

Definition einer zeitlich periodischen Funktion
(Wechselgröße):

$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle Zeitpunkte } t \text{ mit}$$

$$T > 0$$

T: Periodendauer

Definition bez. Wechselgrößen

Momentanwert

Mittelwert

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y(t) dt$$

Effektivwert

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} y^2(t) dt}$$

Betrachtung einer beliebigen Periode

ohne Einschränkung: Beginn bei $t=0$ erl.
passende Substitution für $t \hat{=}$ Verschiebung

Aufgabe 1

1) • Abschnittsweise Definition von $i(t)$

$$i(t) = \begin{cases} \frac{I}{aT} & \text{für } 0 \leq t < aT \\ 0 & \text{für } aT \leq t < T \end{cases}$$

• Mittelwert

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{aT} \frac{I}{aT} t dt + \underbrace{\int_{aT}^T 0 dt}_0 \right]$$

$$= \frac{\frac{a}{2} \hat{I}}{aT^2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{aT} = \frac{a}{2} \hat{I}$$

Alternative:

Flächeninhalt des Dreiecks

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} gh = \int_0^T i(t) dt$$

$$g \stackrel{!}{=} aT$$

$$h \stackrel{!}{=} \hat{I}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{T} A_{\Delta} = \frac{1}{T} \frac{1}{2} aT \hat{I} = \frac{a}{2} \hat{I}$$

• Effektivwert

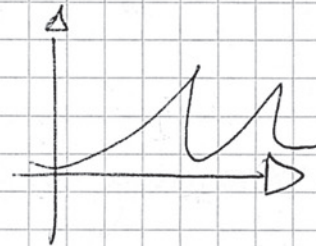
$$\bar{I} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{aT} \left(\frac{a}{aT} t \right)^2 dt + 0}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{a^2}{T}}{a^2 T^3} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^{aT}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{T}}{a^2 T^3} \left[\frac{1}{3} a^3 T^3 \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{3}}$$

kein Dreieck, sondern
Parabel
z.B.



2.)

• Mittelwert

pos. und neg. Halbwellen von $i(t)$ sind gleich

$$\Rightarrow \bar{I} = 0$$

GE II
GE

• Effektivwert

abschnittsweise Definition

$$i(t) = \begin{cases} \frac{\hat{I}}{T/6} \cdot t & \text{für } 0 \leq t < T/6 \\ \hat{I} & \text{für } T/6 \leq t < T/3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Ausnutzung der Symmetrie
gleiche Flächen zusammenfassen

$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/6} \left(\frac{\hat{I}}{T/6} \cdot t\right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/6}^{T/3} \hat{I}^2 dt}$$

Anzahl der Flächen gleicher Größe

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 6^2}{T^3 \cdot 4} \hat{I}^2 \cdot \left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^{T/6} + \frac{2}{T} \hat{I}^2 \cdot t \Big|_{T/6}^{T/3}}$$

oder mit
Substitution:
 $\int_{\tilde{t}=0}^{T/6} \frac{1}{T} \hat{I}^2 d\tilde{t}$
mit $\tilde{t} = t - T/6$

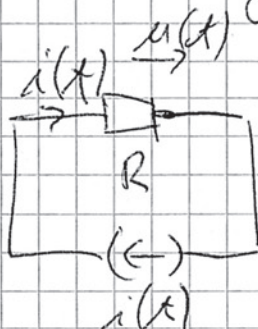
$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 6^2}{T^3} \hat{I}^2 \cdot \frac{T^3}{3 \cdot 6^3} + \frac{2}{T} \hat{I}^2 \left[\frac{2 \cdot T}{6} - \frac{T}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9} \hat{I}^2 + \frac{1}{3} \hat{I}^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \hat{I}$$

hier $\bar{I} = 0$ oder $\bar{I} \neq 0$, weil $i^2(t)$ stets pos. ist.

$\Rightarrow$ Effektivwert I sagt etwas über die Leistung aus

Bsp:



$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

R erwärmt sich unabhängig von Stromrichtung

Aufgabe 2

Praxisbsp: Phasenauschnittsdimmer

- Momentanleistung $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

- Bauteilgleichung für R: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$

- Leistung an R:

$$P = P_R = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_R(t) \cdot i_R(t) dt$$

$$= R \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i_R^2(t) dt$$

Quadrat des Effektivwerts des Stroms $\cdot I^2$

$$= R \cdot I^2$$

$u(t) \neq u_R(t)$!
(wegen Thyristor)

- Effektivwert $I = I(\omega)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Substitution, um von Zeitachse
auf Winkelachse in Bogenmaß zu
kommen

$$\varphi := \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t \Rightarrow t = \frac{1}{\omega} \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow dt = \frac{T}{2\pi} d\varphi$$

