot\cos(\omega t)$ T: Schwingungsdauer

$\Rightarrow\bar{x}$: mittlerer Aufenthaltsort der schwingenden Masse

⇒ Ort: $\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T dt\,A\cdot\cos(\omega t)=0$

Potenzielle Energie

$$\bar{v}=\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{k}{2}x^2=\frac{1}{T}\cdot\frac{k}{2}\cdot A^2\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt=\frac{k}{4}A^2$$

Kinetische Energie

$$\bar{T}=\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{m}{2}\dot{x}^2=\frac{1}{T}\frac{m}{2}A^2\omega^2\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt=\frac{m\,\omega^2}{4}\cdot A^2$$

Anmerkung:

mit $k=m\omega^2$ *,* $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ *, ist* $\bar{v}=\bar{T}$ *.*

Nebenbemerkung zu Einheiten

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx\Rightarrow[dx]=[x]=[a]=[b]$$

Beispiel

lineare Massenverteilung

$\varrho(x)=\frac{1}{Q}\frac{dm}{dx}$ $\quad\frac{dm}{dx}=\sigma(x)$: lineare Massendichte

$\Rightarrow \sigma(x)\,dx$: Masse einer infinitesimal kleinen Stückchen

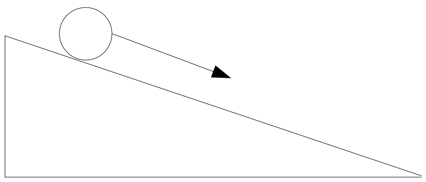
Gesamtmasse durch Integration

$$M=\int_0^L \sigma(x)\,dx$$

Schwerpunkt durch Integration

$$R=\frac{1}{M}\sum_i m_i x_i=\frac{1}{M}\int_0^L \sigma(x)\cdot x\,dx$$

Trägheitsmoment



$$F=m\cdot a$$

$$M=T\cdot\ddot{\alpha}$$

$$I=\sum_i m_i x_i^2=\int_0^L \sigma(x)x^2\,dx$$ „Momente einer Funktion“

Superposition („Überlagerung“) → Integralrechnung

Beispiel: (Vektorielle) Überlagerung von Kraftfeldern von verschiedenen Ladungsquellen

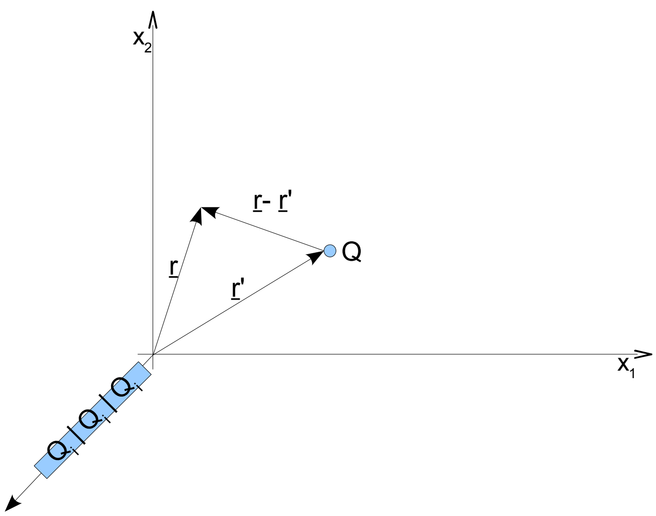
⇒ Addition der Potentiale

Coulombpotential

$$\mathrm{v}(\underline{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{\underline{r}-\underline{r}'}$$

Wie sieht das Potential eines geladenen Stabs entlang der x-Achse aus? $(y=z=0)$

Ladung auf Stab: $\sigma(x)$ Ladungsdichte der Länge



$$\mathrm{v}(\underline{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{Q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L dx'\,\frac{\sigma(x')}{\underbrace{\sqrt{(x-x')^2+y^2+z^2}}_{\text{Abstand zur } x\text{-Achse}}}$$ mit σ Ladungsdichte pro Länge

→ nicht immer einfach zu lösen

Integral über Vektor

Integral ist Summe

→ Vektoren werden komponentenweise summiert

$$\int dx \underline{f}(x) = \left(\int f_1(x) dx ; \int f_2(x) dx ; \int f_3(x) dx \right)$$

Beispiel

Betrachte eine zeitabhängige Kraft

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}(t)$$

Wie sieht die Geschwindigkeit aus?

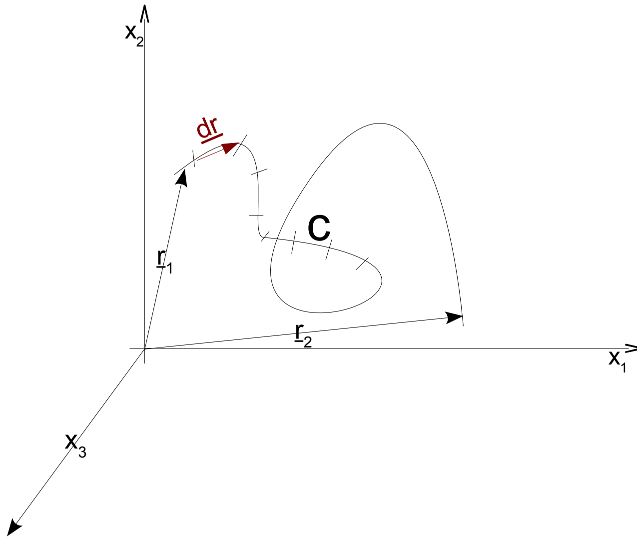
$$\int_0^t dt' m \cdot \underline{a}(t') = \int_0^t dt' \underbrace{m \cdot \dot{\underline{v}}(t')}_{\underline{F}(t')}$$

$$\Rightarrow \underline{v}(t) = \underline{v}(t_0) + \frac{1}{m} \left(\int_{t_0}^t F_1(t') dt' ; \int_{t_0}^t F_2(t') dt' ; \int_{t_0}^t F_3(t') dt \right)$$

