

Übung MMet

Notim Knepper Knepper @ LB. rnh-aachen.de

Skalarprodukt

$$(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

1x2 2x1



1x1 Skalarprodukt Äußere Produkt?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot (b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

~~2x2~~ ~~1x2~~ ~~2x1~~

2x1 1x2

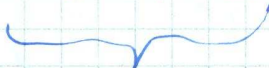


2x2

Matrix-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 & 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 \\ 3 \cdot 10 + 4 \cdot 20 & 3 \cdot 20 + 4 \cdot 40 \\ 5 \cdot 10 + 6 \cdot 20 & 5 \cdot 20 + 6 \cdot 40 \end{pmatrix}$$

3x2 2x2



3x2

$$= \begin{pmatrix} 50 & 100 \\ 110 & 220 \\ 150 & 340 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

$$L = \sqrt{a^2(1) + a^2(2) + a^2(3)}$$

Aufg. 1 Karlesisch

a) $z_1 = j10$

b) $z_2 = -10 - j10$

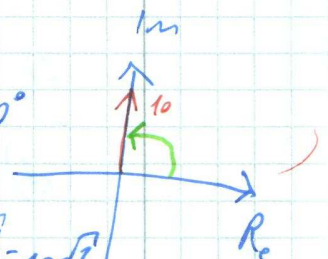
polar

$$z_1 = 10e^{j\frac{\pi}{2}} = 10e^{j90^\circ}$$

Betrag: $\sqrt{(-10)^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2}$

Winkel: $\arctan\left(\frac{\text{Im} = -10}{\text{Re} = -10}\right)$

Welcher Quadrant? I. od. III



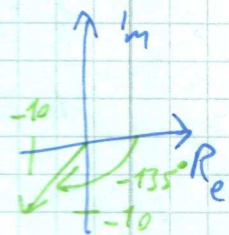
$\operatorname{Re}\{z_2\} < 0 \Rightarrow$ 3. Quadrant

Vorlesung Teil 2 Folie

38439

$\Rightarrow$ Winkel: $-\frac{3}{4}\pi = -135^\circ$

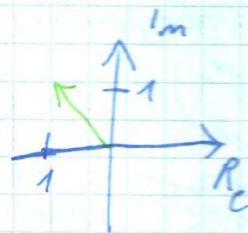
$$z_2 = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j3\pi/4}$$



c) $z_3 = \sqrt{2} e^{j3\pi/4}$

$$\operatorname{Re}\{z_3\} = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

$$\operatorname{Im}\{z_3\} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = +1$$



d) $z_4 = j^3 = \underbrace{j \cdot j \cdot j}_{-1} = -j = 0 - j \cdot 1$

e) $z_5 = j^j = \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^j = e^{j \cdot j \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{-1\frac{\pi}{2}} = 0,208$

f) $z_6 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ\right)^3$
 $= \left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{j\pi} = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + j \underbrace{\sin \pi}_0 = -1 + j \cdot 0$

Aufg. 2

a) $z_1 = 11 \cdot e^{j\frac{\pi}{5}} \quad z_1^* = 11 \cdot e^{-j\frac{\pi}{5}}$
 $= 8,89 + j 6,46 \quad z_1^* = 8,89 - j 6,46$

z_1^* konjugiert komplex

b) $z_2 = 3e^{-j6\frac{\pi}{5}} \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{j6\frac{\pi}{5}}$

Matlab: $\operatorname{conj}(z_1)$

Kehrwert heißt: Spiegelung an der reellen Achse

c) $z_3 = 7 \cdot e^{-j3\frac{\pi}{4}} \quad |z_3|^2 = 7^2 = 49$

d) $z_4 = 17 \cdot e^{j11\frac{\pi}{6}} \quad \operatorname{Im}\{z_4\} = 17 \cdot \sin \underbrace{\frac{11\pi}{6}}_{330^\circ} = -8,5$

Matlab: $\operatorname{imag}(z_4)$

$$e) z_5 = 10 e^{j\alpha} \Rightarrow \operatorname{Re}\{j z_5\} = \operatorname{Re}\{j 10 e^{j\alpha}\} = \operatorname{Re}\{10 e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})}\} \\ = 10 \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

Vorlesung 1

Teil 2 Folie 11

$$\sin \alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

$$-\sin \alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$1) z_6 = 1 e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{gesucht: } z_6 + z_6^* = ? \operatorname{Re}\{z_6\}$$

Vorlesung Teil 2, Folie 40

$$z_6 + z_6^* = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1 \\ \underbrace{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

Aufg. 3

$$a) z_1 = 5 \cdot e^{j\frac{4\pi}{5}} + 7 e^{-j\frac{5\pi}{7}} \rightarrow \text{kartesische Koord.}$$

$$= 5 \cdot \cos \frac{4\pi}{5} + 7 \cdot \cos \frac{5\pi}{7} + j(5 \cdot \sin \frac{4\pi}{5} - 7 \sin \frac{5\pi}{7})$$

$$= -4,04 - 4,36 + j(2,93 - 5,47)$$

$$= -8,41 - j 2,53$$

$$= 8,78 \cdot e^{-j163^\circ}$$

$$b) z_2 = 5 \cdot e^{j\frac{4\pi}{5}} \cdot 7 e^{-j\frac{5\pi}{7}} \rightarrow \text{Polarkoord.}$$

$$= 5 \cdot 7 e^{j(\frac{4\pi}{5} - \frac{5\pi}{7})}$$

$$= 35 e^{j(\frac{28-25}{35}\pi)} = 35 e^{j\frac{3\pi}{35}}$$

Aufg. 4

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

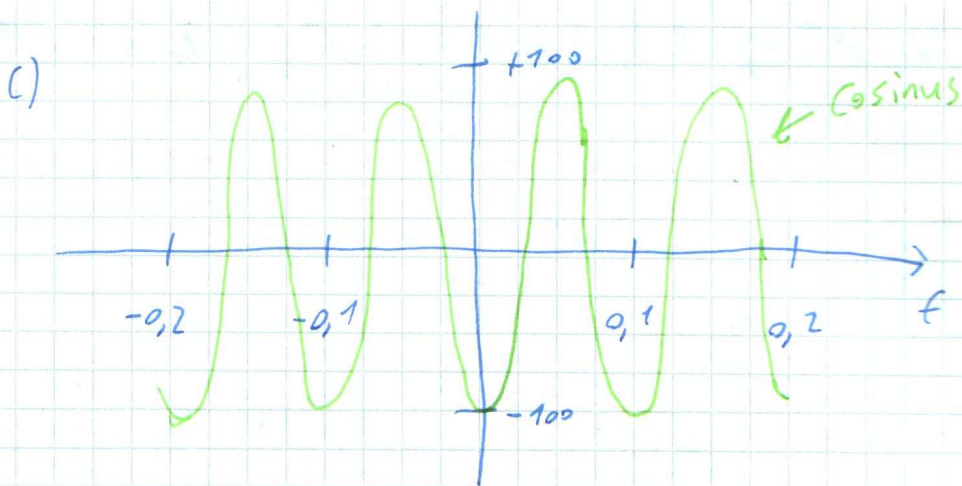
$$a) s(t) = 100 \cdot \cos(20\pi t - 20\pi \cdot 0,05)$$

$$\varphi = -\pi \text{ (oder } +\pi)$$

$$b) b = -0,2 : 0,001 : 0,2 ;$$

$$\text{Es gibt } \frac{0,2 - (-0,2)}{0,001} = \frac{0,4}{0,001} = 400 \text{ Intervalle der Länge } 0,001 \text{ zwischen}$$

$$-0,2 \text{ und } +0,2 \Rightarrow 400 + 1 = 401 \text{ Zeitpunkte}$$



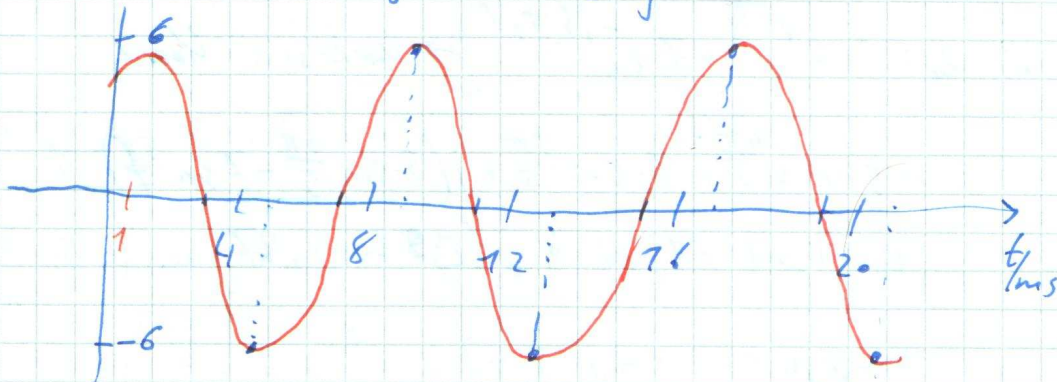
d) $f = 20/1000$; $T = 20 \text{ ms}$

$f_0 = 125$ Frequenz = 125 Hz

Periodendauer: 8 ms (Umkehrfunktion von $T \left(\frac{1}{f} \right)$)

Phasenverschiebung: $\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{8}$ Periodenlänge = 1 ms



Aufg. 5

a) $Z_1(j) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}$

inverse Euler-Formel: Vorl. Teil 2, Folie 45

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$Z_1(j) = \frac{2j \sin \omega t}{2 \cos \omega t} = j \cdot \tan \omega t$$

Phase: $\frac{\pi}{2}$

Amplitude: $\tan(\omega t)$

b) $(1 - z^{-1})(1 + 0,9z^{-5}) = 0$ Alle Lösungen
Beide Faktoren müssen Null werden

$$1 - z^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 1}$$

Lösung 1

$$0,9z^{-5} = 1$$

$$z^5 = -0,9 = 0,9 \cdot e^{j\pi} \cdot e^{j2\pi l}$$

$l \in \mathbb{Z}$

$$z = 0,9^{1/5} \cdot e^{j\frac{\pi}{5}} \cdot e^{j\frac{2\pi l}{5}}$$

$$\underbrace{0,9^{1/5}}_{0,979}$$

$$l = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0,979 \cdot e^{j\frac{\pi}{5}} \\ z_1 = 0,979 \cdot e^{j\frac{3\pi}{5}} \\ z_2 = 0,979 \cdot e^{j\pi} \\ z_3 = 0,979 \cdot e^{j\frac{7\pi}{5}} \\ z_4 = 0,979 \cdot e^{j\frac{9\pi}{5}} \end{cases}$$

Matlab: compass

Lösung 2-6

Projekt $\rightarrow$ Matlab meets Lego Begin: 17.12.

2 Anmeldungen! Campus Office

Gruppen Beginn 12.11.07 18:00 Uhr

Ende 21.11.07 23:59:00 Uhr

Zuteilung Beginn 22.11.07 09:00:00

Wähle 22 Institute Gruppengröße $8 \leq 16 \leq 24$

Präferenzen A, B, C, D, E

2 Studenten 1 PC

4 " teilen sich einen Mindestlösungs NXT Roboter

Teambildung deaktiviert

Zweite Anmeldung: L²P

B.Sc. ET/IT 1. Sem $\rightarrow$ Projekt ET+IT $\rightarrow$ Anmeldung L²P

$\hookrightarrow$ Unterbereich Kleingruppen-Projekt

$\hookrightarrow$ Anmeldung Institutsgruppen

Übung 5c) siehe MatLab $j^2 = -1$
 $j^3 = -j$

$$5d) z = \frac{j^{-1} - j^{-2}}{j^{-3} - j^{-4}} = \frac{j^3 - j^2}{j+1} = \frac{-j+1}{j+1} = \frac{\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

mit j^4 erweitert

e) $V = -3 + j3\sqrt{3}$ gesucht: $\frac{1}{V}$

$$V = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} \cdot e^{j \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{-3}\right)} = 6 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 6e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{6} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{12} - j\frac{\sqrt{3}}{12}$$

f) $Z = \frac{|V|}{V^*} = \frac{6}{6 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

g) $\operatorname{Re}\{j^3 V \cdot e^{j\frac{15t}{5}}\} = \operatorname{Re}\{e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot 6 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{j15\frac{t}{5}}\}$

$$= \operatorname{Re}\{6 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j15\frac{t}{5}}\} = \operatorname{Re}\{6 \cdot e^{j(15\frac{t}{5} + \frac{\pi}{6})}\}$$

$$= 6 \cdot \cos\left(15\frac{t}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$$

eulersche Formel

Aufg. 6

a) $s(t) = \operatorname{Re}\{(1+j)e^{j\pi\frac{t}{5}}\} = \operatorname{Re}\{\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\pi\frac{t}{5}}\}$

$$= \operatorname{Re}\{\sqrt{2} e^{j(\pi\frac{t}{5} + \frac{\pi}{4})}\} = \sqrt{2} \cos\left(\pi\frac{t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Amplitude

$\omega = \frac{\pi}{5}$

Phasenverschiebung

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 2s$$

b) siehe MatLab

Aufg. 7 a) $x_1(t) = 5 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 100 \frac{t}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\{z_1(t)\}$

Amplitude

ω

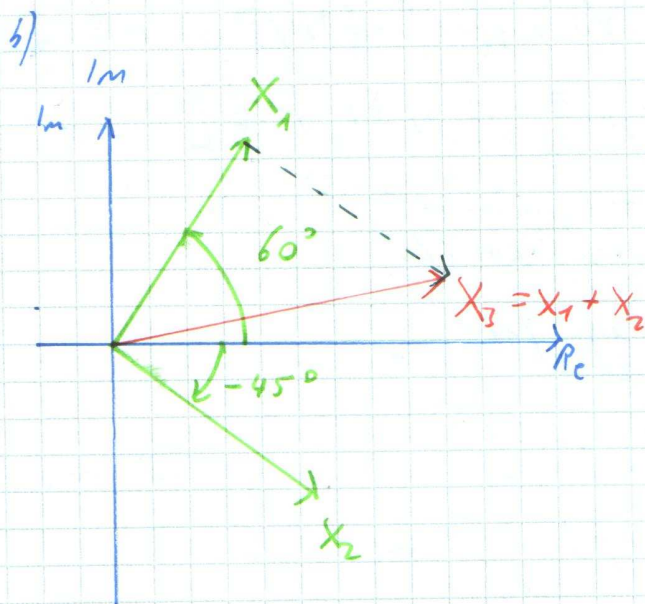
Phase

$$z_1(t) = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j\omega t}$$

X_1 : Phasor; komplexe Amplitude

$$x_2(t) = 4 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 100 \frac{t}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{Re}\{z_2(t)\}$$

$$z_2(t) = 4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow X_2 = 4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$



$$X_1 = 5 \cdot e^{j \frac{\pi}{3}}$$

$$= 2,5 + j 4,33$$

$$X_2 = 2,83 - j 2,83$$

$$c) X_3 = 2,5 + j 4,33 + 2,83 - j 2,83 = 5,33 + j 1,50$$

$$X_3 = 5,54 \cdot e^{j 15,7^\circ}$$

$$x_3(t) = \text{Re} \{ X_3 \cdot e^{j \omega t} \} = 5,54 \cos(2\pi 100 \frac{t}{5} + 0,274)$$

↑
Frequenz bleibt gleich!