GET II
QÜ

bas. die Zeitgrößen (t und T) mit ω multiplizieren

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} i^2(\omega t) d(\omega t)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\alpha}^{\pi} \underbrace{\frac{I_m^2}{2} \sin^2(\omega t)}_{\frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))} d(\omega t)$$

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}} \int_{\alpha}^{\pi} (1 - \cos(2\omega t)) d(\omega t)$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}} \left[\omega t \Big|_{\alpha}^{\pi} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sin(2\omega t) \right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{innere Ableitung}}} \Big|_{\alpha}^{\pi} \right] \quad \text{Potenzregel}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}} \left[\pi - \alpha - 0 + \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right]$$

$$I(\alpha) = \frac{I_m}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin(2\alpha)}$$

α im Bogenmaß!

$$\text{mit } \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{R} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220V}{100\Omega} = 3,11 \text{ A}$$

$\Rightarrow$ Umrechnung

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha_{\text{deg}}$$

$$\alpha_1 \stackrel{!}{=} 0^\circ \Rightarrow \text{rad} \quad (\Rightarrow \text{Dreie})$$

$$I(\alpha_1 = 0^\circ) = \frac{\hat{I}}{2} \sqrt{1 - \frac{0}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin(0)} = \frac{\hat{I}}{2} = 1,56 \text{ A}$$



ganze Halbwelle

$$\Rightarrow P(\alpha_1) = R \cdot I^2(\alpha_1) = 243,4 \text{ W}$$

$$\alpha_2 = 5/6\pi \stackrel{!}{=} 150^\circ$$



$$I(\alpha_2) = \frac{I}{2} \sqrt{1 - \frac{5}{6} + \frac{1}{24} \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)} = 0,264 \text{ A}$$

$$\Rightarrow P(\alpha_2) = R \cdot I^2(\alpha_2) = 6,97 \text{ W}$$

Alternative Rechnung mit φ

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{L_T} i^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) \cdot \underbrace{\frac{I}{\sqrt{2}}}_{t = \frac{1}{\omega} \cdot \varphi} \cdot d\varphi} \quad dt = \frac{T}{2\pi} d\varphi$$

Sub. der Grenzen $\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{I^2}{2} \sin^2\left(\frac{\omega}{\omega} \varphi\right) d\varphi}$$

GET II
GÜ

Nachtrag zu Aufgabe 1

Allg. (zeitl.) periodische Größe

$$y(t) = \bar{y} + \tilde{y}(t)$$

Mischgröße Gleichgröße (DC) Wechselgröße (AC)

DC: „Wechselgröße“ hat Mittelwert $\bar{y} = 0$

SET I

DC:

$$U = \text{const}$$

$$I = \text{const}$$

SET II

DK+AC

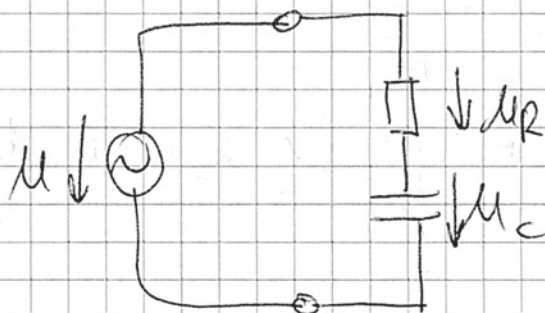
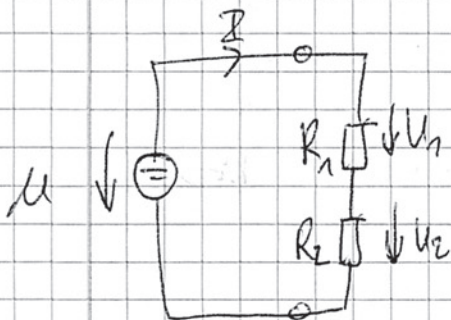
allg.: $u = u(t)$
 $i = i(t)$

insbesondere

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Bsp:



mit $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$

Kirchhoff'sche Gleichungen

z.B. $U = U_1 + U_2$

$\Rightarrow$ alg. Summe

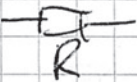
z.B. $u = u_R + u_C$

$$u = \overset{u}{u_R} \cdot \cos(\omega t + \varphi_R) + \overset{u}{u_C} \cdot \cos(\omega t + \varphi_C)$$

$\Rightarrow$ trig. Summe

$\Rightarrow$ Additionstheoreme

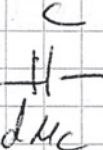
Beitragsgleichungen

Widerstand 

$$U_R = R \cdot I_R$$

z.B. $U = R_1 I + R_2 I$

$\Rightarrow$ lineare algebr.
Gleichungen
(Polynom)