Kurvenintegrale

Bisher wurde in allen Beispielen über eine Achse integriert (x -Ache, t -Achse). Doch viele Probleme in der Physik lassen sich so nicht lösen.

Beispiel: Länge eines Weges in 3D



Kurve c ist definiert als Schar von Ortsvektoren

$$|\underline{d}_r| = ds$$

Länge des Weges von 1 nach 2: $L = \int_c ds = \int_1^2 ds$

Beispiel: Arbeit entlang eines Wegs im Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$

$$A = \int_c \underline{dr} \, \underline{F}(\underline{r})$$

Kann man das ausrechnen?

$$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{d\underline{r}}{dt} \Rightarrow \underline{dr} = \underline{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underline{v}(t) \cdot \underline{F}(\underline{r}(t))$$

Nebenrechnung:

$$\underline{v}(t) \cdot \underline{F}(\underline{r}(t)) = m \cdot \underline{v} \cdot \underline{a} = m \cdot \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{\underline{v}}^2 \right]$$

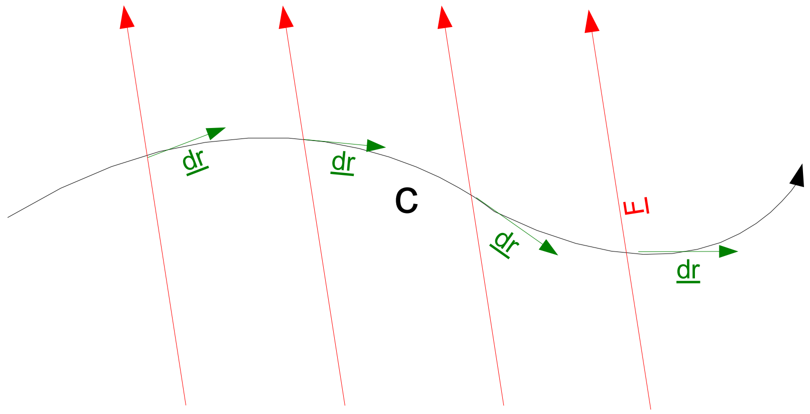
$$\ldots = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \underline{v}^2 \right] = T(t_2) - T(t_1)$$

⇒ Die im System verrichtete Arbeit ergibt eine erhöhte kinetische Energie!

Anschaulich

Inhalt der Fläche, die von der Funktion aufgespannt wird, dessen Werte sich aus der vom Weg- und

Kraftvektor (Skalarprodukt) in den Punkt der betrachteten Kurve ergeben.



Beispiel: Arbeit beim Heben eines Eimers, Tragen und wieder absetzen.

Welche Kurvenintegrale gibt es?

$\int_c ds\,\phi(\underline{r})$ Skalar

$\int_c \underline{dr}\,\phi(\underline{r})$ Vektor

$\int_c ds\,\underline{A}(\underline{r})$ Vektor

$\int_c \underline{dr}\,\underline{A}(\underline{r})$ Skalar

$\int_c \underline{dr}\,x\,\underline{A}(\underline{r})$ Vektor

Beispiel

Kraftfeld besitzt Ortsabhängigkeit $\underline{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$

Welche Arbeit wird verrichtet, wenn ein Teilchen in diesem Kraftfeld von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$ gebracht wird?

$$A=W=\int_{P_1}^{P_2} \underline{dr}\,\underline{F}(\underline{r})$$

Zunächst: Parametrisierung des Wegs (direkter Weg)

$\underline{r}(t)=t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $0\leq t\leq 1$

(oder: $x=t$, $y=t$, $z=t$)

Nun substituieren:

$$\int_{P_1}^{P_2} \underline{dr}\,\underline{F}(\underline{r})=\int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{\underline{dr}}{dt}dt\,\underline{F}(\underline{r}(t))=\int_{t_{min}}^{t_{max}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} dt=\int_{t_{min}}^{t_{max}} (2t+2t+2t)\,dt=\frac{1}{2}6t^2\Big]_0^1=3$$

Jetzt auf anderem Weg:

$$\underline{r}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \text{ mit } 0\le t\le 1$$

$$x=t\ ,\ \ y=t^2\ ,\ \ z=t^3$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{dr}}{dt}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \underline{dr}\,\underline{F}(\underline{r})=\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2+t^3 \\ t+t^3 \\ t+t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt$$

$$\ldots=\int_0^1 (t^2+t^3+2t^2+2t^4+3t^3+3t^4)\,dt=\int_0^1 (3t^2+4t^3+5t^4)\,dt$$

$$\ldots=\left[3\cdot\frac{1}{3}t^3\right]_0^1+\left[\frac{4\cdot 1}{4}t^4\right]_0^1+\left[5\cdot\frac{1}{5}+t^5\right]_0^1=1+1+1=3$$

Für konservative Kraftfelder ist die Arbeit wegabhängig.