Wenn wir Sinussignale gleicher Frequenz addieren, dann brauchen wir nur ihre Phasoren zu addieren. (in der komplexen Ebene)

aufg. 8

$$a) x_a(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{t}{5} + \frac{3\pi}{4}) - \cos(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{t}{5} + \frac{\pi}{4})$$

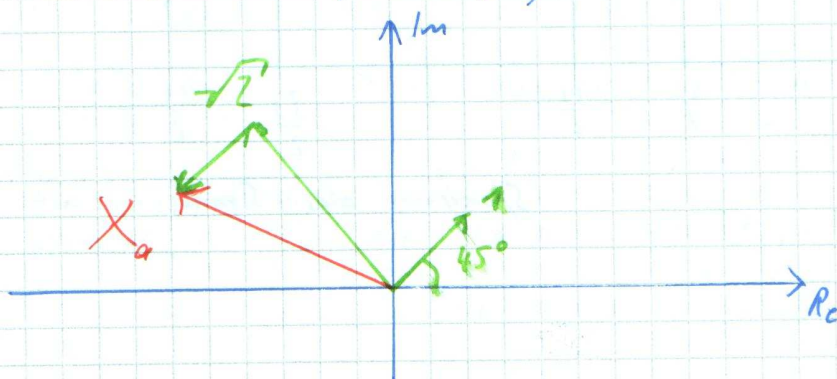
$$= \text{Re} \{ (\sqrt{2} \cdot e^{j \frac{3\pi}{4}} - 1 \cdot e^{j \frac{\pi}{4}}) \cdot e^{j 2\pi \frac{t}{5}} \}$$

$$= \text{Re} \{ (-1 + j \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot e^{j 2\pi \frac{t}{5}} \}$$

$$= \text{Re} \{ 1,732 \cdot e^{j 170,3^\circ} \cdot e^{j 2\pi \frac{t}{5}} \}$$

↑
2,97 rad

$$= 1,732 \cdot \cos(2\pi \frac{t}{5} + 2,97)$$



in kartesischen Koord.
in Polar-Koord.

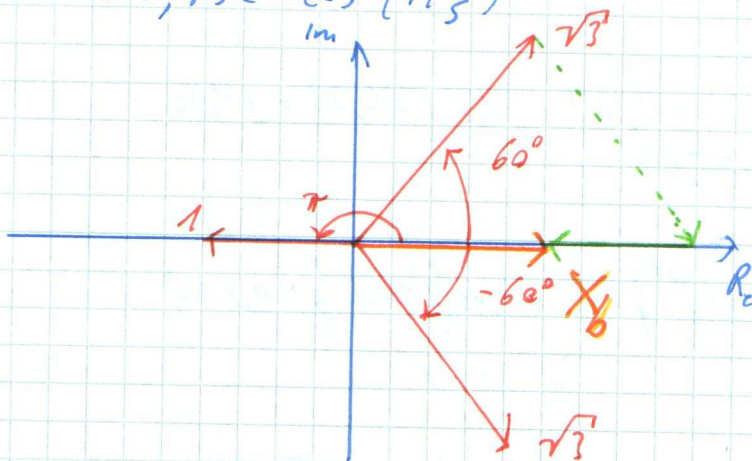
$$b) X_g(f) = \cos\left(11\frac{t}{5} + 17\pi\right) + \sqrt{3} \cos\left(11\frac{t}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(11\frac{t}{5} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{e^{j17\pi}}_{e^{j\pi}} + \underbrace{\sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{3}}}_{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(60^\circ)} \right\} e^{j11\frac{t}{5}}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ (-1) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \right\} \cdot e^{j11\frac{t}{5}}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ 0,732 \cdot e^{j0^\circ} \cdot e^{j11\frac{t}{5}} \right\}$$

$$= 0,732 \cdot \cos\left(11\frac{t}{5}\right)$$



Aufg. 9

$$a) x(t) = 4 \cos\left(33\pi\frac{t}{5} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(44\pi\frac{t}{5}\right)$$

Inverse Eulerformel:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

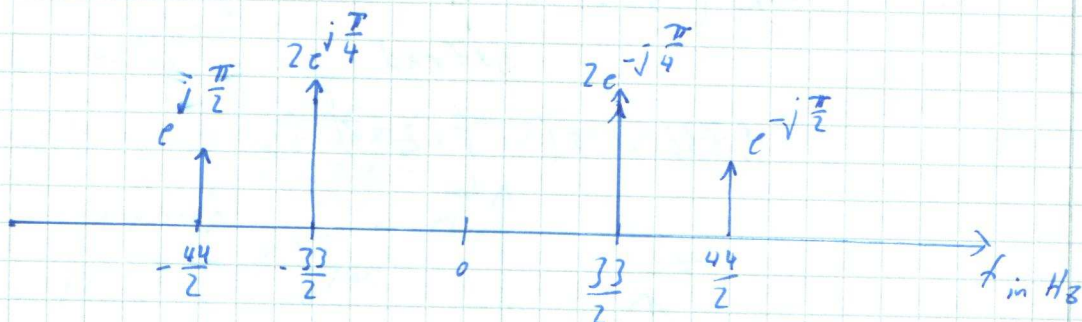
$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$x(t) = 2 \cdot e^{j(33\pi\frac{t}{5} - \frac{\pi}{4})} + 2 e^{-j(33\pi\frac{t}{5} - \frac{\pi}{4})}$$

$$+ e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j(44\pi\frac{t}{5})} + e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j(44\pi\frac{t}{5})}$$

$$= 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j(33\pi\frac{t}{5})} + 2 e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j(33\pi\frac{t}{5})} + e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(44\pi\frac{t}{5})} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j(44\pi\frac{t}{5})}$$

b)



Spektrum des Signals

c) Die beiden Sinussignale haben die Kreisfrequenzen $33\pi s^{-1}$ und $44\pi s^{-1}$

$$\omega_T = \text{ggT}(33\pi s^{-1}, 44\pi s^{-1}) = 11\pi s^{-1}$$

größter gemeinsamer Teiler

$$\omega_T = 2\pi f_T = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{11\pi} \cdot s = \frac{2}{11} s$$

Vorlesung Teil 3/11

Matlab: $\text{gcd}(n, m)$ greatest common divisor mit n und $m \in \mathbb{N}$

Aufg. 10

a) $x_{ss}(t) = \sin(2\pi \cdot 50 \frac{t}{s}) + \sin(2\pi 54 \frac{t}{s})$

Vorlesung: Folie 3/8

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cdot \cos(\omega_D t) \cos(\omega_M t)$$

$$\text{mit } \omega_M = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_D = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

Herleitung:

$$2 \cdot \cos(\omega_D t) \cdot \sin(\omega_M t) = (e^{j\omega_D t} + e^{-j\omega_D t}) \cdot (e^{j\omega_M t} - e^{-j\omega_M t})$$

$$= \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{2} (e^{j(\omega_D + \omega_M)t} - e^{-j(\omega_D + \omega_M)t} + e^{j(\omega_M - \omega_D)t} - e^{-j(\omega_M - \omega_D)t})$$

$$= \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{2} (e^{j\omega_2 t} - e^{-j\omega_2 t} + e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}) = \frac{2j}{2j} (\sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_1 t))$$

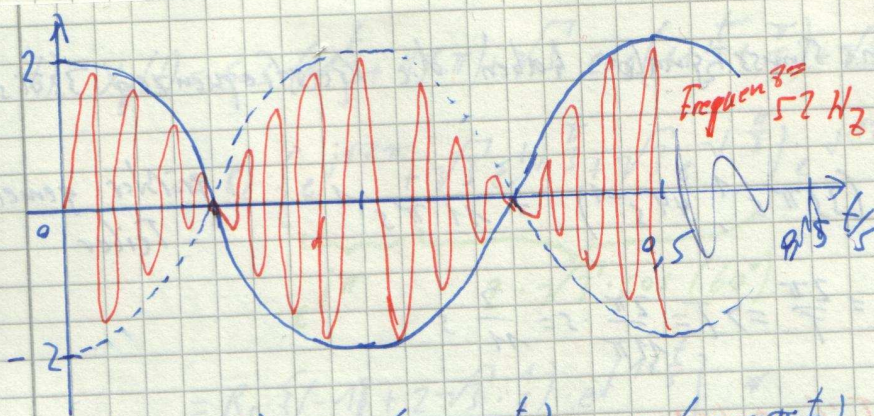
$$\Rightarrow x_{ss}(t) = 2 \cdot \cos(4\pi \frac{t}{s}) \cdot \sin(104\pi \frac{t}{s})$$

$\left[\frac{108 \cdot 100}{2} \right] \Rightarrow$ Schwebungssignal: Σ Zweier Sinussignale mit ähnlichen Frequenzen

Einwickelnde Signa

Einwickelnde hat die Frequenz: $\frac{4\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}$

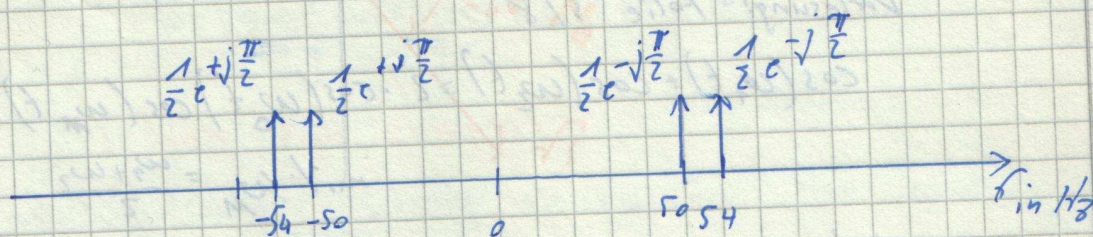
" " Periodenlänge: $\frac{1}{2 \text{ Hz}} = 0,5 s$



b) $x_{ss}(t) = \sin\left(100\pi\frac{t}{5}\right) + \sin\left(108\pi\frac{t}{5}\right)$

$$= \frac{e^{j100\pi\frac{t}{5}} - e^{-j100\pi\frac{t}{5}}}{2j} + \frac{e^{j108\pi\frac{t}{5}} - e^{-j108\pi\frac{t}{5}}}{2j}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j100\pi\frac{t}{5}} + \frac{1}{2} e^{+j\frac{\pi}{2}} e^{-j100\pi\frac{t}{5}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j108\pi\frac{t}{5}} + \frac{1}{2} e^{+j\frac{\pi}{2}} e^{-j108\pi\frac{t}{5}}$$



Spektrum vom Schwungungssignal

19.11.07 Aufg. 11

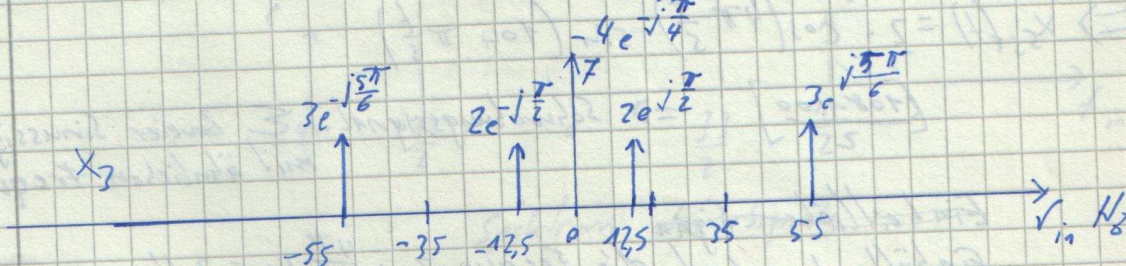
a) siehe Aufgabenblatt

b) $x_2(t) = 7 + 6 \cdot 2 \cos\left(2\pi 12,5\frac{t}{5} - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot 2 \cos\left(2\pi 35\frac{t}{5} - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$

bei $f = 12,5 \text{ Hz}$: $6 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + 8e^{+j\frac{\pi}{2}} = -j6 + j8 = j2 = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$

bei $f = 35 \text{ Hz}$: $4e^{-j\frac{\pi}{4}} + 4e^{+j\frac{3\pi}{4}} = 0$



d) Die Summe von periodischen Sinussignalen ist ebenfalls periodisch, wenn die Frequenzen dieser Sinussignale ein ganzzahliges Vielfaches einer

Grundfrequenz bilden.

grundfrequenz $x(t)$: $f_T = \text{ggT}(12,5 \text{ Hz}, 55 \text{ Hz}) = 2,5 \text{ Hz}$

Aufg. 12

a) $x(t) = \sin^3(3\pi \frac{t}{5})$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{3\pi}{5}t} - \frac{1}{2} e^{-j\frac{3\pi}{5}t} \right)^3$$

$(a+b)^3 = a^3 + \dots + b^3$

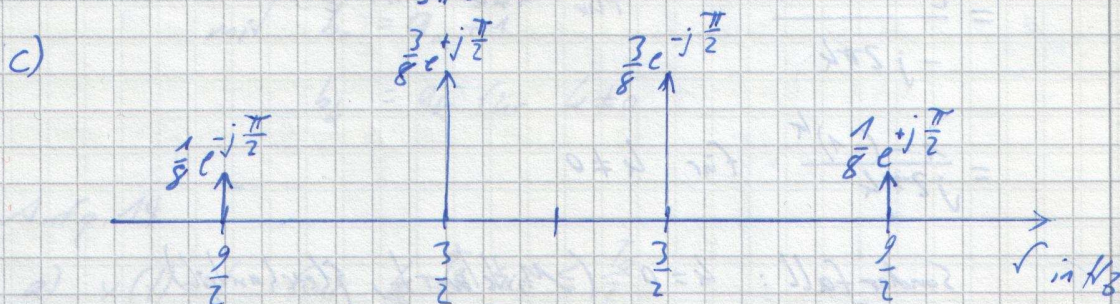
$$= \frac{1}{8} e^{j\frac{9\pi}{5}t} - \frac{3}{8} e^{j\frac{3\pi}{5}t} + \frac{3}{8} e^{-j\frac{3\pi}{5}t} - \frac{1}{8} e^{-j\frac{9\pi}{5}t}$$

$$= \frac{1}{8} e^{j\frac{9\pi}{5}t} + \frac{1}{8} e^{-j\frac{9\pi}{5}t} - \frac{3}{8} e^{j\frac{3\pi}{5}t} + \frac{3}{8} e^{-j\frac{3\pi}{5}t}$$

b) Grundfrequenz $\omega_T = \text{ggT}(9\pi \text{ s}^{-1}, 3\pi \text{ s}^{-1})$

$$\omega_T = 3\pi \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_T} = \frac{2}{3} \text{ s}$$



$\Rightarrow$ Koeffizienten der Fourier-Reihe des Signals $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_T t}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k=0 \\ \pm j \frac{1}{8} & \text{" } k = \pm 1 \\ 0 & \text{" } k = \pm 2 \\ \pm j \frac{1}{8} & \text{" } k = \pm 3 \\ 0 & \text{" } k = \pm 4, \pm 5, \dots \end{cases}$$

d) Zusatzfrage:

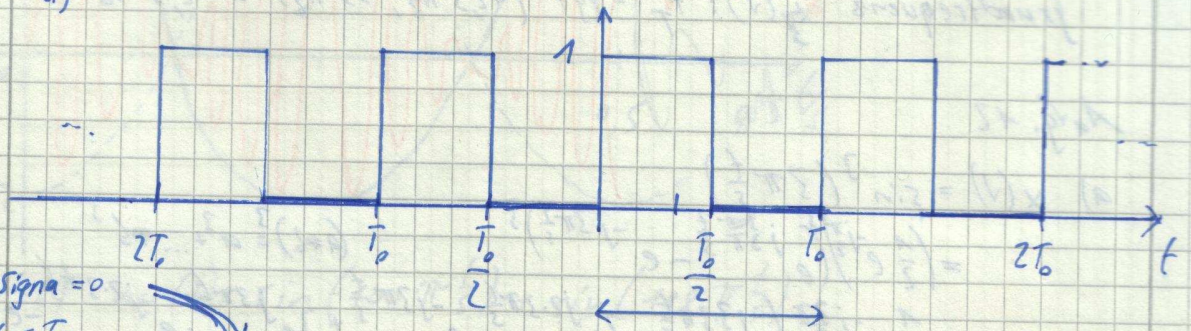
Wie groß muss die Abtastrate r mindestens sein, damit $x(t)$ fehlerfrei rekonstruiert werden kann?