Kapazität 

$$i_C = C \cdot \frac{d u_C}{dt}$$

Induktivität 

$$U_L = L \cdot \frac{d i_L}{dt}$$

z.B.

$$u = \underbrace{R C \cdot \frac{d u_C}{dt}}_{i_L} + u_C$$

$\Rightarrow$ lineare DGLs

zwei Fälle von zu lösenden Problemen bzgl.
Schaltungsanalyse in GET II

a) alg. zeitabhängige $y(t)$

$\Rightarrow$ Lösen von DGLs

$\Rightarrow$ Kapitel 52: Transiente Vorgänge

GET II
GÜ

b-) sinusförmige (harmonische) Größen

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi_y)$$

Hilfsmittel: komplexe Zahlen

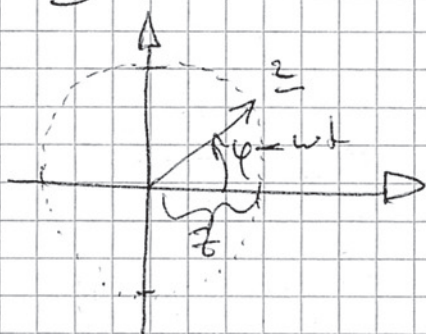
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
⊖ Add-Theorem	Vektoraddition ⊕
⊖ Wels	Algebraische Gleichungen ⊕

⇒ Kapitel 5.3 Komplexe Wechselstromrechnung

Einführung: komplexe Zahlen

Rotierender Vektor

$$\underline{z}(t) = \underline{z} e^{j\varphi(t)} = \underline{z} e^{j\omega t}$$



• Differenzieren

$$\frac{d\underline{z}(t)}{dt} = j\omega \cdot \underline{z}(t)$$

• Integrieren

$$\int \underline{z}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{z}(t) = -j \frac{1}{\omega} \underline{z}(t)$$

Bsp:

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = 4V \cdot \cos(\omega t + \pi/6)$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = 2V \cdot \cos(\omega t + \pi)$$

$$u_1(t) + u_2(t) = ?$$

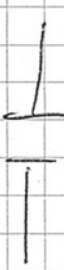
$$u_1(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + j \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \}$$

$$u_2(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) + j \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \}$$

$$\underline{u}_1(t) = \hat{u}_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} = 4V e^{j(\omega t + \pi/6)}$$

$$\underline{u}_2(t) = \hat{u}_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} = 2V e^{j(\omega t + \pi)}$$

Phasor: $\underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

	R	C $\underline{Y}_C$
	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$ $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt$	$i_C(t) = j\omega C \cdot u_C(t)$ $\underline{u}_C(t) = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i}_C(t)$ $\underline{Z}_C$
	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt$ $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$\underline{i}_L(t) = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{u}_L(t)$ $\underline{u}_L(t) = j\omega L \cdot \underline{i}_L(t)$ $\underline{Z}_L$