Kein Zufall!

> <u>*Bemerkung:*</u>
>
> $r\circ t\,\underline{F}\Rightarrow$ *wegunabhängig*
>
> *„wirbelfreies Feld“*

<u>**Beispiel zum Selbststudium**</u>

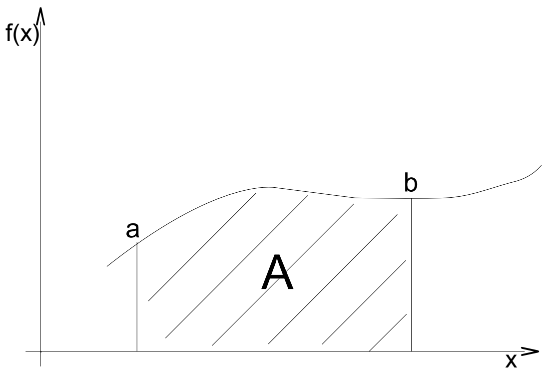
$$\underline{F}(\underline{r})=\begin{pmatrix} 3x^2+2y \\ -9yz \\ 8xz^2 \end{pmatrix}$$

1) Weg $c:(0,0,0)\rightarrow(1,1,1)$ direkt (Ergebnis: 1)
2) Weg $c:(0,0,0)\rightarrow(1,0,0)\rightarrow(1,1,0)\rightarrow(1,1,1)$ (Ergebnis: $\frac{11}{3}$)

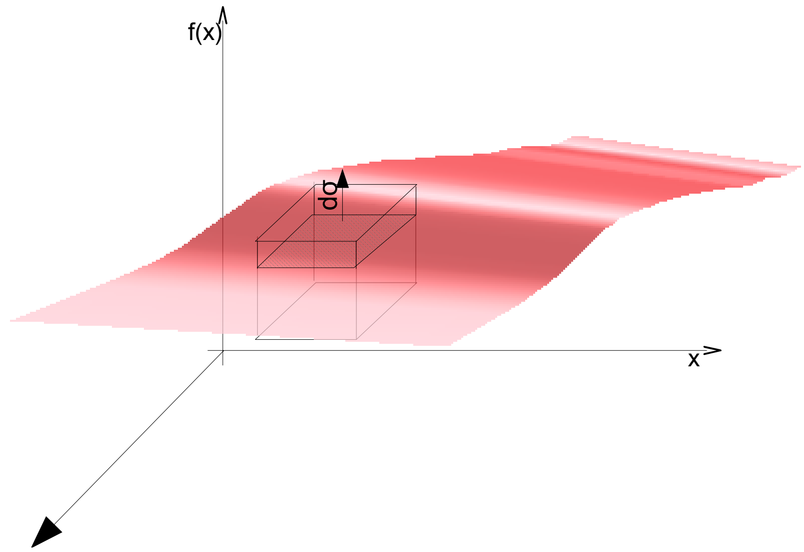
Flächenintegrale

(Verallgemeinerung der Integralbegriffs auf ebene oder gekrümmte Flächen.)

<u>So war es früher:</u>



so ist es heute:



Unterschiede

- skalares Flächenintegral: $\iint_F \mathrm{f}(\underline{r})\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i \mathrm{f}(\underline{\xi_i})$

  F: Oberfläche über die sich das Integral erstrecken soll

  $\mathrm{f}(\underline{r})$: skalare Funktion

  $d\sigma$: skalares Flächenelement

  $\Delta\sigma_i$: Flächenelement i

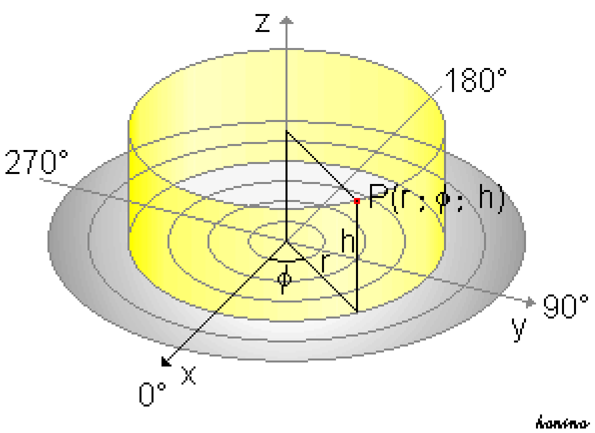
  $\underline{\xi_i}$: Ortsvektor $\underline{r}$, der an beliebiger Stelle an σ_i liegt.