$f_{\max} = \frac{9}{2} \text{ Hz}$ max. Freq. im Signal

$$r \geq 2 \cdot f_{\max} = 9 \text{ s}^{-1} = 9 \text{ Hz}$$

Aufg. 13

a)



Weil $\text{Signal} = 0$
für $\frac{T_0}{2} < t < T_0$

$$b) \quad a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} 1 \cdot e^{-j(\frac{2\pi}{T_0})kt} dt$$

$$= \left[\frac{1}{T_0} \cdot \frac{e^{-j(\frac{2\pi}{T_0})kt}}{-j(\frac{2\pi}{T_0})k} \right]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{e^{-j(\frac{2\pi}{T_0})k \frac{T_0}{2}} - e^{-j(\frac{2\pi}{T_0})k \cdot 0}}{-j(\frac{2\pi}{T_0})k}$$

$$= \frac{e^{-j\pi k} - 1}{-j2\pi k} \quad \text{für } k \neq 0 \text{ mit } e^{-j\pi} = -1$$

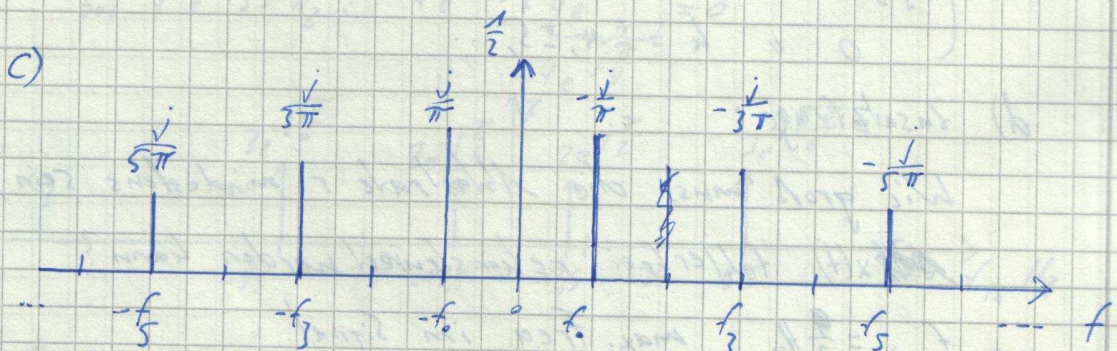
$$= \frac{1 - (-1)^k}{j2\pi k} \quad \text{für } k \neq 0$$

Sonderfall: $k=0$ (Mittelwert, Gleichanteil)

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot 0} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} 1 dt = \frac{\frac{T_0}{2}}{T_0} = \frac{1}{2}$$

Formel für a_k : Zähler 0 für gerade k
" " 2 " ungerade k

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi k} & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \\ 0 & \text{für } k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots \end{cases}$$



$$s_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\omega_0 t] \quad \text{--- square wave ---}$$

d) $y(t) = 1 + s(t)$

$s(t)$ wird in Fourier-Reihe zerlegt

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k \neq 0} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = s(t) + 1$$

$$= \underbrace{1 + a_0}_{b_0} + \sum_{k \neq 0} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

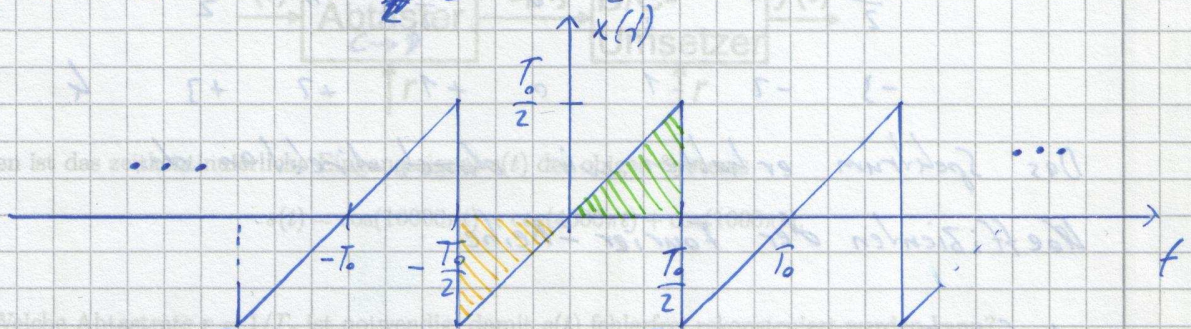
$$y(t) = b_0 + \sum_{k \neq 0} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

mit $b_0 = a_0 + 1$

$$b_k = a_k \text{ für } k \neq 0$$

Aufg. 14

a) $x(t) = t$ für $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$



b) $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t e^{-j0t} dt = \left[\frac{1}{T_0} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = 0$

c) für $k \neq 0$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Bronstein

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$= \left[\frac{1}{T_0} \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{(-jk\omega_0)^2} (-jk\omega_0 t - 1) \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$a_k = \frac{jT_0}{2k \cdot 2\pi} \underbrace{\left(e^{-jk\pi} + e^{jk\pi} \right)}_{2 \cos(k\pi)} + \frac{1}{T_0 k^2 \omega_0^2} \underbrace{\left(e^{-jk\pi} - e^{jk\pi} \right)}_{-2j \sin(k\pi)} = 0$$

$$a_k = \frac{jT_0}{2k\pi} \cos(k\pi) = \frac{jT_0}{2k\pi} (-1)^k$$

d) $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$ mit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \text{ s} = 4 \text{ s}$

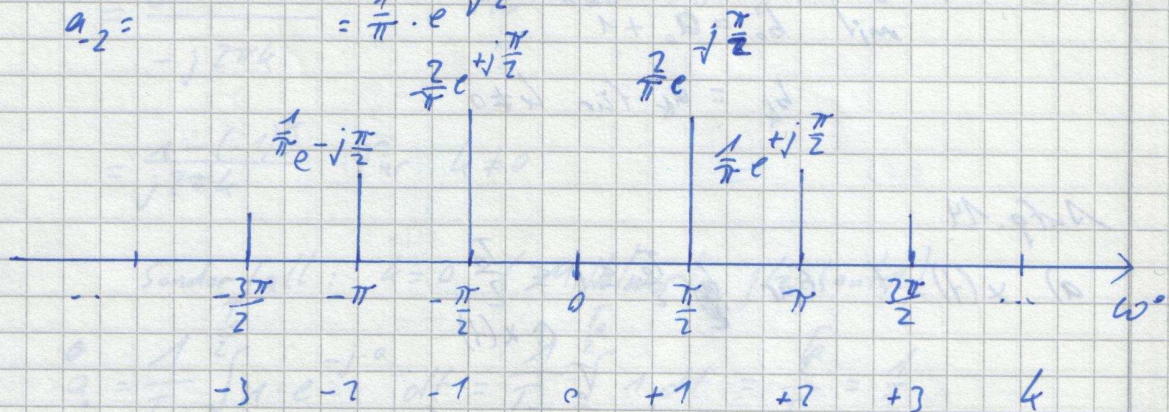
$$a_0 = 0$$

$$a_1 = -j \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_{-1} = \frac{2}{\pi} e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_2 = \frac{j \cdot 4}{2 \cdot 2\pi} (-1)^2 = \frac{1}{\pi} \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_{-2} = \frac{1}{\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} e^{+j\frac{\pi}{2}}$$



Das Spektrum erhalten wir durch direkt an den Koeffizienten der Fourier-Reihe

Aufg. 15

a)

Abtaster $s(t) = \cos(2\pi \cdot 8000 t) + \cos(2\pi \cdot 2000 t) + \cos(2\pi \cdot 500 t)$

const. $\rightarrow$ diskrete Signal

$f_{\max} = 8000 \text{ Hz}$

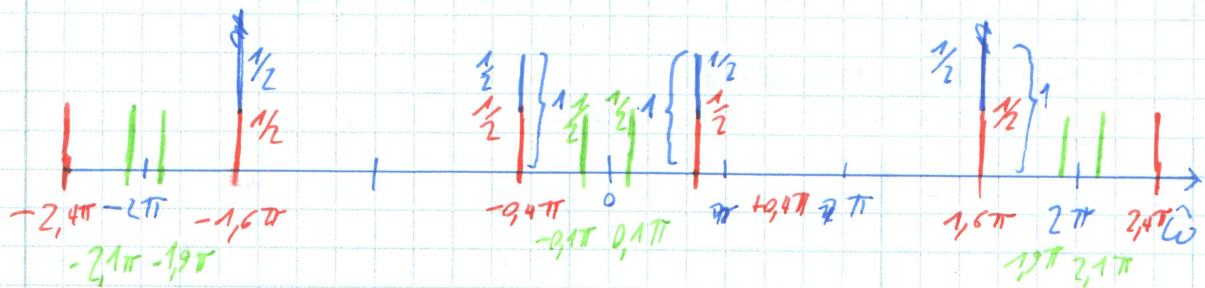
$$r = 2 \cdot f_{\max} = 16000 \text{ s}^{-1}$$

b) jchz! $r = 10000 \text{ s}^{-1}$ (d.h.: Unterabtastung)

$$s[n] = s(nT_s) = s\left(\frac{n}{r}\right)$$

$$s[n] = \cos\left(\frac{16000}{10000} \pi n\right) + \cos\left(\frac{4000}{10000} \pi n\right) + \cos\left(\frac{1000}{10000} \pi n\right)$$

$$= \cos(1,6 \pi n) + \cos(0,4 \pi n) + \cos(0,1 \pi n)$$



c) $r = 10\,000 \text{ s}^{-1}$

$$s(t) = \cos(26000 \pi t) \quad s[n] = \cos(2.6 \pi n)$$



$$f(t) = \cos(0.6 \cdot 10000 \pi t) \equiv \cos(6000 \pi t) \quad \text{aliasing}$$

Aufg. 1 f

$$s[n] = 27 \cdot \cos(0.11 \pi n - \frac{\pi}{3}) \quad r = 5000 \text{ s}^{-1}$$

gesucht: $s_1(t)$ und $s_2(t)$ mit $s[n] = s_1(nT_s)$

$$s[n] = s_2(nT_s)$$

$$s_1(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$$

$$s_1[n] = A_1 \cdot \cos(2\pi \frac{f_1 n}{5000 \text{ s}^{-1}} + \varphi_1)$$

Koeffizientenvergleich:

$$A_1 = 27$$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi f_1}{5000 \text{ s}^{-1}} = 2\pi 0.055 \Rightarrow f_1 = 275 \text{ Hz}$$

zweite Lösung: "umgeklappte" Frequenz (Folding Frequenz)

$$\frac{2\pi f_2}{5000 \text{ s}^{-1}} = -2\pi 0.055 + 2\pi \cdot 1$$

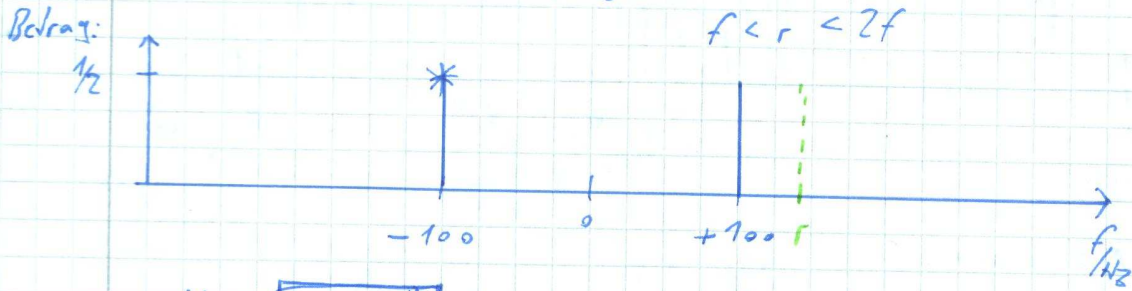
$$\Rightarrow f_2 = 5000 \text{ Hz} - 275 \text{ Hz} = 4725 \text{ Hz}$$

$$s_2(t) = A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

$$\Rightarrow A_2 = 27 \quad \varphi_2 = +\frac{\pi}{3} \quad \text{Vorzeichenwechsel der Phase}$$

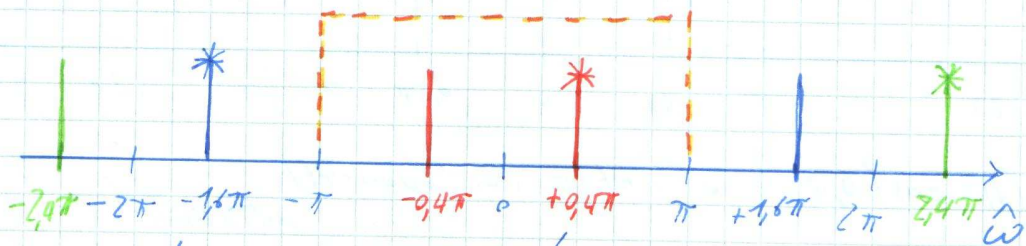
Bsp.: $x(t) = \cos(2\pi \cdot 100 \text{ s}^{-1} t + \frac{\pi}{3})$ d.h. $f = 100 \text{ Hz}$

Abtastrate: $r = 125 \text{ s}^{-1}$



Spektren: $a_{-k}^* = a_k^*$

$x[n] = \cos(1,6\pi n + \frac{\pi}{3})$



Phasendi:

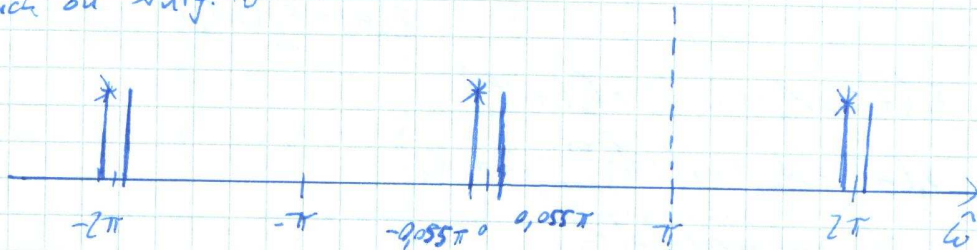
Komponente: $-\frac{\pi}{3}$

Phase: $-\frac{\pi}{3}$

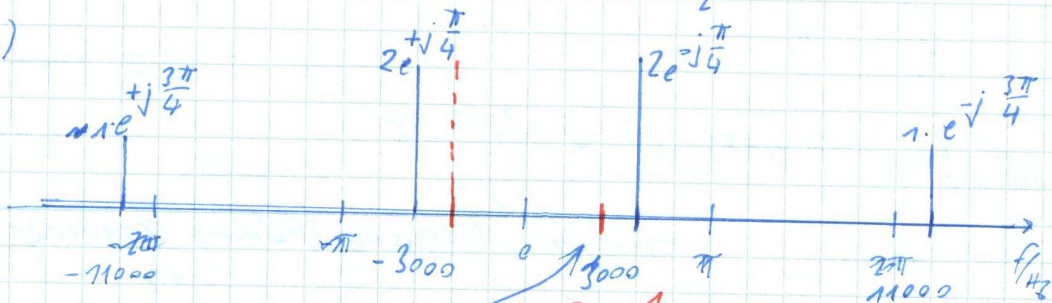
$\hat{\omega} = 1,6\pi + 2\pi l ; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\hat{\omega} = -1,6\pi + 2\pi l ; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Zurück zu Aufg. 16



b)



umgeklappt nach 2000 Hz
mit Phasenumkehr.