Analogie zum ohmschen Gesetz

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

$$\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$$

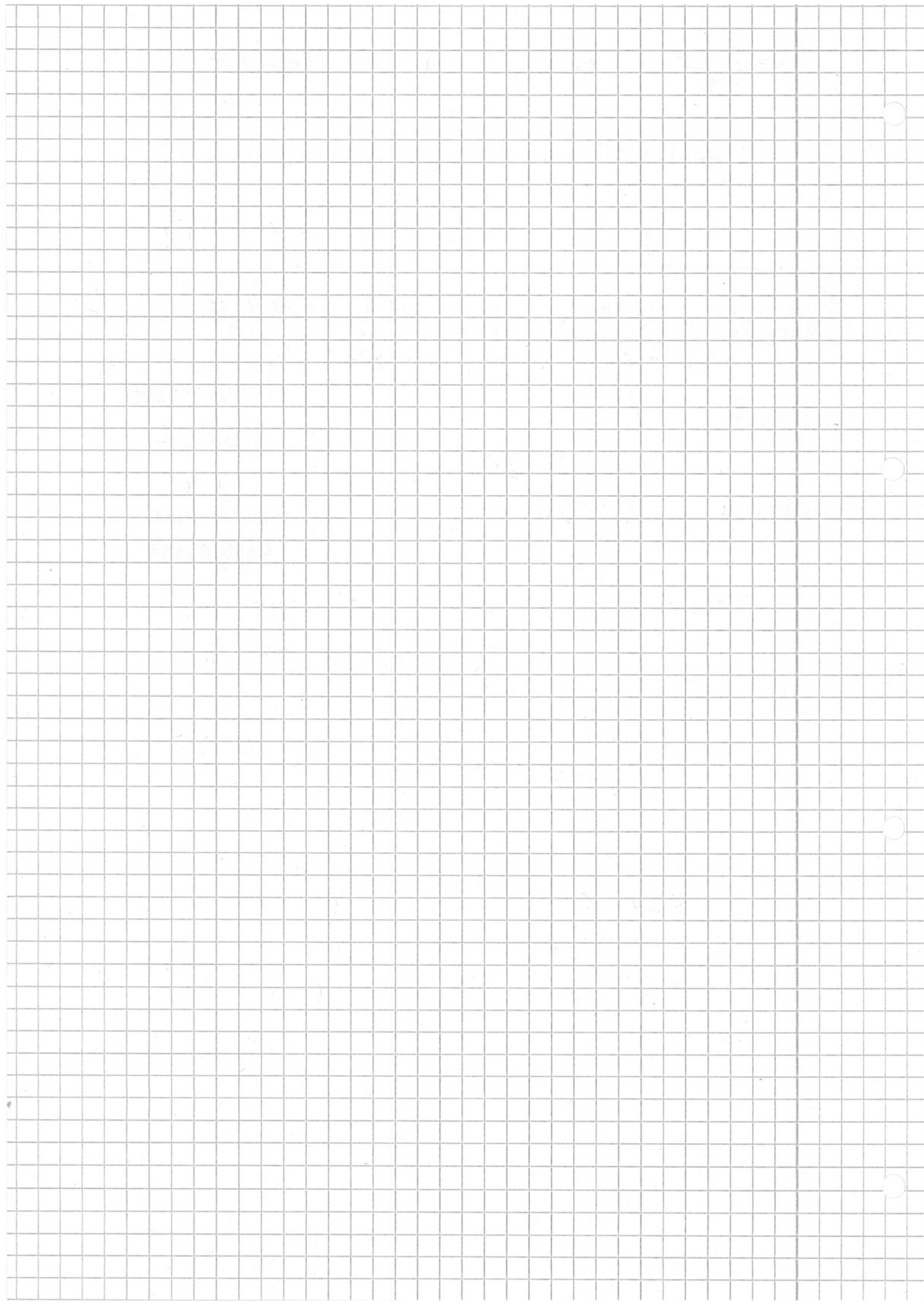
Impedanz $Z (= R)$

Admittanz $Y (= \frac{1}{R} = G)$

$\Rightarrow$ mit AC rechnen, wie vor K bekannt

Übersetzung der Bezeichnungen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

	$\mathbb{R}$		$\mathbb{C}$
harm. Wechselgröße	$y(t)$	$\underline{y}(s) = \underline{Y}_d$	Reizgeber
Scheitelwert	$\overset{a}{\underset{a}{Y}}$	$\underline{\overset{a}{X}}$	Phasor mit Scheitelwert
Effektivwert	Y	$\underline{X}$	Phasor mit Effektivwert



GET II
RGÜ

RG2:

$$\underline{M}_g = -R \left(\frac{M_1}{R} + \frac{M_2}{R} + \frac{M_3}{R} + \frac{M_4}{R} \right)$$

$$\underline{M}_g = 57103 \cdot e^{-j 18,5176^\circ}$$

RG3(1):

$$a) \quad \bar{Y} = \frac{1}{T} \frac{T \cdot \hat{I}}{2} = \frac{\hat{I}}{2}$$

$$b) \quad \bar{Y}_{\text{gleichwert}} = \bar{Y} = \frac{\hat{I}}{2}$$

$$c) \quad Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\hat{I}}{T} t \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{I}^2}{T^2} t^2 dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \frac{\hat{I}^2}{T^2} t^3 \Big|_0^T} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{\hat{I}^2}{T^2} T^3 (T-0)}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{T^2} T}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T t^2 dt \cdot \frac{\hat{I}^2}{T^2}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^T}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} T^3} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \hat{I}^2} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{3}}$$

RG4

$$h) \quad \rho = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt$$

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

$$= \frac{R}{T} \int_0^T \left(\frac{\hat{I}}{2} \cdot \sin(\omega t) + \frac{\hat{I}}{2} \right)^2 dt$$

$$= \frac{R}{T} \int_0^T \frac{I^2}{2} dt = \frac{R}{T} \int_0^T \left[\frac{I^2}{2} \sin^2(\omega t) + 2 \cdot \frac{I}{2} \sin(\omega t) \cdot \frac{I}{2} \right] dt$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{R}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) + \sin(\omega t) + \frac{1}{4} \right] dt$$

$$= \frac{I^2 \cdot R}{T} \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} t \right]_0^T$$

$$= \frac{I^2 \cdot R}{T} \left[\frac{3}{4} T - \sin(2\omega T) \cdot \frac{1}{4\omega} - \frac{1}{\omega} \cos(\omega T) \right]$$

$$= \frac{I^2 \cdot R}{T} \left[\frac{3}{4} T - \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{2\pi}{T}} - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) \right]$$

$$= \frac{I^2 \cdot R}{T} \left[\frac{3}{4} T - \frac{1}{4 \cdot \frac{2\pi}{T}} - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \right]$$

$$= \frac{I^2 \cdot R}{T} \left[\frac{3}{4} T - \frac{T}{8\pi} - \frac{T}{2\pi} \right] = \frac{I^2 \cdot R}{T} \cdot \frac{3}{4} T = \frac{3}{4} I^2 \cdot R$$