- vektorielle Flächenintegrale: $\iint_F \underbrace{\mathrm{v}(\underline{r})}_{\text{Vektorfunktion}} \overbrace{d\underline{\sigma}}^{\text{Vektorielles Flächenelement}}$

Exkurs Koordinatensysteme

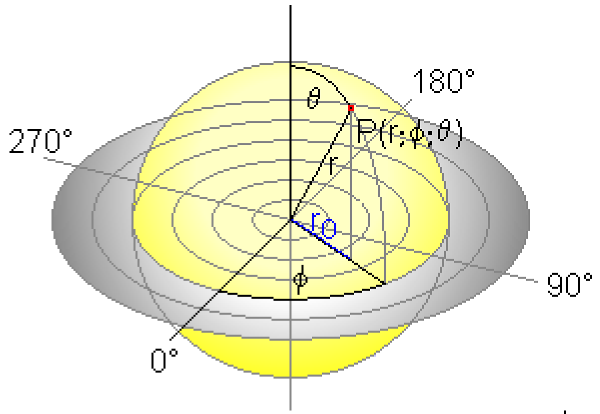
(oft sind andere als kartesische Koordinatensysteme geeignet)

Zylinderkoordinaten



$\phi = \sqrt{x^2+y^2}$, $(z=h)$, $\tan\phi \frac{x}{y}$

Kugelkoordinaten



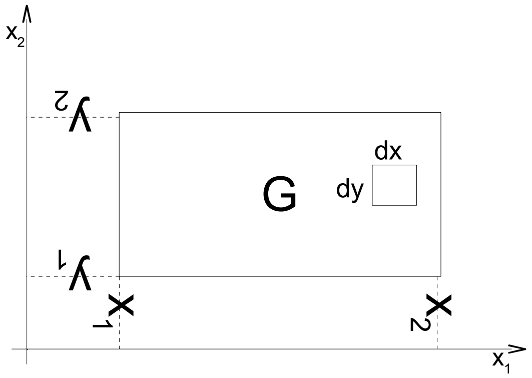
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\phi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$$

$$\tan\phi=\frac{x}{y}$$

Doppelintegrale

Ebene



$$\int_G dA=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} dx\,dy=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy$$

Doppelintegrale (nicht rechteckig)

$$\int_G \mathrm{f}(x,y)\,dx\,dy=\int_{x_a}^{x_b} dx \underbrace{\int_{\mathrm{y}_a(x)}^{\mathrm{y}_b(x)} \mathrm{f}(x,y)\,dy}_{\text{integriere bei festem } x \text{ über } y\to\hat{\mathrm{f}}(x)} \overset{\text{Satz von Fubini (Reihenfolge)}}{=} \int_{y_a}^{y_b} dy\int_{x_a}^{x_b} \mathrm{f}(x,y)\,dx$$

Beispiel

$$\mathrm{f}(x,y)=x^2 y$$

$$\int_g \mathrm{f}(x,y)\,dx\,sy=\int_0^1 dx\int_0^{\mathrm{y}(x)} \mathrm{f}(x,y)\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{\mathrm{y}(x)} \mathrm{f}(x,y)\,dy$$

$$\ldots=\int_0^1 dx\int_0^x x^2 y\,dy=\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^x=\int_0^1 dx\,\frac{1}{2}x^2x^2=\int_0^1 dx\,\frac{x^4}{2}=\frac{1}{10}x^5\Big]_0^1=\frac{1}{10}$$

Weitere Themen:

- Berechnung des Quadervolumens durch Integration über kartesische Koordinaten
- Berechnung des Zylindervolumens durch Integration über Zylinderkoordinaten
- Berechnung des Kugelvolumens durch Integration über Kugelkoordinaten

Differentialgleichungen

DGL 1. Ordnung:

$$y'=\mathrm{f}(x,y)$$

$\to$ $\mathrm{y}(x)$ mit $\mathrm{y}'(x)=\mathrm{f}(x,y(x))$

[$x^2+5\mathrm{x}-6=0$ ⇒ Zahl (ggf. mehrere Zahlen)]

Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion!

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

N Teilchen zerfallen mit deiner Zerfallskonstante λ .

DGL: $\dot{N}=-\lambda\cdot N$

$\frac{d\,\mathrm{N}(t)}{dt}=-\lambda\,\mathrm{N}(t)\quad \mathrm{N}(t)=?$

Trennung der Variablen: $\frac{d\,\mathrm{N}(t)}{\mathrm{N}(t)}=-\lambda\,dt$

$\int_{N_0}^{\mathrm{N}(t)}\frac{dN}{N}=-\lambda\int_{t_0=0}^{t}dt'$ mit Beschränkung der Allgemeinheit

$\Rightarrow \ln N\,\Big]_{N_0}^{\mathrm{N}(t)}=-\lambda(t-0)$

$\Rightarrow \ln \mathrm{N}(t)-\ln N_0=-\lambda t$

$\Rightarrow \ln\frac{\mathrm{N}(t)}{N_0}=-\lambda t$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{N}(t)}{N_0}=e^{-\lambda t}\quad \underline{\Rightarrow \mathrm{N}(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}}$ (radioaktive Zerfallsgesetz als Lösung der Differentialgleichung)

Beispiel: Schwingungen

$\underline{F}=m\cdot\underline{a}\quad \underline{F}=-k\,\underline{x}$

$F=m\ddot{x}\quad F=-kx$

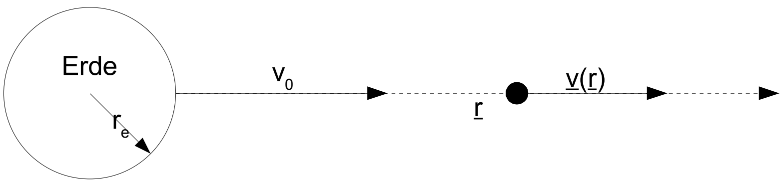
$\Rightarrow m\ddot{x}=-kx\quad \boxed{\Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0}$ Differentialgleichung einer harmonischen Gleichung