Alias Frequenzen bei 6000 Hz
und 1000 Hz

$S(f) = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 11000 \text{ s}^{-1} t - \frac{3\pi}{4}) + 2 \cdot 2 \cos(2\pi \cdot 3000 \frac{t}{5} - \frac{\pi}{4})$

$S[n] = 2 \cos(2\pi \cdot \frac{11000}{5000} n - \frac{3\pi}{4}) + 4 \cos(2\pi \cdot \frac{3000}{5000} n - \frac{\pi}{4})$

$\approx 2 \cos(2\pi \cdot 2,2 n - \frac{3\pi}{4}) + 4 \cos(2\pi \cdot 0,6 n - \frac{\pi}{4})$

$$= 2 \cos(2\pi \cdot 0,2n - \frac{3\pi}{4}) + 4 \underbrace{\cos(2\pi(-0,4n) - \frac{\pi}{4})}_{\cos(2\pi \cdot 0,4n + \frac{\pi}{4})}$$

$D \rightarrow C$ mit $r = 5000 \text{ s}^{-1}$

$$y(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 1000 \frac{t}{5} - \frac{3\pi}{4}) + 4 \cos(2\pi \cdot 2000 \frac{t}{5} + \frac{\pi}{4})$$

Aufg. 17

a) $s[n]$: Position der Speicher; Radius 1

$$s[n] = e^{+j \frac{2\pi n}{50}}$$

b) ω_0 : Umdrehungsrate ^{des} eines Rades
abgetastet mit 25 Bildern/sec.

$$e^{j\omega_0 t} \Big|_{t=\frac{n}{25}} = e^{j\omega_0 \frac{n}{25}} \quad \text{für Uhrzeigersinn mußss } \omega_0 < 0$$

Be. d. das Rad 12 identischen Speichen hat, kann die normierte Kreisfrequenz nur die Werte $\frac{2\pi}{50} + \frac{2\pi}{12} \cdot l$; $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ annehmen

$$e^{j\omega_0 \frac{n}{25}} = e^{j(\frac{2\pi}{50} + \frac{2\pi}{12} \cdot l)n}$$

$\Rightarrow$ Koeffiz.:vergl.:

$$\omega_0 = 2\pi \left(\frac{25}{50} + \frac{2\pi}{12} \cdot l \right) = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{25}{12} l \right)$$

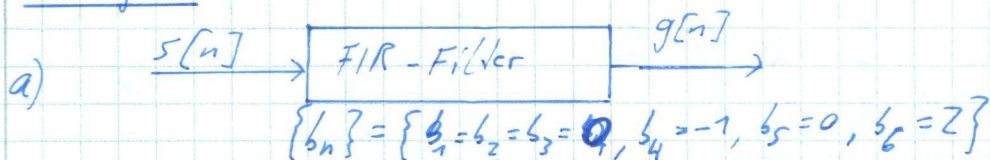
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{25}{12} l \right) \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Sekunde}} \quad \text{für } \omega_0 < 0 \Rightarrow l = -1, -2, -3, \dots$$

c) langsamste Umdrehungsrate $\Rightarrow l = -1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{25}{12} = -\frac{19}{12} \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Sekunde}} \quad \text{gegen Uhrzeigersinn (UzS)}$$

$$+ \frac{19}{12} \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Sekunde}} \quad \text{im (UzS)}$$

Aufg. 18

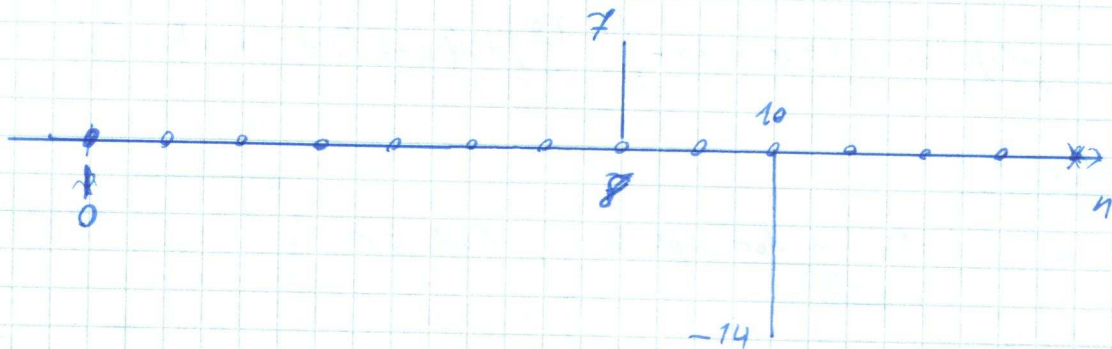


$$\text{für } s[n] = \delta[n] \rightarrow \boxed{\text{Filter}} \rightarrow g[n] = h[n] = b[n]$$

$$\text{für } s[n] = \delta[n-3] \rightarrow \text{"} \rightarrow g[n] = h[n-3] = b[n-3]$$

für $s[n] = -7\delta[n-3] \rightarrow$ Filter $\rightarrow g[n] = -7h[n-3] = -7b[n-5]$

oder $0000 -102 * 000 -7$
 $0000 000 +7 0 -14$

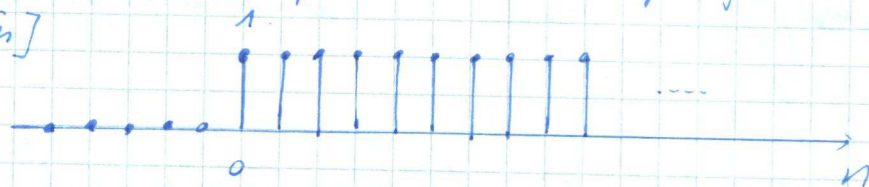


b) siehe Matlab

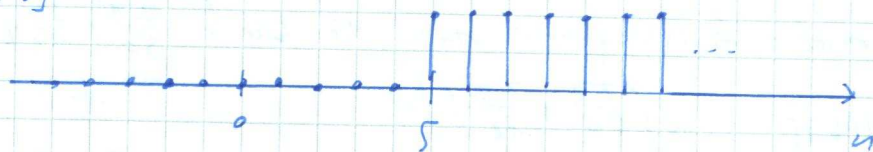
Aufg. 19

Sequenz des Einheitssprunges

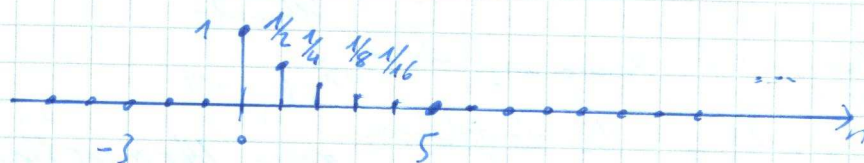
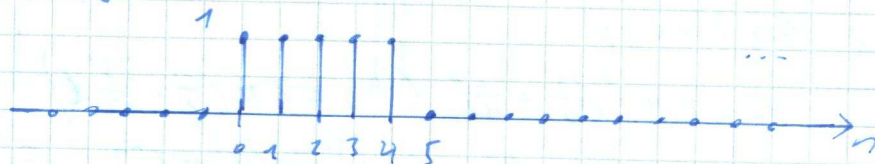
a) $u[n]$



b) $u[n-5]$



$u[n] - u[n-5]$



c) gleitender Mittelwert der Länge 4

$$h[n] = \frac{1}{4} (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3])$$

$$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

$$s[n] = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$$

$$h[n] = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \uparrow & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & * & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & & & & & \end{array}$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad * \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

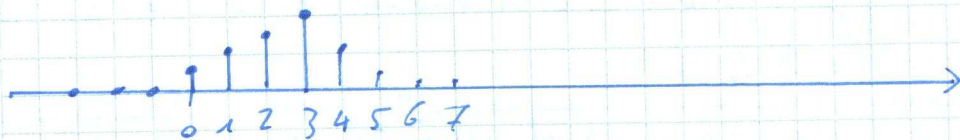
$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

$$g[n] \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{15}{32} \quad \frac{15}{64} \quad \frac{7}{32} \quad \frac{3}{64} \quad \frac{1}{64}$$

$$0,25 \quad 0,375 \quad 0,44 \quad 0,47 \quad 0,23 \quad 0,11 \quad 0,05 \quad 0,02$$



Anmerkung: Länge $\{g[n]\} = 8$

$$= \text{Länge} \{s[n]\} + \text{Länge} \{h[n]\} - 1$$

$$= 5 + 4 - 1 = 8$$

Aufg. 20

siehe Aufg.-Blatt

Aufg. 21

a) $g[n]$ und bestimmen b_k

$$g[n] = \sum_{k=0}^3 (0,5)^k s[n-k]$$

$\downarrow$

$$= \sum_{k=0}^3 b_k s[n-k]$$

Koeffizientenvergleich:

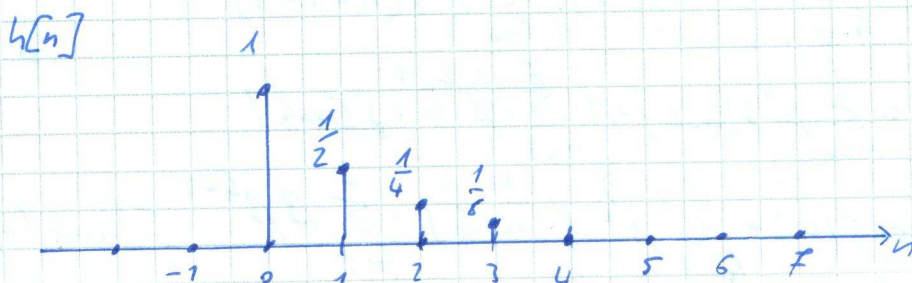
$$b_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{für } 0 \leq k \leq 3$$

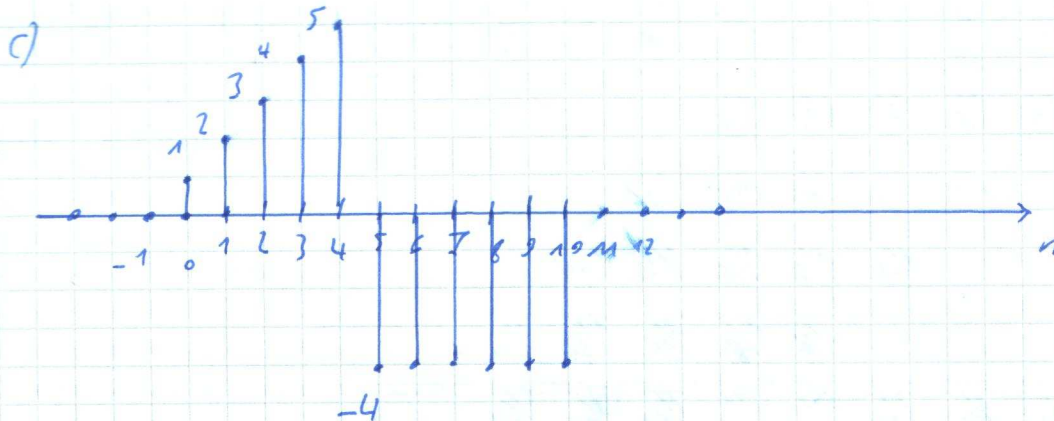
b) Impulsantwort $s[n] = \delta[n]$

$$h[n] = \sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta[n-k]$$

$$= 1 \cdot \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] + \frac{1}{4} \delta[n-2] + \frac{1}{8} \delta[n-3]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-4]) \quad \text{siehe Aufg. 19}$$





n	n < 0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
s[n]	0	1	2	3	4	5	-4	-4	-4	-4	-4	-4	0	0	0	0
h[n]	0	1	1/2	1/4	1/8											
h[0]s[n]	0	1	2	3	4	5	-4	-4	-4	-4	-4	-4	0	0	0	0
h[1]s[n-1]	0		1/2	1	1/2	2	5/2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0		
h[2]s[n-2]	0			1/4	1/2	3/4	1	5/4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	
h[3]s[n-3]	0				1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
g[n]	0	1	2 1/2	4 1/4	6 1/8	8 - 1/8	-4 1/4	-4 3/8	-4 7/8	-4 11/8	-4 15/8	-4 19/8	-3 1/2	-1 1/2	-1/2	0

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\
 \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Aufg. 22

a) $g[n] = s[n] - \beta s[n-1]$ mit $s[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \beta^n & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n > 6 \end{cases}$

$$s[n] = \sum_{k=0}^6 \beta^k \delta[n-k]$$

$$g[n] = s[n] - \beta s[n-1]$$

$$= \sum_{k=0}^6 \beta^k \delta[n-k] - \beta \sum_{k=0}^6 \beta^k \delta[n-1-k]$$

$$= \sum_{k=0}^6 \beta^k \delta[n-k] - \beta \sum_{k=1}^7 \beta^{k-1} \delta[n-k]$$

$$= \delta[n] + \sum_{k=1}^6 \beta^k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^6 \beta \beta^{k-1} \delta[n-k] - \beta^7 \delta[n-7]$$

$$= \delta[n] - \beta^7 \delta[n-7]$$

anderer Ansatz

$s[n]$	1	β	β^2	β^3	β^4	β^5	β^6	$\times 1/\beta$
$-\beta s[n-1]$	$-\beta$	$-\beta^2$	$-\beta^3$	$-\beta^4$	$-\beta^5$	$-\beta^6$	$-\beta^7$	
$g[n]$	1	0	0	0	0	0	0	$-\beta^7$

b) $\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -0,0078 \Rightarrow$ siehe Matlab

Aufg. 20

a) $g[n] = s[n-2] + s[n] + s[n+2]$

Für das Eingangsimpulssignal $s[n] = \delta[n]$ gilt:
beginnt bei $n=0$

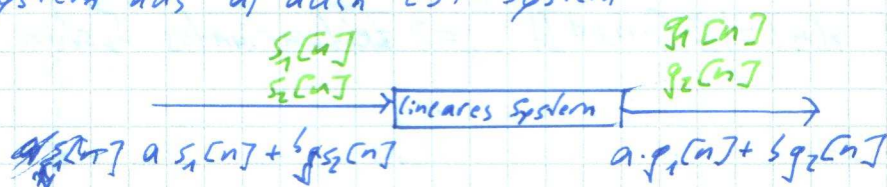
zugehöriges Ausgangssignal $g[n] = \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+2]$
beginnt bei $n=-2$

somit beginnt das Ausgangssignal vor dem Eingangssignal
 $\Rightarrow$ nicht kausal

Differenzengleichungen: Form wie bei einem FIR-Filter.