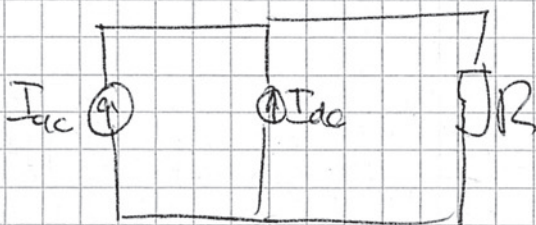
③

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(x) dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{3}{4} I^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} I$$

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{3}{4} R I^2$$

d)



$$G = \frac{I}{R} \quad \text{②}$$

②

$$I_{dc} = \frac{\hat{I}}{2}$$

(per Def., da dieser Term nicht zeitabhängig ist)

alternativ

$$I_{dc} = \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

da reine

$$I_{ac} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{alternativ } I_{ac} = \sqrt{\int_0^T \frac{1}{T} i_{ac}^2(t) dt}$$

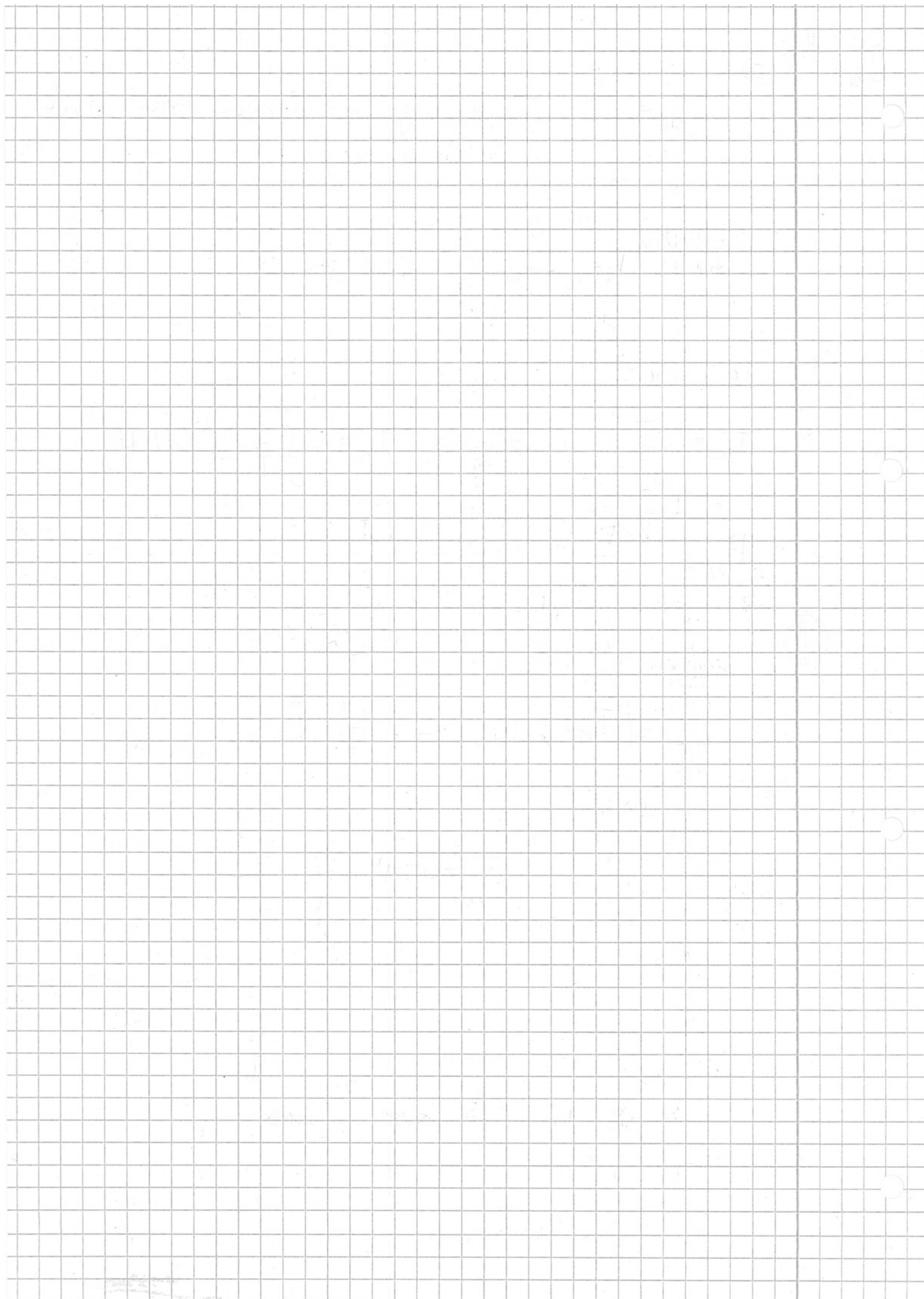