Lösung: $\mathrm{x}(t)=x_0\cdot\sin(\omega t)$ mit $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Allgemein: $\mathrm{x}(t)=x_0 e^{i\omega t}=x_0\big(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\big)$

Aufgabe

Bestimme die Anfangsgeschwindigkeit einer Nutzlast die ins Unendliche fliegen soll und nicht zur Erde zurückfällt. (ohne Energiesatz)



$v=\frac{dr}{dt}$

Bewegungsgleichung: $\frac{d^2 r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=a=-\frac{k}{r^2}$

auf Erdoberfläche: $a=-g=\frac{-k}{r_e^2}\Rightarrow k=g\cdot r_e^2=10\frac{m}{s^2}(6000\mathrm{km})^2=3{,}6\cdot 10^{14}\frac{m^3}{s^2}$

Gesucht ist $\mathrm{v}(r)$

$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot v\Rightarrow \frac{v\cdot dv}{dr}=\frac{-k}{r^2}$ (Variablen trennen)

$$\int v\,dv = \int -\frac{k}{r^2}\,dr \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{k}{r} + \underbrace{C}_{\text{aus Randbedingung des Problems}}$$

mit: $\mathrm{v}(r_e) = v_0 \Rightarrow c = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{r_e} = \frac{v_0^2}{2} - g\,r_e$

$$[\mathrm{v}(r)]^2 = \frac{2k}{r} + v_0^2 - 2\,g\,r_e$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2}_{E_{\text{kin}}} = \underbrace{\frac{mk}{r} - g\,r_e \cdot m}_{E_{\text{pot}}}$$

Wie verhält sich die für $r \to \infty$?

$$[\mathrm{v}(r \to \infty)]^2 = v_0^2 - 2\,g\,r_e > 0$$

$\Rightarrow v_0 > \sqrt{2\,g\,r_e} = \sqrt{2 \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 6 \cdot 10^6\,m} = 11\,\frac{km}{s}$ <u>(Fluchtgeschwindigkeit)</u>

VIII Statistik

Warum? Messungen sind die Praxis für die Experimental-Physik (und anderen Messungen). (⇒ in Praktika sehr wichtig).

Messungen sind Fehlerbehaftet, immer!

Fehlerquellen:

- Ungenauigkeit Messgerät
- Trunkenheit des Experimentators
- Leitungswiderstände
- Temperatur
- Paralaxe beim Ablesen
- Nullpunkt von Messgeräten

Was ist zu tun?

- Temperaturstabilisierung
- Spiegel
- Nachmessen der Spannung

Reduktion des Fehlers möglich, Beseitigung unmöglich!

Was mach ein(e) gute(r) PhysikerIn?

1) Wert ablesen und ins Protokoll eintragen.
2) Fehler abschätzen.
   - ➔ mögliche Fehlerquellen
   - ➔ wie groß könnte der Effekt gewesen sein?

   Kunst des Experimentators
   - ➔ Offset korrigieren
   - ➔ kalibrieren
   - ➔ mehrfach messen
   - ➔ anderes Exemplar /Probe die vermeintlich gleich ist
   - ➔ Temperatur variieren und Einfluss messen und gegebenfalls korrigieren

Messung

- Entwicklung der Messmethode
- Durchführung der Messung
- Bestimmen des statistischen Fehlers
- Bestimmen systematischen Fehlers

Systematische Fehler

(alle anderen Effekte als die aus den statistischen Fehlern verursacht durch das Messsystem selbst)

- Misskalibration
- Nullpunktverschiebung (Offsets)

Bestimmung von Systematischen Fehlern ist unter Umständen schwierig. Es gibt kein allgemein gültiges Verfahren. Es spielt eine Rolle:

- Erfahrung
  - (Abschätzungen mit Verstand)

– unvoreingenommener Blick auf die Messwerte!

Statistische Fehler

(zufällige Streuung der Messergebnisse / Messwerte)

– Schwankung im Netzgerät
– Messgenauigkeit (Mechanik des Zeigers, bei digitalen Geräten in der Elektronik)
– Kontakt der Messspitzen

Nur dieser Fehler wird in der Vorlesung behandelt.

> *Tipp:*
>
> *Im Praktikumsbericht einen Systematischen Fehler erwähnen.*

Definition & Begriffe

„Mittelwert"

bei Mehrfachmessungen gilt der Mittelwert als „Resultat"

N Messungen: $x_i \quad i=1,2,\ldots,N$

„arithmetisches Mittel"

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

i=	1	2	3	4	5
x_i	0,246	0,249	0,248	0,253	0,249

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{5}(0{,}246\ldots A)=0{,}249\,A$$

„trunicated mean"

Messwerte werden rausgeschmissen. Zum Beispiel Overflow.