FIR-Filter: verzögern
skalieren
addieren

Wenn alle FIR-Systeme LSI-Systeme sind, dann ist das System aus a) auch LSI-System



$$\text{Tr}(a s_1[n] + b s_2[n]) = a s_1[n-2] + a s_1[n] + a s_1[n+2]$$

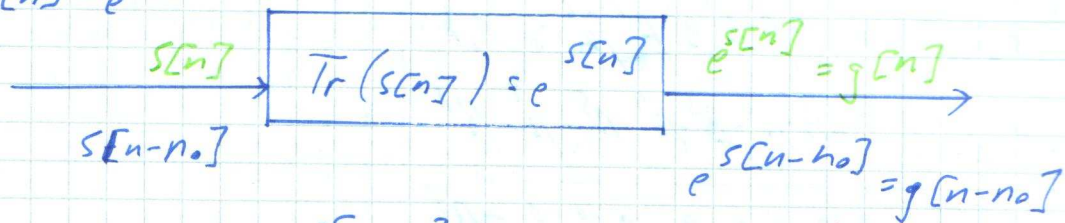
$$+ b s_2[n-2] + b s_2[n] + b s_2[n+2]$$

$$= a \text{Tr}(s_1[n]) + b \text{Tr}(s_2[n])$$

$$= a \cdot g_1[n] + b \cdot g_2[n] \Rightarrow \text{lineares System}$$

$$g[n-n_0] = s[n-2-n_0] + s[n-n_0] + s[n+2-n_0] \quad \text{identisch!} \\ \text{Tr}(s[n-n_0]) = s[n-2-n_0] + s[n-n_0] + s[n+2-n_0] \quad \text{zeitinvariant}$$

b) $g[n] = e^{s[n]}$



$$\text{Tr}(s[n-n_0]) = e^{s[n-n_0]} = g[n-n_0] \Rightarrow \text{zeitinvariant!}$$

$$e^{(1 \cdot s_1[n] + 1 \cdot s_2[n])} \neq \underbrace{e^{s_1[n]}}_{g_1[n]} + \underbrace{e^{s_2[n]}}_{g_2[n]} \quad \text{nicht linear!}$$

das Ausgangssignal kann niemals vor dem Eingangssignal beginnen $\Rightarrow$ kausal

c) $g[n] = |s[n]|$

für z.B. $n = -1 \Rightarrow g[-1] = |s[1]| \Rightarrow$ nicht kausal

z.B.:

$$\text{Tr}(-3 s[n]) = 3 |s[-n]| \neq -3 g[n] = (-3) |s[-n]| \\ \Rightarrow \text{nicht linear}$$

Gegenbeispiel

für $s[n] = \delta[n] \Rightarrow g[n] = |\delta[-n]| = \delta[n]$

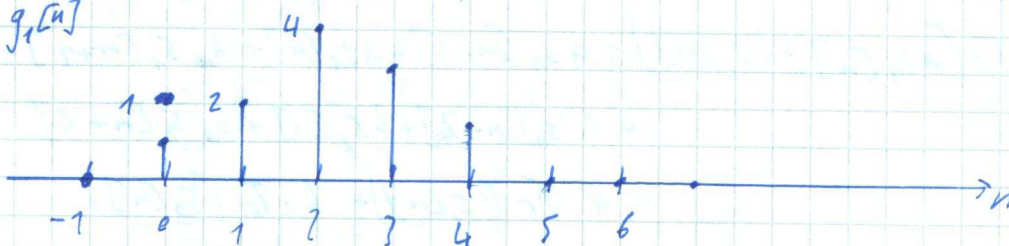
Eingangssignal um 1 verschieben

$$s[n] = \delta[n-1]$$

$$\Rightarrow g[n] = |\delta[-n+1]| \Rightarrow \text{zeitvariantes System}$$

Aufg. 24

a) $g_1[n]$



$$s_1[n] = \delta[n-1] \rightarrow g_{\text{ges}}[n]$$

Eingangssignal $\delta[n-2] \rightarrow g_1[n-1]$

$\delta[n] \rightarrow g_1[n+1]$

$$s_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

$$\Rightarrow g_2[n] = g_1[n+1] - g_1[n-1]$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g_1[n]$	0	0	1	2	4	3	1,5	0	0	0
$g_1[n+1]$		1	2	4	3	1,5	0	0	0	0
$g_1[n-1]$	0	0	0	1	2	4	3	1,5	0	0
$g_2[n]$	0	1	2	3	1	$-\frac{1}{2}$	-3	$-1,5$	0	0

b) Das Eingangssignal $\delta[n-1]$ beginnt bei $n=1$, aber vorher schon Ausgangssignal $\Rightarrow$ nicht kausal

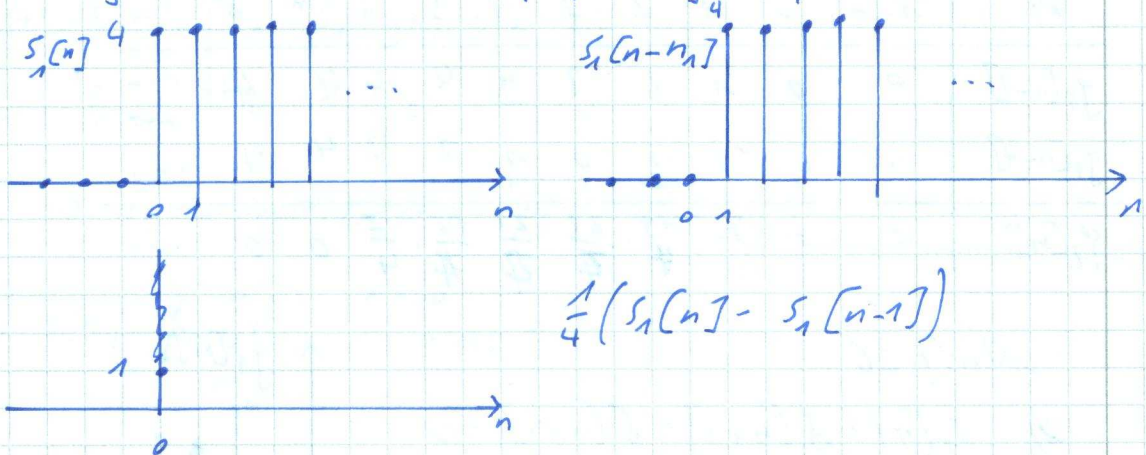
Aufg. 25

$$a) s_1[n] = 4 \cdot u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 4 & n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g_1[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 4 & n \geq 3 \end{cases}$$

Es soll $\delta[n]$ in Abhängigkeit von $s_1[n]$ ausdrücken

wir dürfen $s_1[n]$ skalieren, verschieben, addieren

$$\text{allgemein: } \delta[n] = a_1 s_1[n-n_1] + a_2 s_1[n-n_2]$$



$$\delta[n] = \frac{1}{4} s_1[n] - \frac{1}{4} s_1[n-1]$$

$$\text{da gilt: } s_1[n] \rightarrow g_1[n]$$

$$s_1[n-1] \rightarrow g_1[n-1]$$

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4} g_1[n] - \frac{1}{4} g_1[n-1]$$

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	≥ 5
$g_1[n]$	0	1	2	3	4	4	4
$g_1[n-1]$	0	0	1	2	3	4	4
$h[n]$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0

b) $\{b_k\} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

hier: gleiches Mittelwertfilter der Länge 4

c) aus ^{den} Skizzen bei a) folgt:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

wenn $g_{\text{sprung}}[n]$ die Sprunganwort auf den Einheitssprung

$u[n]$ ist $\Rightarrow$ Impulsabstand $h[n] = g_{\text{sprung}}[n] - g_{\text{sprung}}[n-1]$

d) $s_2[n] = \frac{7}{4} u[n-1] - \frac{7}{4} u[n-4]$

wir müssen $s_2[n]$ in Ausdrücke von $s_1[n]$ umformen

$$s_2[n] = \frac{7}{4} s_1[n-1] - \frac{7}{4} s_1[n-4]$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ LSI-System

$$g_2[n] = \frac{7}{4} g_1[n-1] - \frac{7}{4} g_1[n-4]$$

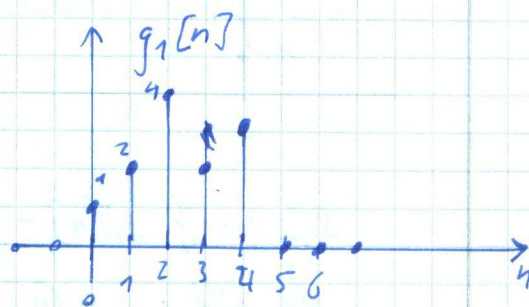
n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_1[n-1]$	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4
$g_1[n-4]$	0	0	0	0	0	1	2	3	4	4
$g_2[n]$	0	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{7}{4}$	0	0

Aufg. 26

a) $s_1[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1] \Rightarrow$

$s_1[n] = 0$ für alle n außer
 $n = -1$ und $n = 1$

$$g_1[n] = \sum_{k=0}^M \frac{1}{K} s_1[n-k]$$



Summe aufschreiben

$$\begin{aligned}
 g[-1] &= b_0 s_1[-1] = 0 \\
 g_1[0] &= b_1 s_1[-1] = 1 \\
 g_1[1] &= b_0 s_1[1] + b_1 s_1[-1] = 2 \\
 g_1[2] &= b_1 s_1[1] + b_2 s_1[-1] = 4 \\
 g_1[3] &= b_2 s_1[1] + b_3 s_1[-1] = 2 \\
 g_1[4] &= b_3 s_1[1] + b_4 s_1[-1] = 3 \\
 g_1[5] &= b_4 s_1[1] + b_5 s_1[-1] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow b_0 &= 0 ; b_1 = 1 ; b_0 + b_2 = 2 \Rightarrow b_2 = 2 ; \\
 b_1 + b_3 &= 4 \Rightarrow b_3 = 3 ; b_2 + b_4 = 2 \Rightarrow b_4 = 0 ; \\
 b_3 + b_5 &= 3 \Rightarrow b_5 = 0
 \end{aligned}$$

Alternative:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$k[n]$	0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
$k[n+1]$	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
$k[n-1]$	0	0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	
$k[n+1] + k[n-1]$	b_0	b_1	$b_2 + b_0$	$b_3 + b_1$	$b_4 + b_2$	$b_5 + b_3$		
$g_1[n]$	0	1	2	4	2	3		

$$\Rightarrow \text{Filterkoeffizienten } \{b_k\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$b) s[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ (-1)^n & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & n > 3 \end{cases}$$

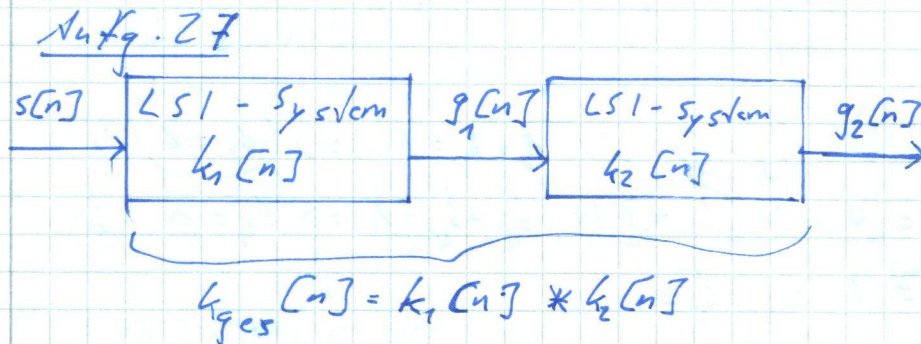
$$\begin{aligned}
 s[n] &= 1 \cdot s[n] - s[n-1] + s[n-2] - s[n-3] \\
 &= s[n] + s[n-2] - (s[n-1] + s[n-3]) \\
 &= s_1[n-1] - s_1[n-2]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g[n] = g_1[n-1] - g_1[n-2]$$

weil FIR-Filter ein LSI-System

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g_1[n-1]$	0	0	1	2	4	2	3	0	0
$g_1[n-2]$	0	0	0	1	2	4	2	3	0
$g[n]$	0	0	1	1	2	-2	1	-3	0

$$\begin{aligned}
 c) \quad k[n] &= b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2] + b_3 \delta[n-3] \\
 &= 0 \delta[n-1] + 2 \delta[n-2] + 3 \delta[n-3]
 \end{aligned}$$



$$k_1[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \beta^n & n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & n > 5 \end{cases}$$

$$k_2[n] = \delta[n] - \beta \delta[n-1]$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$k_1[n]$	1	β	β^2	β^3	β^4	β^5	0
$k_2[n]$	1	$-\beta$	0	0	0	0	0
$k_2[0] k_1[n]$	1	β	β^2	β^3	β^4	β^5	0
$k_2[1] k_1[n-1]$	0	$-\beta$	$-\beta^2$	$-\beta^3$	$-\beta^4$	$-\beta^5$	$-\beta^6$
$k[n]$	1	0	0	0	0	0	$-\beta^6$

$$k_{ges}[n] = \delta[n] - \beta^6 \delta[n-6]$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad g[n] &= s[n] - 0,5^6 s[n-6] \\
 &= s[n] - \frac{1}{64} s[n-6]
 \end{aligned}$$

Aufg. 28

a) Differenzengleichung:

$$g[n] = s[n] + 2s[n-1] + s[n-2]$$

Impulsantwort: $h[n] = 1 \cdot \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + 1 \cdot \delta[n-2]$