$$P_{ac} = \frac{R \hat{I}^2}{4}$$

$$P_{ac} = \frac{R \hat{I}^2}{2}$$

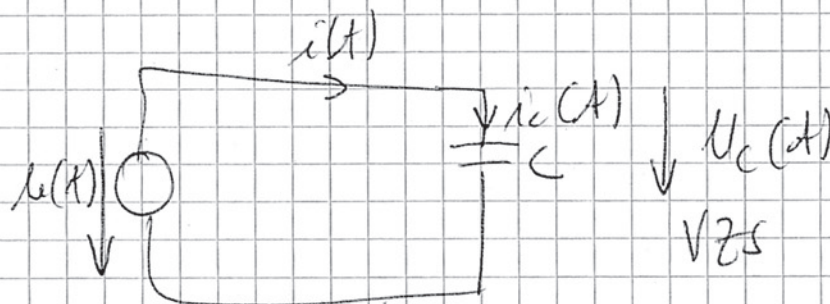
③

$$P_{ges} = P_{ac} + P_{dc} = \frac{3}{4} R \hat{I}^2$$

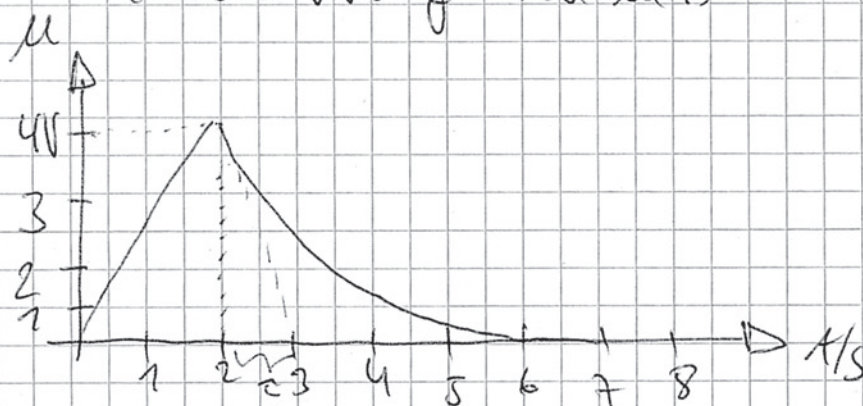
$$I_{ges} = \sqrt{I_{ac}^2 + I_{dc}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{I}$$



1) Schaltung



zeitliche Verlauf von $u(t)$



Reihenentwicklung von e^x

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

Näherung 1. Ordnung

mit $x = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 1 - \frac{t}{\tau}$

Anfangssteigung

$$\left. \frac{d(1 - \frac{t}{\tau})}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