$\bar{x}_{\text{trunc}}=\frac{1}{M}\sum_{i\in M} x_i=\frac{1}{3}\sum_{2,3,5} x_i=0{,}2487\,A$ (Man verwirft die y% größten und kleinsten Messungen)

„geometrisches Mittel"

Bakterien:

– Zeitraum 1: Verdoppelung
– Zeitraum 2 Verachtfachung

⇒ mittlere Vervielfachung ist 4 und nicht 5 wie beim arithmetischen Mittel.

$$\bar{x}_{\text{geo}}=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

„harmonisches Mittel"

Beispiel: Autofahrt

1h mit $50\frac{km}{h}$ und 1h mit $100\frac{km}{h}$ $\Rightarrow 150\,km$ in 2 h

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{2}\left(50\frac{km}{h} + 100\frac{km}{h}\right) = 75\frac{km}{h}$$

$$\left.\begin{array}{r} 100\,km\,mit\,50\,\frac{km}{h} \\ 100\,km\,mit\,100\,\frac{km}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow 200\,km \text{ in 3h} \quad \Rightarrow \bar{v} = \frac{200}{3}\frac{km}{h} = 66,\bar{6}\frac{km}{h}$$

$$\bar{x}_{\text{harm}} = \frac{N \cdot 1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \Rightarrow \frac{1}{\bar{x}_{\text{harm}}} = \sum \frac{\frac{1}{x_1}}{N}$$

Streuung

Wie viel weicht eine „typische" (Einzel-)Messung vom Mittelwert ab?

Abweichung vom Messwert: $\bar{x} - x_i$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(\bar{x} - x_i) = ?$$

Beispiel: $\frac{1}{5}(0{,}003 + 0 + 0{,}001 - 0{,}004 + 0) = 0$

allgemein: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{x} - x_i = 0$

anschaulich klar: positive und negative Abweichungen kompensieren sich

„Varianz": $V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2$

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}2\cdot\bar{x}\sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{\bar{x}^2}{N}\sum_{i=1}^{N} 1 = \overline{x^2} - 2\,\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Beispiel: $\frac{1}{5}(0{,}003^2 + 0{,}001^2 + 0{,}004^2)A^2 = 5{,}2\cdot 10^{-6}A^2$

→ Standardabweichung $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V}$

Beispiel $\sigma = 2{,}3\cdot 10^{-3}A$

⇒ Messresultat: $(0{,}249 \pm 0{,}002)A$

Korrelation

Sind die Messwerte unabhängig voneinander?

Hoher Messwert von U → hoher Wert von I?

allgemein: Messungen müssen nicht unabhängig voneinander sein: „Korrelationen"

Kovarianz

(hat was mit Varianz zu tun)

$$cor(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

1. Messung: Werte $x_i \quad i = 1, \ldots, N$

2. Messung: Werte $y_i \quad i=1,\ldots,N$

$cor(x,y)=\overline{x\cdot y}-\overline{x}\cdot\overline{y}$

(unkorrellierte Messungen: $cor(x,y)=0$)

$\rho(x,y)=\frac{cor(x,y)}{\sigma x \sigma y} \quad -1\le\rho\le 1$, $\rho=0$ unkorrelliert, $\rho=1$ vollständig korrelliert

Estimatoren

Resultat der Messung $R=\mathrm{E}(x_i)$

E ist die Prozedur, die sie auf die Messwerte loslassen. „Estimator“ / „Abschätzung“

Beispiel: alle Mittelwerte von oben sind Estimatoren

$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum x_i$

⇒ Erwartungswert $\hat{\mathrm{E}}(x_i)=\lim_{N\to\infty}\mathrm{E}(x_i)$ d.h. das Resultat hat beliebig viele Messungen

Eigenschaften

- BIAS

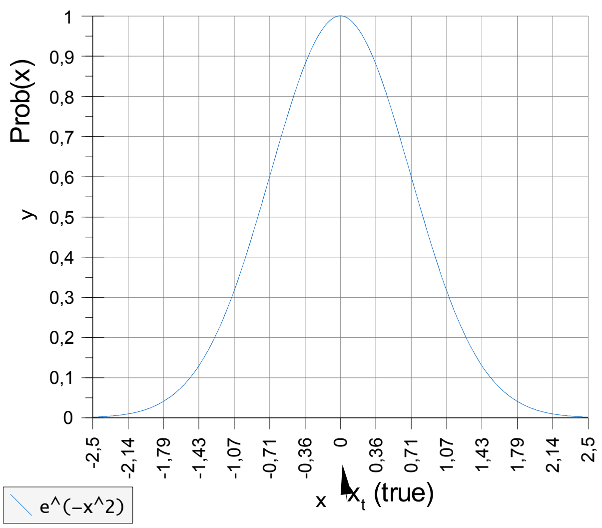
  Estimator muss so gewählt werden, dass er „ungebiased“ ist.
- Konsistenz
- Effizienz

Literaturverweiß: R. J. Barlow: Statistics

Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$\mathrm{Prob}\left(x \underbrace{|}_{\text{gegeben unter Vorraussetzung}} \overbrace{x_t}^{\text{welchen Wert (t rue)}}\right)$



Häufig Gaußverteilung, aber nicht immer.

Wahrscheinlichkeitsverteilung: bestimmte Integrale von Prob (nur diese sind durch Messungen zugänglich).

Beispiel

Wie wahrscheinlich ist es, dass linker Kommilitore ist exakt 1,7500000000000m groß ist?

⇒ Wahrscheinlichkeit: 0

$1{,}75 < \text{Kommilitore} < 1{,}76 \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit: endlich

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie einen Strom $I_1 = 0{,}25\,A$ messen?

$$\int_{0{,}25\,A}^{\infty} \text{Prob}\left(I' \middle| I_t\right) dI'$$

Problem: I_t ist unbekannt!

Als Näherung benutzt man meistens $\text{E}(I_i)$ statt I_t.