Übertragungsfunktion: Folie 6/3

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\hat{\omega}n}$$

hinreichend: $H(\hat{\omega}) = \sum_{n=0}^{n=2} h[n] e^{-j\hat{\omega}n}$

$$= 1 \cdot e^0 + 2 \cdot e^{-j\hat{\omega}1} + 1 \cdot e^{-j\hat{\omega}2}$$

$$= 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} \quad \text{reicht hier als Lösung}$$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (e^{-j\hat{\omega}} + 2 + e^{-j\hat{\omega}})$$

$$= e^{-j\hat{\omega}} (2 + \underbrace{e^{+j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}}}_{2 \cos(\hat{\omega})})$$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (2 + 2 \cos(\hat{\omega}))$$

entspricht Verzögerung um einen Abtastwert

$$\{b_k\} = \{1, 2, 1\}$$

$$\text{Phase } \frac{\pi}{2} \hat{\omega}$$

$$b_k = -b_{M-k}$$

b) Übertragungsform: $H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (2 \cos(\hat{\omega}))$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (e^{+j\hat{\omega}} + e^{-j\hat{\omega}})$$

$$= 1 + e^{-j2\hat{\omega}}$$

Impulsantwort: $h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$

Diff.-gl.: $g[n] = s[n] + s[n-2]$

c) Matlab: $g = \text{conv}([0, 1, 0, -1], s)$

Ausgangssignal

Beschreibung des LSI-Systems

Eingangssignal

$$h[n] = 0 \cdot \delta[n] + 1 \cdot \delta[n-1] + 0 \cdot \delta[n-2] - 1 \cdot \delta[n-3]$$

$$= \delta[n-1] - \delta[n-3]$$

Übertragungsfunktion

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\hat{\omega}n}$$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} - e^{-j\hat{\omega}3}$$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}2} (e^{+j\hat{\omega}} - e^{-j\hat{\omega}}) = e^{-j\hat{\omega}2} 2j \sin(\hat{\omega})$$

$$\{1, 0, -1\}$$

Aufg. 28

a) $g[n] = -s[n] + 2s[n-1] - s[n-2]$

$$\{h_n\} = \{-1, 2, -1\} \text{ und } M=2$$

$$H(\hat{\omega}) = \sum_{n=0}^{M-2} h[n] e^{-j\hat{\omega}n}$$

$$= -1 + 2 \cdot e^{-j\hat{\omega}} - e^{-j\hat{\omega}2}$$

$$= e^{-j\hat{\omega}} (-e^{+j\hat{\omega}} + 2 - e^{-j\hat{\omega}})$$

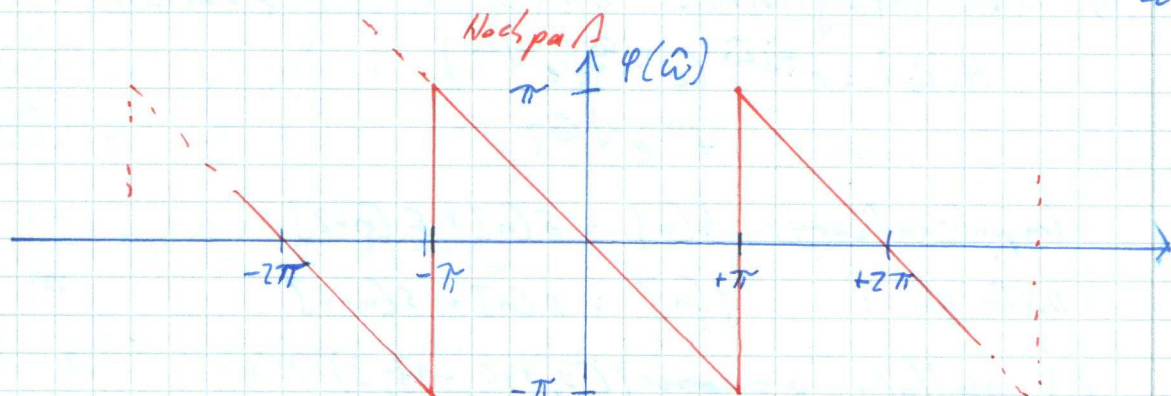
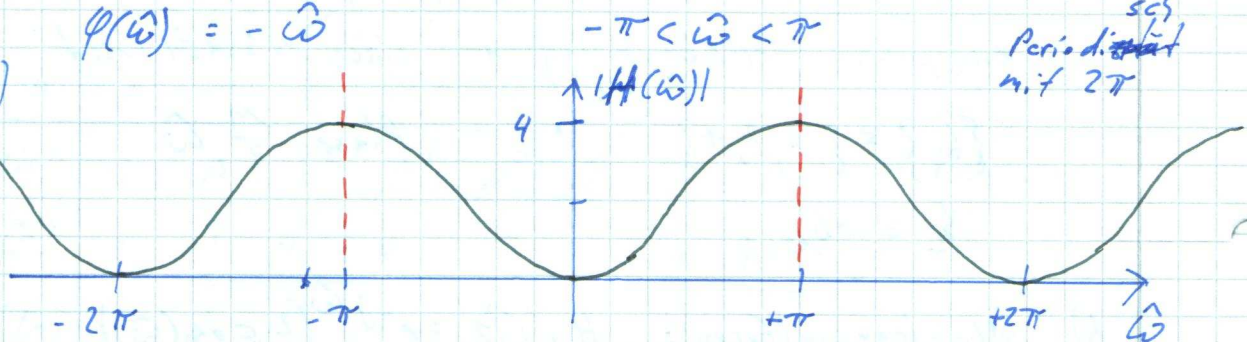
$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (2 - 2 \cos \hat{\omega})$$

≥ 0 für alle $\hat{\omega}$

$$|H(\hat{\omega})| = 2 - 2 \cos \hat{\omega}$$

$$\varphi(\hat{\omega}) = -\hat{\omega}$$

b)



c) $s[n] = 5 + 5 \cos(0,5 \pi n + \frac{\pi}{2})$

$$= 5 \cdot e^{j0} + \frac{5}{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{5}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

Frequenzen im Eingangssignal $\hat{\omega}=0, \hat{\omega} = \pm \frac{\pi}{2}$

$$H(0) = e^{-j0} (2 - 2 \cos 0) = 0$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-j\frac{\pi}{2}} (2 - 2 \cos \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$H\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{+j\frac{\pi}{2}} (2 - 2 \cos(-\frac{\pi}{2})) = 2 \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

Konjugierte Symmetrie
Folie 6/9

$$\begin{aligned} g[n] &= H(0) \cdot 5 \cdot e^{j0} + H\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}n} + H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}n} \\ &= 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} \\ &= 10 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

$$H(\hat{\omega}) = H^*(-\hat{\omega})$$

d) $s[n] = \delta[n]$

$$= \delta[n] * h[n] = h[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

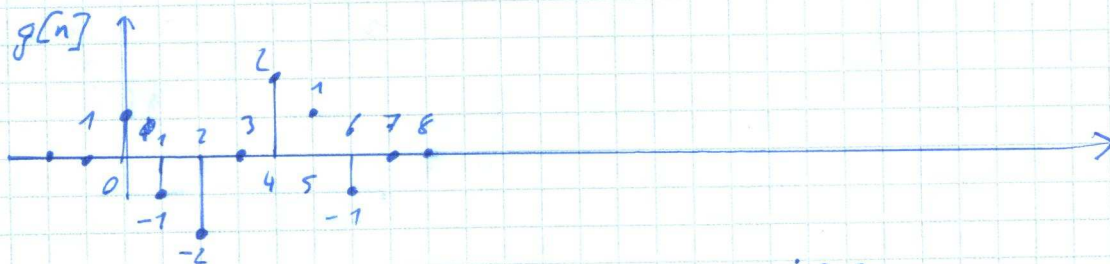
e) $s[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$

$$s[n] = u[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ -1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

Aufg. 30

a) $\{h_k\} = \{+1, 0, -1\}$ $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$

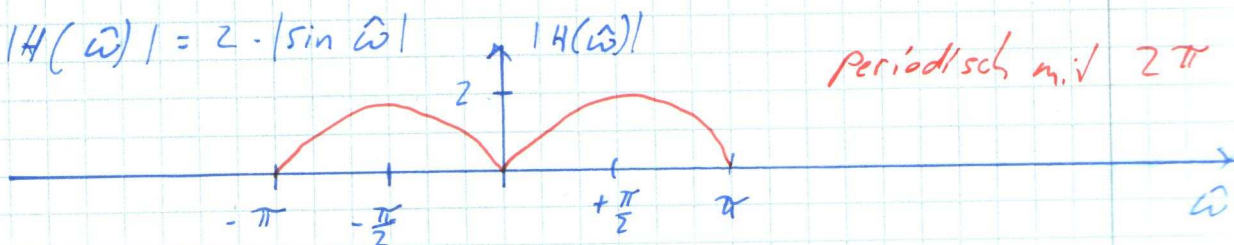
	1	-1	-1	-1	1	0	0	0	*	1	0	1
			-1	1	1	1	0	0	0			
$g[n]$	1	-1	-2	0	2	1	-1	0	0			



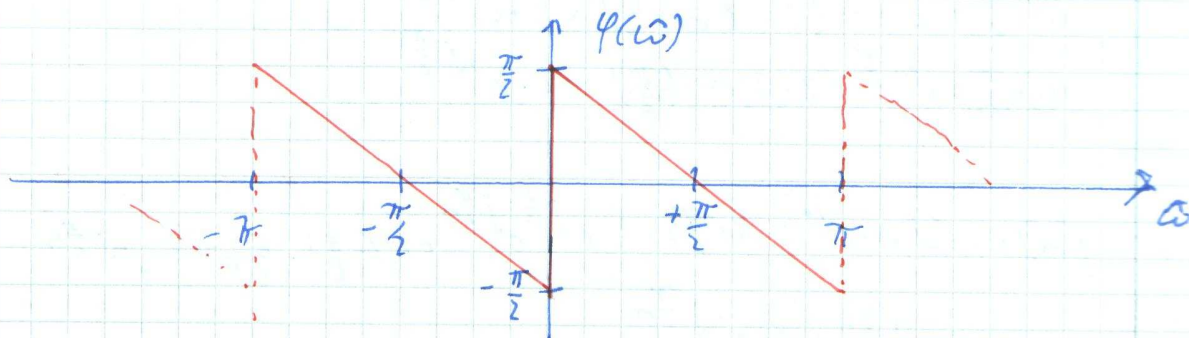
b) $\{h_k\} = \{1, 0, -1\} \Rightarrow H(\hat{\omega}) = 1 - e^{-j\hat{\omega}2}$

$$H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}} (e^{+j\hat{\omega}} - e^{-j\hat{\omega}}) = 2j e^{-j\hat{\omega}} \sin \hat{\omega} = e^{-j\hat{\omega} + \frac{\pi}{2}} \cdot 2 \sin \hat{\omega}$$

$$|H(\hat{\omega})| = 2 \cdot |\sin \hat{\omega}|$$



$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega & 0 \leq \omega < \pi \\ -\frac{\pi}{2} - \omega & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$



Aufg 31

$$a) H(\omega) = (1 + e^{j\omega})(1 - e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\omega})(1 - e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\omega})$$

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow g[n] = s[n] + s[n-3]$$

$$= (1 + e^{-j\omega}) \underbrace{(1 - e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\omega} - e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2})}_{-2 \cos \frac{\pi}{3} e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{2}}$$

14.01.08

$$b) h[n] = \delta[n] + \delta[n-3]$$

$$c) s[n] = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega n}$$

$g[n] = H(\omega)s[n]$ damit $g[n]$ zu Null wird, muss $H(\omega)$ gleich Null werden.

$$1. \text{ Fall: } 1 + e^{-j\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \pi$$

$$2. \text{ Fall: } 1 - e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\omega} = 0 \Rightarrow \omega = -\frac{\pi}{3}$$

$$3. \text{ Fall: } 1 - e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\omega} = 0 \Rightarrow \omega = +\frac{\pi}{3}$$

$$d) s[n] = 3 + \frac{\delta[n-2]}{\delta[n-2]} + \cos(0,5\pi n + \frac{\pi}{4})$$

Frequenzen im Eingangssignal: $\omega = 0$
 $\omega = \frac{\pi}{2}$

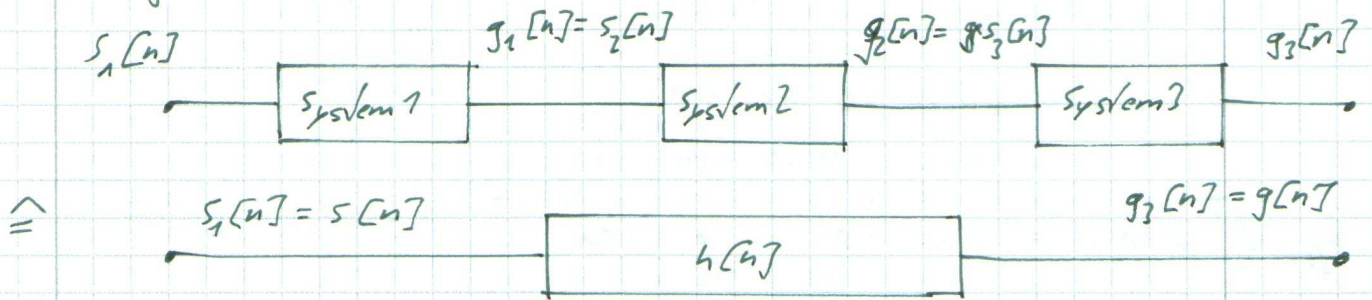
$$H(\omega=0) = 2$$

$$H(\omega = \frac{\pi}{2}) = 1 + e^{-j\frac{3}{2}\pi} = 1 + j = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$g[n] = 3 \cdot H(0) + h[n-2] + \underbrace{|H(\frac{\pi}{2})|}_{\sqrt{2}} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \underbrace{\varphi_{H(\frac{\pi}{2})}}_{+\frac{\pi}{4}})$$

$$= 6 + \delta[n-2] + \delta[n-5] + \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2})$$

Aufg. 22



a) $H_3(\omega) = e^{-j\omega} - e^{-j2\omega} \Rightarrow h_3[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$
 $g_3[n] = s_3[n-1] - s_3[n-2]$

b) $H(\omega) = \sum_n h[n] e^{-j\omega n}$

$H_1(\omega) = 2 \cdot e^{-j\omega 0} + 2e^{-j\omega 2} = 2e^{-j\omega} (e^{+j\omega} + e^{-j\omega})$

$H_1(\omega) = 4 \cdot e^{-j\omega} \cos(\omega)$

$H_2(\omega) = 5 \cdot e^{-j\omega 4} + 5e^{-j\omega 5} = 5e^{-j\omega \frac{9}{2}} (e^{+j\omega \frac{1}{2}} + e^{-j\omega \frac{1}{2}})$

$H_2(\omega) = 10 e^{-j\omega \frac{5}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

c) $H_{ges}(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot H_3(\omega)$
 $= 10(e^{-j\omega 5} - e^{-j\omega 9}) = 10e^{-j\omega 7} (e^{+j\omega 2} - e^{-j\omega 2})$
 $= 10e^{-j\omega 7} (2j) \sin(2\omega)$
 $= 20 \sin(2\omega) \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - 7\omega)}$
Betrag Phasor $\varphi(\omega)$

d) Zwischenergebnis

$g[n] = 10(s[n-8] - s[n-9])$

alternativer Weg zu c+d

$h_1 = [2, 0, 2]$

$h_2 = [0, 0, 0, 0, 5, 5]$

$h_3 = [0, 1, -1]$

$h_{ges} = h_1 * h_2 * h_3$

$[2, 0, 2] * [0, 0, 0, 0, 5, 5] * [0, 1, -1] = [0, 0, 0, 0, 10, 10, 10, 10]$

δ

$$[0, 0, 0, 0, 10, 10, 10, 10] * [0, 1, -1]$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -10 \ -10 \ -10 \ -10$$

$$h_{\text{ges}}[n] \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ -10$$

$$h_{\text{ges}}[n] = 10 \cdot \delta[n-5] - 10 \cdot \delta[n-9]$$

$$g[n] = 10 (\delta[n-5] - \delta[n-9])$$

$$\Downarrow H_{\text{ges}}(\hat{\omega}) = 10(e^{-j\hat{\omega}5} - e^{-j\hat{\omega}9})$$