2) Strom $i(t)$

Bauteilgleichung

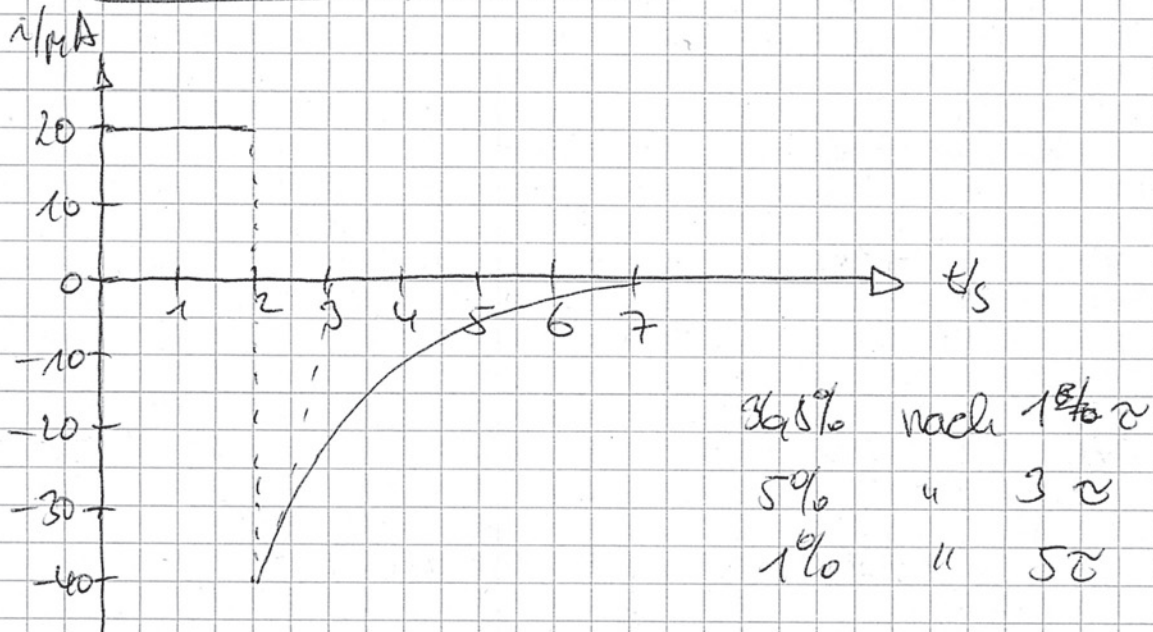
Kondensator

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} = \begin{cases} C \cdot 0 = 0 & \text{für } t=0 \\ C \cdot \frac{2V}{\tau} = 20 \mu A & 0 < t \leq 2 \\ C \cdot \frac{-4V}{\tau} \cdot e^{-\frac{(t-2s)}{\tau}} = -40 \mu A e^{-\frac{t-2s}{\tau}} & t > 2s \end{cases}$$

(mit $\tau = 1s$ und $C = 10 \mu F$)

Zeitlicher Verlauf des Stroms $i(t)$ $[F] = \frac{As}{V}$



3) Leistung $p(t)$:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

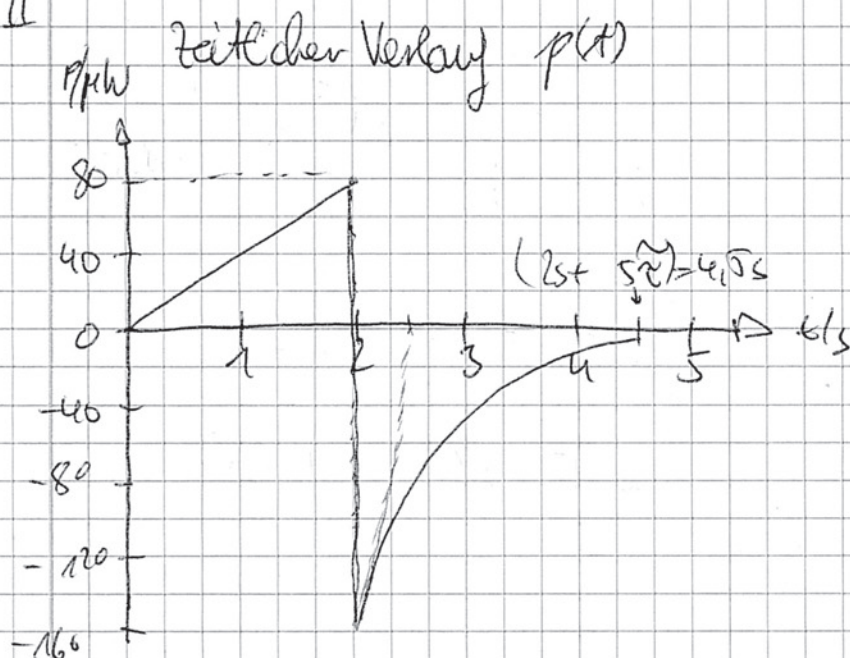
$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \left[2V \cdot \frac{t}{\tau} \right] [20 \mu A] = 40 \mu W & 0 < t \leq 2 \\ \left[4V \cdot e^{-\frac{(t-2s)}{\tau}} \right] \left[-40 \mu A \cdot e^{-\frac{(t-2s)}{\tau}} \right] = -160 \mu W e^{-\frac{2(t-2s)}{\tau}} & t > 2s \end{cases}$$

* Halbiert Zeitkonstante

$$-2 \left(\frac{t-2s}{\tau} \right) = - \frac{t-2s}{\tau/2} = - \frac{t-2s}{\tau}$$

GET II

GU



4) Energie $w(t)$:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

Für $t \leq 0$:

$$w(t=0) = \int_{-\infty}^0 0 dt = 0$$

Für $0 < t \leq 2s$:

$$w(t) = w(t=0) + \int_0^t 40 \mu W \cdot \frac{\tilde{t}}{2} d\tilde{t}$$

$$= 0 + 40 \mu W \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\tilde{t}^2}{2} \right]_0^t = 20 \mu W \cdot \frac{1}{2} t^2$$