Normiert: $\int_{0{,}25\,A}^{\infty} \text{Prob}\left(x' \middle| x_t\right) dx' = 1$

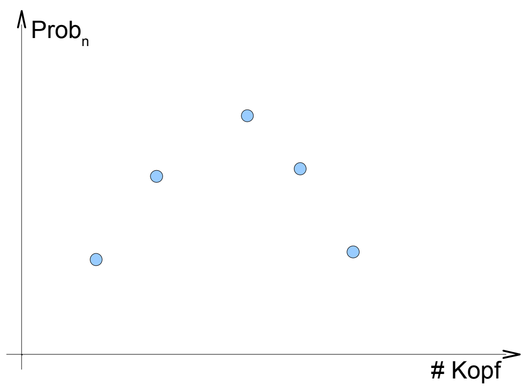
Erwartungswert: $\hat{x} = \int x_0{}' \,\text{Prob}\left(x' \middle| x_t\right) dx'$

A) Diskrete Versuche, diskreter Ausgang

Beispiel

Münzwurf, 4 mal. Wie oft kommt „Kopf“?

0-mal:	`ZZZZ`	$(0{,}5)^4$	$\frac{1}{16}$
1-mal:	`KZZZ+ZKZZ+ZZKZ+ZZZK`	$4\cdot(0{,}5)^3\cdot 0{,}5$	$\frac{4}{16}$
2-mal:		$\ldots$	$\frac{6}{16}$
3-mal:		$\ldots$	$\frac{4}{16}$
4-mal:	`KKKK`	$\ldots$	$\frac{1}{16}$
			$\frac{16}{16} = 1$



Erfahrungswert: $\hat{n}_k = \sum_{n=0}^{4} n\, Prob_n = 0 + \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = 2$ (muss keine natürliche Zahl sein)

allgemein

N Versuche

n Erfolge (# Kopf)

p Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall

→ Anzahl der Kombinationen für n Erfolge „Binominialkoeffizient“ $\frac{N!}{n!(N-n)!}$

Einzelwahrscheinlichkeit: $(p_{\text{Erfolg}})^n \cdot (p_{\text{nichtErfolg}})^{N-n} = p^n \cdot (1-p)^{N-n}$

⇒ Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung: $\boxed{Prob_n = p^n (1-p)^{N-n} \cdot \frac{N!}{n!(N-n)!}}$ „Binominialverteilung“

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür bei 12 Würfel Würfen n-mal einen 6er zu würfeln?

Erwartungswert: $\hat{n} = N \cdot p$

Varianz: $V_n = N \cdot p \cdot (1-p) \Rightarrow$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}$

B) kontinuierliche Versuche, diskreter Ausgang

Beispiel

Bei einem Geigerzähler treffen die Ereignisse in beliebigen kontinuierlichen Zeitpunkten ein. (sinnlos über Misserfolg zu reden)

Im Mittel werden λ Ereignisse pro Sekunde gemessen. ⇒ Unterteile Sekunde in N Intervalle.

Nachweiswahrscheinlichkeit pro Intervall:

$$P = \frac{\lambda}{N}$$

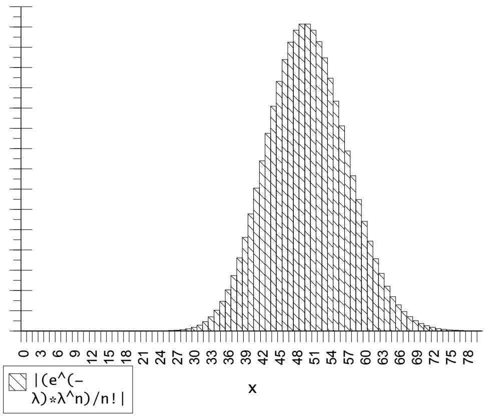
(N so groß, dass nie mehr als 1 Ereignis in 1 Intervall fällt)

$$\Rightarrow \text{Prob}_n = \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} \cdot \frac{N!}{n!(N-n)!}$$ „Binominal Verteilung“

Übergang zur kontinuierlichen Verteilung $N \to \infty$

- $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-n)!} = \lim\limits_{N\to\infty} \underbrace{(N(N-1)(N-2)(N-3)\ldots(N-n+1))}_{n\,\text{Faktoren}} = N^n$ (※)
- $\lim\limits_{N\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} = \lim\limits_{N\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N} = e^{-\lambda}$ (※※)

$\text{Prob}(n) = \lim\limits_{N\to\infty} \text{Prob}_n = \frac{\lambda^n}{N^n} e^{-\lambda} \cdot N^n \cdot \bar{n}! = \boxed{\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda}{n!} = \text{Prob}(n)}$ „Poissonverteilung“



Normierung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Prob}(n)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

Erwartungswert:

$$\hat{n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cdot e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-1)!}$$

für $\lambda=0$

$$\ldots=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\overset{m=n-1}{=}e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

Varianz: $\mathrm{V}(n)=\lambda\Rightarrow$ Standartabweichung $\sigma=\sqrt{\lambda}$