Aufg. 33

$$a) \ N(\hat{\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\hat{\omega}k} ; \ h[n] = \underbrace{\left[\frac{1}{L}, \frac{1}{L}, \dots, \frac{1}{L}\right]}_L$$

Nebenrechnung: Partialsummanden der geom. Reihe

$$\sum_{k=0}^N q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^N$$

$$(-) \ q \cdot \sum_{k=0}^N q^k = q + q^2 + \dots + q^N + q^{N+1}$$

$$\sum_{k=0}^N q^k - q \sum_{k=0}^N q^k = 1 - q^{N+1}$$

$$\sum_{k=0}^N q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{L-1} q^k = \frac{1 - q^L}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1}$$

$$\text{hier: } q = e^{-j\hat{\omega}}$$

$$\text{also: } N(\hat{\omega}) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1 - e^{-j\hat{\omega}L}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{1}{L} e^{-j\hat{\omega} \frac{L}{2}} \left(\frac{e^{+j\hat{\omega} \frac{L}{2}} - e^{-j\hat{\omega} \frac{L}{2}}}{e^{+j\hat{\omega} \frac{1}{2}} - e^{-j\hat{\omega} \frac{1}{2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{L} \frac{2j \sin(\hat{\omega} \frac{L}{2})}{2j \sin(\hat{\omega} \frac{1}{2})} \cdot e^{-j\hat{\omega} \frac{L-1}{2}}$$

$$H(\omega) = \underbrace{\frac{\sin(\omega \frac{L}{2})}{L \cdot \sin(\frac{\omega}{2})}}_{\text{Amplitude}} \underbrace{e^{-j\omega \frac{L-1}{2}}}_{\text{Phasor}}$$

$$H(\omega) = D_L(\omega) e^{-j\omega \frac{L-1}{2}}$$

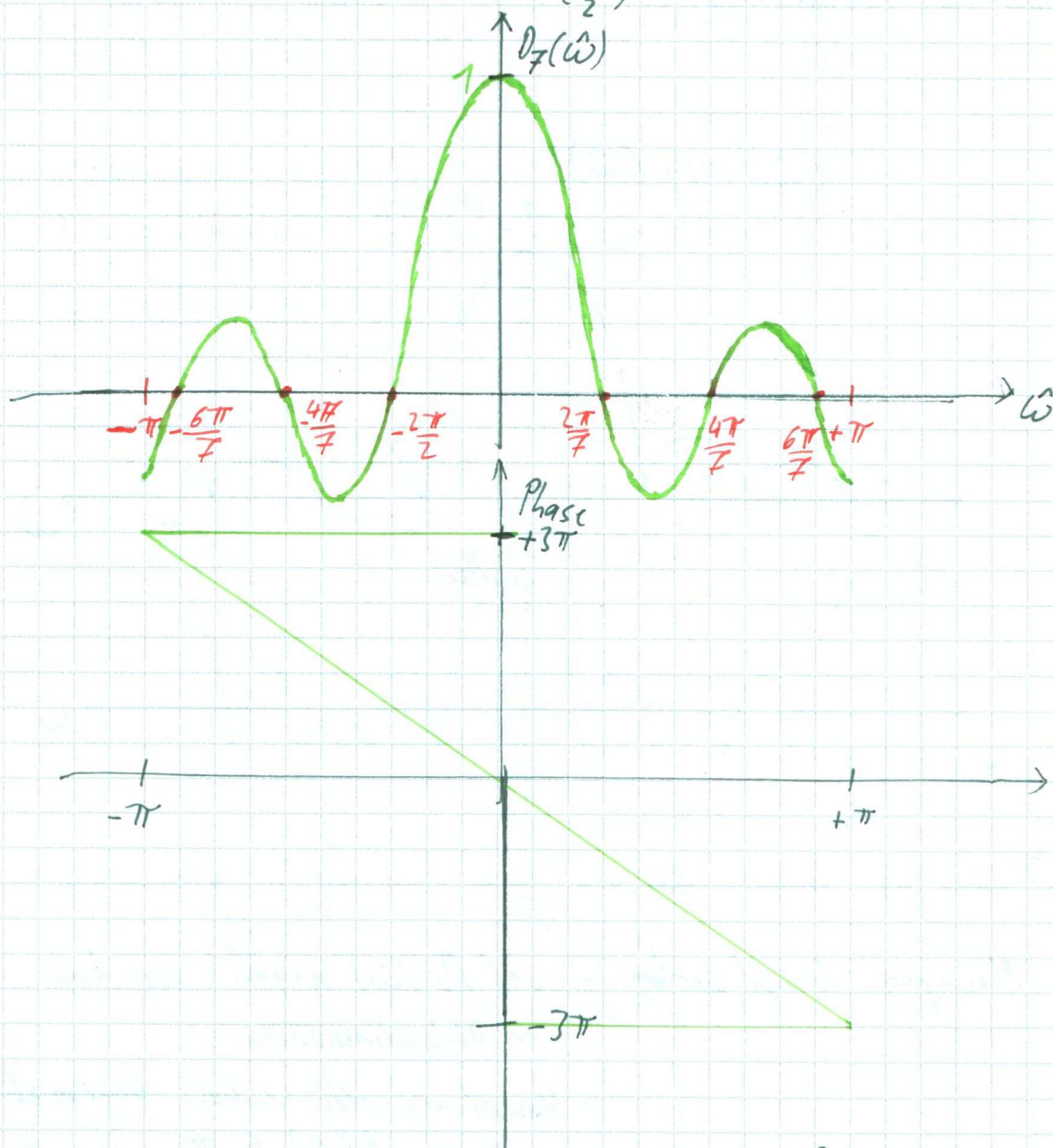
DIRICHLET-Funktion

MATLAB: diric(x, L)

hier: diric(omega hat, 7)

hier: L=7

$$H(\omega) = D_7(\omega) \cdot e^{-j\omega 3} = \frac{\sin(\frac{7\omega}{2})}{7 \sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\omega 3}$$



Nullstelle von $D_7(\omega)$: Zähler = 0 $\Rightarrow 7 \frac{\omega}{2} = \pi k$

Nenner wird maximal für $\omega = \pi$ $\omega = \frac{2\pi}{7} \cdot k$, außer für $k=0$

$D_7(\omega=0) = \frac{0}{0}$ Regel L'Hopital $\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} D_7(\omega) = 1$

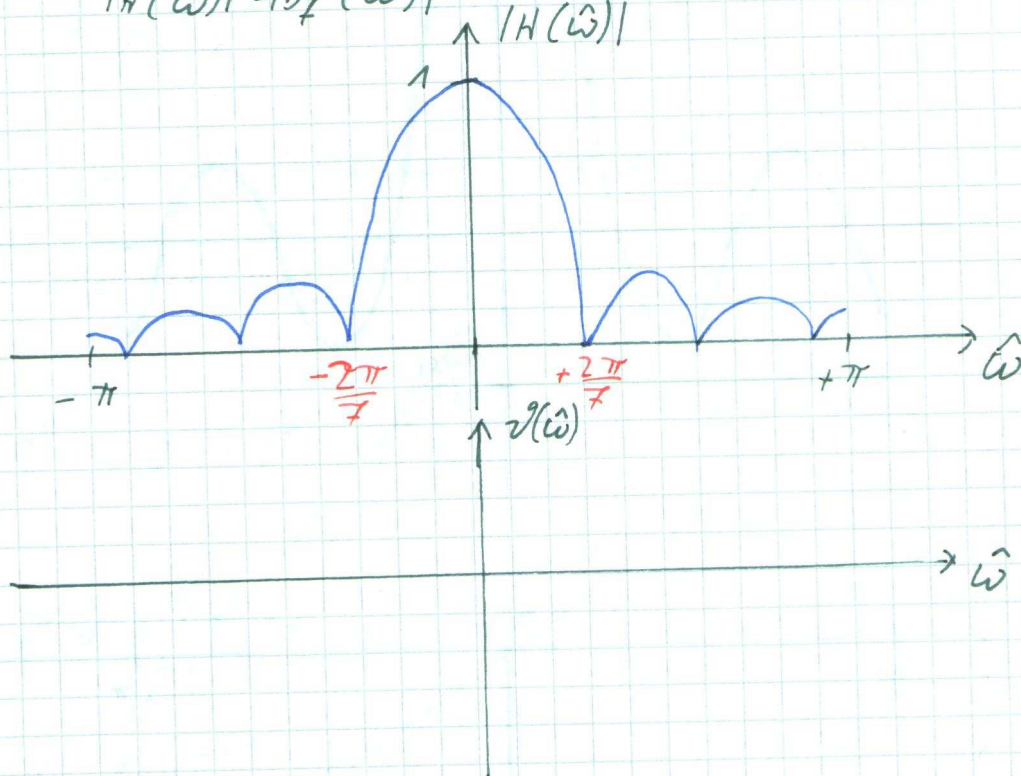
Eigenschaften:

- $D_T(\hat{\omega})$ ist eine gerade Funktion periodisch mit 2π
allgemein: $D_L(\hat{\omega})$ periodisch mit 2π für ungerade L
 $D_L(\hat{\omega})$ " " 4π " gerade L
 $|D_L(\hat{\omega})|$ immer periodisch mit 2π
- $D_T(\hat{\omega})$ Maximalwert von 1 bei $\hat{\omega} = 0$
- $D_T(\hat{\omega})$ Nullstellen bei ganzzahliges Vielfaches von $\frac{2\pi}{T}$

b) $H(\hat{\omega}) = |H(\hat{\omega})| \cdot e^{j\varphi(\hat{\omega})}$

Amplitudengang Phasengang

$$|H(\hat{\omega})| = |D_T(\hat{\omega})|$$



Phasengang komplizierter: - weil $D_T(\hat{\omega})$ negativ sein kann
→ Diskontinuitäten.

- Hauptwert des Winkels begrenzt ist auf
 $-\pi \leq \varphi(\hat{\omega}) \leq \pi$
Vorlesung Folie 2/31

$$\Rightarrow D_T(\hat{\omega}) = |D_T(\hat{\omega})| e^{\pm j\pi}$$

- MATLAB-Funktion 'angle' gibt den Hauptwert an
- Phasengang LSI-System ungerade Fkt. in $\hat{\omega}$
 $\varphi(-\hat{\omega}) = -\varphi(\hat{\omega})$

$$0 \leq \hat{\omega} \leq \frac{2\pi}{T} \quad \varphi(\hat{\omega}) = -3\hat{\omega}$$

$$\frac{2\pi}{T} < \hat{\omega} < \frac{4\pi}{T} \quad \varphi(\hat{\omega}) = -3\hat{\omega} + \pi$$

$$\frac{4\pi}{T} < \hat{\omega} < \frac{6\pi}{T} \quad \varphi(\hat{\omega}) = -3\hat{\omega} + 2\pi$$

$$\frac{6\pi}{T} < \hat{\omega} \leq \pi \quad \varphi(\hat{\omega}) = -3\hat{\omega} + \pi + 2\pi$$

↑ liegen Hauptwert
weil $\varphi(\hat{\omega})$ hier negativ ist.

Die Werte im Bereich $-\pi \leq \hat{\omega} \leq 0$ ergeben sich aus $\varphi(-\hat{\omega}) = -\varphi(\hat{\omega})$

$$c) H(\hat{\omega}) = e^{-j4,5\hat{\omega}} \cdot \frac{\sin 5\hat{\omega}}{\sin(\frac{\hat{\omega}}{2})}$$

Koeffizientenvergleich: $L=10$

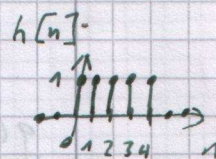
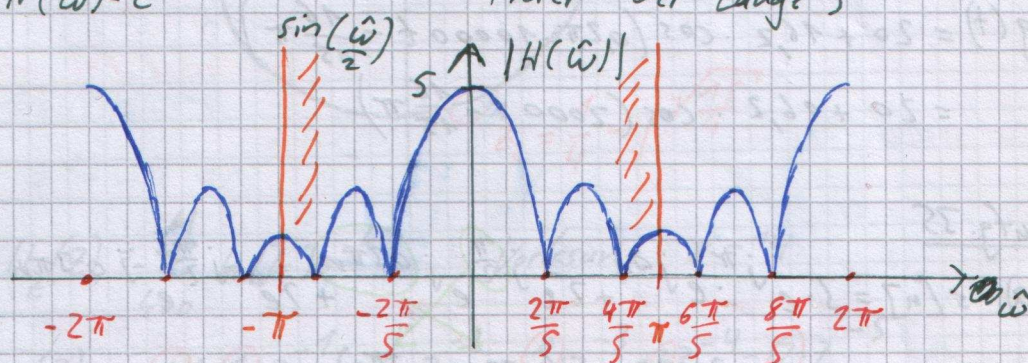
gleichendes Mittelwertfilter der Länge 10 und Filterkoeffizienten:

$$h[n] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

"1"

Aufg. 34

$$a) H(\hat{\omega}) = e^{-j\hat{\omega}2} \cdot \frac{\sin(\hat{\omega} \frac{5}{2})}{\sin(\frac{\hat{\omega}}{2})} \quad \text{Filter der Länge 5}$$



b) Maxima treten dort auf, wo der Nenner zu Null wird

$$\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\hat{\omega}}{2} = k \cdot \pi$$

$$\hat{\omega} = k \cdot 2\pi$$

$$c) s(t) = 4 + 5 \cos\left(2000\pi t - 2\frac{\pi}{3}\right) + 6 \cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow s[n] = s\left(\frac{n}{f_s}\right) = s\left(n \cdot \frac{T_s}{f_s}\right)$$

$$= 4 + 5 \cdot \cos\left(2000\pi \frac{n}{10000} - \frac{2\pi}{3}\right) + 6 \cos\left(4000\pi \frac{n}{10000} + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= 4 + 5 \cdot \cos\left(0,2\pi n - \frac{2\pi}{3}\right) + 6 \cos\left(0,4\pi n + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$s[n] = 4e^{j0n} + \frac{5}{2}e^{j0,2\pi n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + \frac{5}{2}e^{-j0,2\pi n} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + \frac{6}{2}e^{j0,4\pi n} \cdot e^{j\frac{\pi}{5}} + \frac{6}{2}e^{-j0,4\pi n} \cdot e^{-j\frac{\pi}{5}}$$

Übertragungsfunktion Faktor bestimmen für alle Frequenzen, die in $s[n]$ enthalten sind.