C) Kontinuierliche Versuche, kontinuierlicher Ausgang

Satz: $n=\lambda+x$ für große λ , x : kontinuierlich

forme um: $\ln\mathrm{Prob}(n)=\ln\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\ln e^{-\lambda}+\ln\lambda^n-\ln n!=-\lambda+n\cdot\ln\lambda-\underbrace{\ln n!}_{\text{Sterlingsche Formel}}$

für große n

$$\ldots\approx-\lambda+n\cdot\ln\lambda-\left(n\cdot\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}\right)$$

$$\ldots=-\lambda+(\lambda+x)\cdot\ln\lambda-(\lambda+x)\cdot\ln(\lambda+x)+(\lambda+x)-\ln\sqrt{2\pi(\lambda+x)}$$

$$\ldots=(\lambda+x)\ln\lambda-(\lambda+x)\ln\left(\lambda\cdot\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)\right)+x-\ln\sqrt{2\pi(\lambda+x)}$$

$$\ldots=(\lambda+x)\ln\lambda-(\lambda+x)\ln\lambda-(\lambda+x)\ln\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)+x-\ln\sqrt{2\pi(\lambda+x)}$$

$x\ll\lambda\quad\ln\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)\approx\frac{x}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda^2}+\ldots$ Reihenentwicklung von $\ln x$.

$$\ldots\approx-(\lambda+x)\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda^2}\right)+x-\ln\sqrt{2\pi\lambda}=-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda}-\frac{x^2}{\lambda}+\underbrace{\frac{x^3}{\lambda^2}}_{\ldots\approx0}+x-\ln\sqrt{2\pi\lambda}\approx-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda}-\ln\sqrt{2\pi\lambda}$$

$$\Rightarrow\mathrm{Prob}(n)^{n}\overset{\text{groß}}{=}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda}-\ln\sqrt{2\pi\lambda}}=e^{-\ln\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda}}$$

Ersetze: $\lambda=\sigma^2, x=x'-\bar{x}$

$$\boxed{\Rightarrow Prob(x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{\frac{-(x'-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}$$ „Gaussverteilung“

Zentraler Grenzwertsatz

N Messungen mit Erwartungswert μ_i , Varianzen V_i

i) $\hat{x}=\sum \mu_i$

ii) $\mathrm{V}(x)=\sum V_i=\sum \sigma_i^2$

iii) x hat eine gaußförmige Wahrscheinlichkeitsdichte für große N

Überraschend ist iii): N beliebige Startverteilung ⇒ gaußförmige Summe

Anwendung: Eine Messung mit N statistischer Einflüsse, so ergbit sich eine gaußförmige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (falls N groß).

Achtung, Ausnahme: Messung wird duch einen Einfluß dominiert (→ N wird klein).

Vertrauensintervalle

(wo liegt mein Messwert?)

Wahrscheinlichkeit, dass der Messwert in $[\bar{x}-\sigma; bar\, x+\sigma]$ liegt.

$$P=\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x'-\bar{x})^2}{\sigma^2}}dx'$$

Substituieren

$v=x'-\bar{x}$

$du=dx'$

$$\ldots=\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-1}{2}\frac{v^2}{\sigma^2}}dv$$

Substituieren

$$v=\frac{u}{\sigma}$$

$$dv=\frac{du}{\sigma}$$

$$\ldots=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int -1^1 e^{\frac{-v^2}{2}}dv=\mathrm{Erf}(1)-\mathrm{Erf}(-1)=0{,}6827$$

Mit 68% Wahrscheinlichkeit liegt der Messwert richtig.

Fehlerrechnung

A) Wiederhole Messungen

$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ arithmetisches Mittel ist geeigneter Estimator

$V=\frac{1}{N^2}\sum V_i N^2 \quad N^2$, weil V_i quadratisch ist.

Alle Messungen haben den gleichen Fehler $V_i=\sigma_E^2$.

$$V = \frac{\sum \sigma_E^2}{N^2} = \frac{N \sigma_E^2}{N^2} = \frac{\sigma_E^2}{N} \quad \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_E}{\sqrt{N}}$$

Merksatz fürs Praktikum: „Nur durch quadratische Erhöhung des Stumpfsinns erreicht man eine lineare Verbesserung des Resultats.“

σ_E : Fehler der Einzelmessung

$\sigma = \frac{\sigma_E}{\sqrt{N}}$ Fehler des Mittelwerts

B) Gewichteter Mittelwert

Nötig bei Kombination von Messungen mit unterschiedlicher Genauigkeit.

Beispiele

$U_1 = 1{,}23\,V \quad \sigma_1 = 0{,}04\,V$

$U_2 = 1{,}20\,V \quad \sigma_2 = 0{,}02\,V$

σ_2 entspricht 4 Messungen mit der Genauigkeit von σ_1

$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{1}{5} 1{,}23\,V + \frac{4}{5} 1{,}20\,V = 1{,}206\,V$$

allgemein:

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma^2}} \,, \quad \mathrm{V}(c) = \frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma^2}}$$

C) Fehlerfortpflanzung

Messwerte liefern nicht immer direkt das Resultat. Es wird aus diesen berechnet.

allgemein: $y = \mathrm{f}(x_i)$, $\bar{y} = \mathrm{f}(\bar{x})$

$$V(y) = \left(\left. \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} \right)^2 \mathrm{V}(x)$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} \sigma x$$

D) Erweiterung auf mehr Variablen

$y = \mathrm{f}(a, b, c, \ldots)$

speziell: $y = \mathrm{f}(a, b)$ (a,b unkorrelliert)

$$\Rightarrow \mathrm{V}(y) = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial 2e} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}} \right)^2 \mathrm{V}(e) + \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial b} \bigg|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b}}} \right)^2 \mathrm{V}(b) \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\mathrm{V}(y)}$$