$$H(0) = 5 \quad \rightarrow \text{vgl. Dürchset}$$

$$H(0,2\pi) = \frac{\sin(0,2\pi \cdot \frac{5}{2})}{\sin(0,2\pi)} \cdot e^{-j2 \cdot 0,2\pi} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(0,2\pi)} \cdot e^{-j0,4\pi}$$

$$= 3,24 \cdot e^{-j0,4\pi}$$

$$H(-0,2\pi) = 3,24 \cdot e^{+j0,4\pi}$$

$$H(0,4\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\sin(0,2\pi)} \cdot e^{-j0,8\pi} = 0$$

$$H(-0,4\pi) = 0$$

} = Sperrf. $\Rightarrow$ keine Übertragung

$$g[n] = H(0) \cdot 4 + H(0,2\pi) \cdot \frac{5}{2} e^{j0,2\pi n} e^{-j\frac{2\pi}{3}} + H(-0,2\pi) e^{-j0,2\pi n} e^{j\frac{2\pi}{3}} + 0$$

$$= 5 \cdot 4 + 3,24 \cdot e^{-j0,4\pi} \cdot \frac{5}{2} e^{j0,2\pi n} e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 3,24 \cdot e^{+j0,4\pi} \cdot \frac{5}{2} e^{-j0,2\pi n} e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 20 + 3,24 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \cos(0,2\pi n - \frac{16}{15}\pi)$$

$$g(t) = 20 + 16,2 \cdot \cos(0,2\pi \cdot 10000 t - \frac{16}{15}\pi)$$

$$= 20 + 16,2 \cdot \cos(2000 t - \frac{16}{15}\pi)$$

Aufg. 35

$$a) s[n] = 3 \cdot e^{j\pi} \cdot e^{jon} + 2e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j0,3\pi n} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j0,3\pi n}$$

$$= -3 + 2 \cdot 2 \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{2})$$

$$b) h[n] = [\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{9}]$$

$$H(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\hat{\omega} \frac{9}{2})}{9 \cdot \sin(\frac{\hat{\omega}}{2})} \cdot e^{-j\hat{\omega} 4}$$

$\Rightarrow$ Verzögerung um 4
siehe Aufgabe 33

in $s[n]$ sind zwei Frequenzen enthalten

$$H(0) = 1$$

$$H(0,3\pi) = \frac{\sin(0,3\pi \cdot \frac{9}{2})}{9 \cdot \sin(\frac{0,3\pi}{2})} \cdot e^{-j0,3\pi \cdot 4} = -0,21 e^{-j1,2\pi}$$

$$g[n] = 1 \cdot (-3) - 0,21 \cdot 4 \cdot \cos(0,3\pi n + \frac{\pi}{2} - 1,2\pi)$$

$$= -3 - 0,84 \cdot \cos(0,3\pi n - 0,7\pi) = -3 + 0,84 \cos(0,3\pi n + 0,3\pi)$$

Aufgabe 36

a) $P(z) = 1 + \frac{1}{z} z^{-1} + \frac{1}{z} z^{-2} + z^{-3}$

$P(z) \Big|_{z=-1} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - 1 = 0$ Nullstelle bei $z = -1$

$P(z) = (1 + z^{-1}) (1 - \frac{1}{z} z^{-1} + z^{-2})$

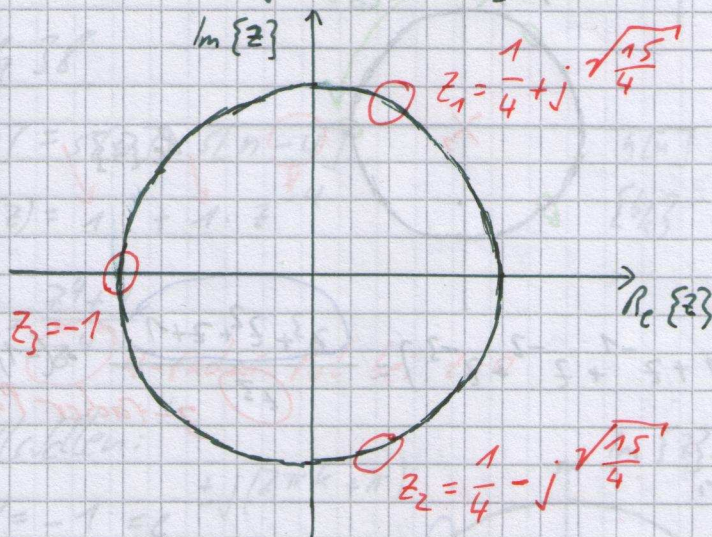
Nullstelle
 $z_3 = -1$

Nullstellen z_1, z_2

$z_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1}$

$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} = \frac{1}{4} \pm j \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$

es gilt: $|z_1| = |z_2| = 1$



b) $H_z(z) = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k}$ Vorlesung 8-14

$H_z(z) = 1 + 1 \cdot z^{-1} - 0 \cdot z^{-2} - 1 \cdot z^{-3} + 2 \cdot z^{-4} - 2 \cdot z^{-5}$

$h[n] = 1 \cdot \delta[n] + 1 \cdot \delta[n-1] - 1 \cdot \delta[n-3] + 2 \cdot \delta[n-4] - 2 \cdot \delta[n-5]$

$h[n] = [1, 1, 0, -1, 2, -2]$

$g[n] = 1 \cdot s[n] + 1 \cdot s[n-1] - 1 \cdot s[n-3] + 2 \cdot s[n-4] - 2 \cdot s[n-5]$

c) System 1: $H_{z_1}(z) = 1 - 1 \cdot z^{-1}$

" 2: $H_{z_2}(z) = 1 + 1 \cdot z^{-2}$

" 3: $H_{z_3}(z) = 1 \cdot z^{-1} - 1 \cdot z^{-2}$

Kaskade: Systemfunktionen multiplizieren

$H_z(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-2})(z^{-1} - z^{-2}) = (1 - z^{-1})(z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} + z^{-4}) = (z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} + z^{-4})(z^{-1} - z^{-2}) = (z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} + z^{-5})$

$$= z^{-1} + z^{-5}$$

Verzögerung um 1 Verzögerung um 5

$$g[n] = s[n-1] + s[n-5]$$

Aufg. 37

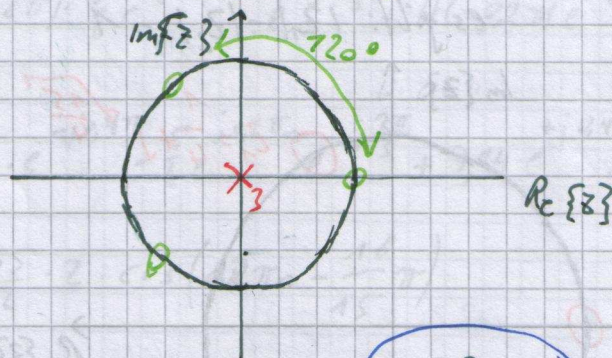
3 Nullstellen

a) $H_z(z) = 3 - 3z^{-3} = \frac{3z^3 - 3}{z^3} = 3 \frac{z^3 - 1}{z^3}$ dreifache Polstelle bei $z=0$

$$z^3 = 1 = e^{\pm j2\pi k} = e^{j0^\circ} \Rightarrow z_1 = 1$$

$$\Rightarrow z_2 = e^{+j\frac{2\pi}{3}} = e^{j120^\circ} = -0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j120^\circ} = -0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$



b) $H_z(z) = -1(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3} \cdot (-1)$ 3-facher Pol bei $z=0$

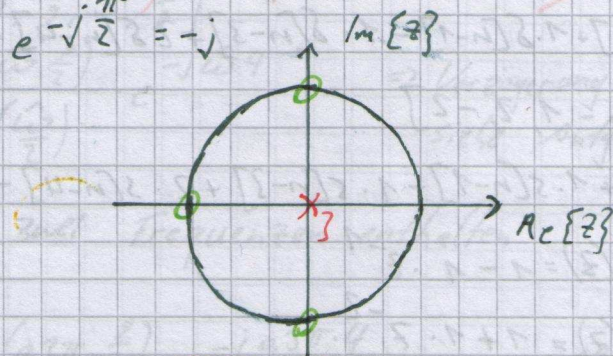
Nullstellen bei

$$(z+1)(z^2+1) = 0$$

$$z_1 = -1 \quad z_{2,3}^2 = -1 = e^{\pm j(2\pi k + \pi)}$$

$$z_2 = e^{+j\frac{\pi}{2}} = j$$

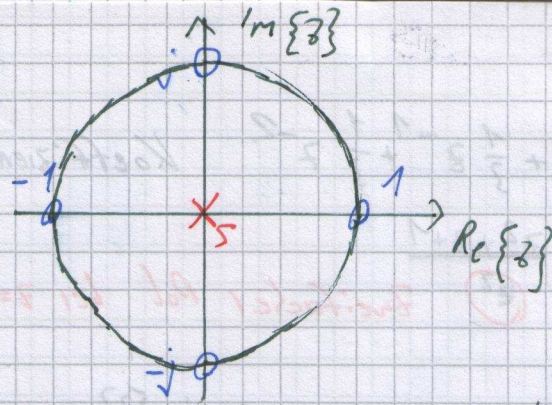
$$z_3 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$



c) $H_z(z) = z^{-1} - z^{-5} = \frac{z^4 - 1}{z^5}$ 5-facher Pol $z=0$

$$\Rightarrow z^4 = 1 \Rightarrow z_k = e^{j\frac{\pi}{2}k}$$

$$z_1 = j \quad z_2 = -1 \quad z_3 = -j \quad z_4 = 1$$

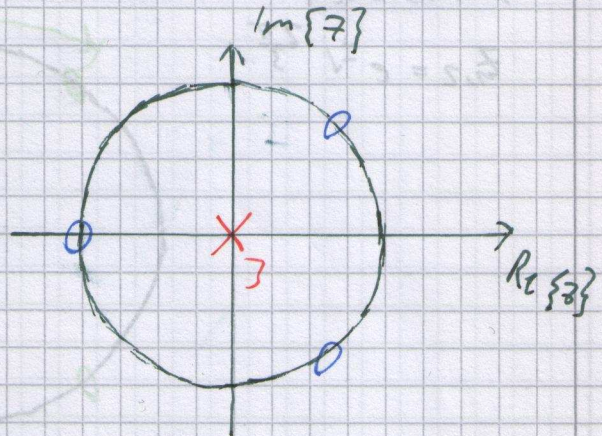


d) $H_2(z) = 1 + z^{-3} = \frac{z^3 + 1}{z^3}$

$$z_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = -1$$



Aufg. 38

a) $g[n] = s[n] + s[n-4]$

$$H_2(z) = 1 + 1 \cdot z^{-4}$$

$h[n]$

$\{b_k\}$

b) $H_2(z) = \frac{z^4 + 1}{z^4}$
 4-facher Pol bei $z=0$

Nullstellen:

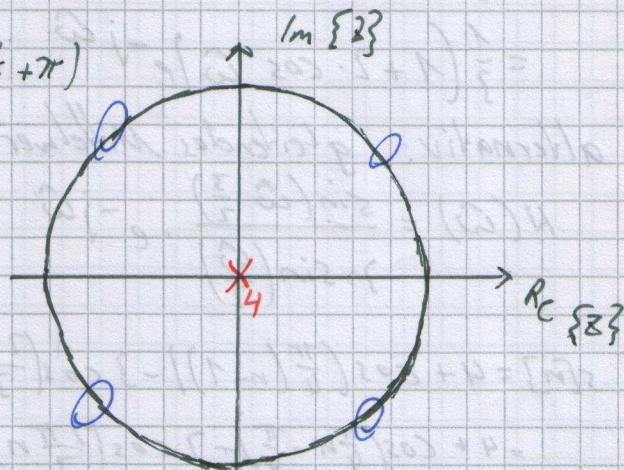
$$z^4 = -1 = e^{j(2\pi k + \pi)}$$

$$\Rightarrow z_1 = e^{+j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_3 = e^{+j\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_4 = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

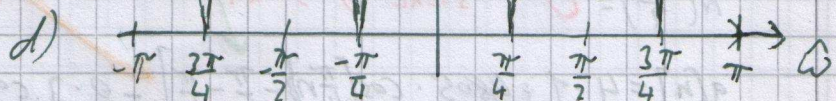


c) $H(\omega) = H_2(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$

$$= 1 + e^{-j4\omega} = e^{-j2\omega} (e^{+j2\omega} + e^{-j2\omega})$$

$$H(\omega) = 2 \cdot \cos(2\omega) \cdot e^{-j2\omega}$$

$$|H(\omega)| = 2 \cdot |\cos(2\omega)| \dots$$



20) Aufg. 39

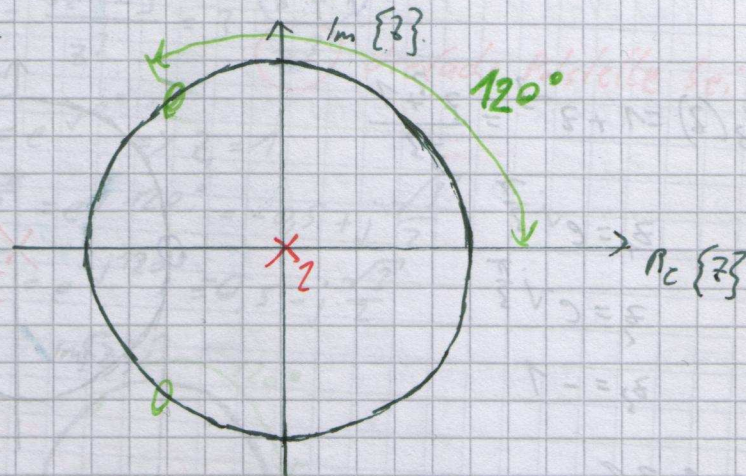
a) $H_2(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}$ Koeffizientenvergleich

b) $N_2(z) = \frac{1}{3} z^2 + z + 1$

(z^2) Zweifacher Pol bei $z=0$

Nullstellen:

$$z_{1,2} = e^{\pm j \frac{2\pi}{3}}$$



c)

$$H_2(\hat{\omega}) = H_2(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-j\hat{\omega}} + \frac{1}{3} e^{-j2\hat{\omega}}$$

$$= \frac{1}{3} e^{-j\hat{\omega}} (e^{+j\hat{\omega}} + 1 + e^{-j\hat{\omega}})$$

$$= \frac{1}{3} (1 + 2 \cdot \cos \hat{\omega}) e^{-j\hat{\omega}}$$

alternativ: gleitendes Mittelwertfilter Länge 3

$$H(\hat{\omega}) = \frac{\sin(\hat{\omega} \frac{3}{2})}{3 \cdot \sin(\frac{\hat{\omega}}{2})} \cdot e^{-j\hat{\omega}}$$

d) $s[n] = 4 + \cos(\frac{\pi}{4}(n-1)) - 3 \cos(\frac{2\pi}{3}n)$
 $= 4 + \cos(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}) - 3 \cos(\frac{2\pi}{3}n)$

$$g[n] = 4 \cdot N(0) + N(\frac{\pi}{4}) \cdot \cos[\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4} + 2(\frac{\pi}{4})] - 3 |N(\frac{2\pi}{3})| \cdot \cos[\frac{2\pi}{3}n + 2(\frac{2\pi}{3})]$$

$$N(0) = 1$$

$$N(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4})) \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = 0,805 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$N(\frac{2\pi}{3}) = 0 \quad \text{siehe b) Nullstelle von } H_2(z) \text{ bei } z = e^{\pm j \frac{2\pi}{3}}$$

$$g[n] = 4 \cdot 1 + 0,805 \cdot \cos[\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}] - 0 \cdot 3 \cos(\dots) = 4 \cdot 0,805 \cos[\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2}]$$