Seitenab-
korrektur

$$= \boxed{20 \mu J} \cdot \frac{t^2}{2}$$

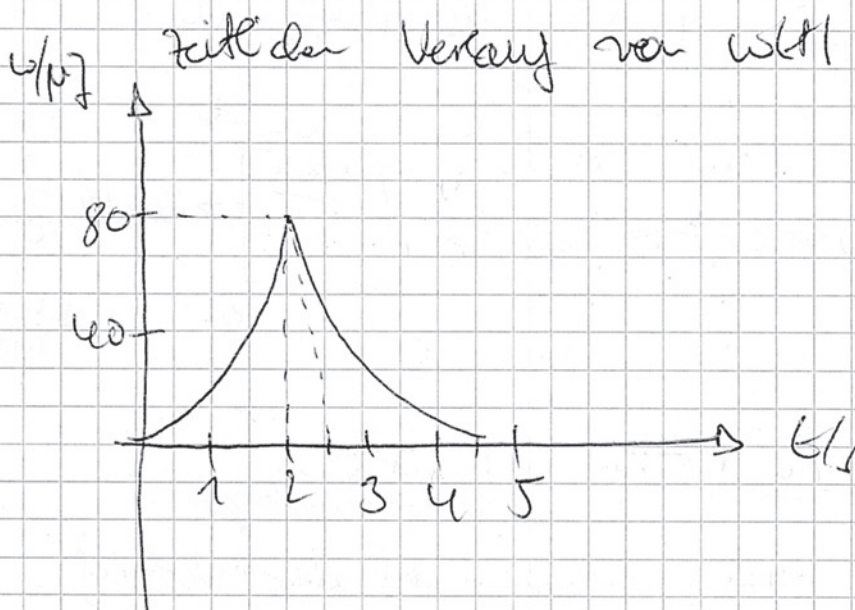
Dimensionslos

zeitlicher Verlauf

für $t > 2s$:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= w(t=2s) + \int_{2s}^t (-16\mu W) e^{-2 \cdot \left(\frac{\tau-2s}{\tau}\right)} d\tau \\
 &= 80\mu J - 160\mu W \cdot \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2 \cdot \left(\frac{\tau-2s}{\tau}\right)} \right]_{2s}^t \\
 &= 80\mu J - 160\mu W \cdot \frac{\tau}{2} \left[e^{-2 \cdot \left(\frac{t-2s}{\tau}\right)} - 1 \right] \\
 &= 80\mu J + 80\mu J \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{t-2s}{\tau}\right)} - 80\mu J \\
 &= \boxed{80\mu J} \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{t-2s}{\tau}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 20\mu J \cdot \frac{t^2}{\tau^2} & 0 < t \leq \tau \\ 80\mu J \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{t-2s}{\tau}\right)} & t > 2s \end{cases}$$



Differentialgleichungen in GET II

- gewöhnliche lineare DGL mit konst. Koeff.
- Anregung / Störung: $g(x)$
 - $g(x) = 0 \Rightarrow$ homogene DGL
 - $g(x) \neq 0 \Rightarrow$ inhomogene DGL
- Allg. Lösung:
 - Funktion (hier $g(x)$) mit n unbestimmten Konstanten
- Partikuläre / spezielle Lösung
 - Erhält sich aus allg. Lösung durch Festlegen der n Konstanten
- Anfangswertprobleme
 - Es werden n ^{Anfangswerte} Nebenbedingungen als Nebenbedingung der DGL vorgegeben
 - $\Rightarrow$ Bestimmen der spez. Lsg. dieses AWP's aus allg. Lösung der DGL

Für Raum

- DGL höherer Ordnung aufstellen
- DGL bis einschl. 2. Ordnung lösen können

A4

1) DGL aufstellen

Spannungen und Ströme nach Kirchhoff bestimmen

• Maschengleichung für $t \geq 0$:

$$u(t) = U_0 - u_{R_1}(t)$$

• Knotengleichung für $t \geq 0$:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

• Bauteilgleichungen in Knotengl.

$$\frac{u_{R_1}(t)}{R_1} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow u_{R_1}(t) = R_1 \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{R_1}{R_2} \cdot u(t)$$

• Einsetzen in Maschengleichung

$$u(t) = U_0 - R_1 \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} - \frac{R_1}{R_2} \cdot u(t)$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \left[1 + \frac{R_1}{R_2}\right] u(t) = U_0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{R_1 \cdot C \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{=\tau} \cdot \frac{du(t)}{dt} + \boxed{u(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$

$$\Leftrightarrow \left[\tau \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \right] \quad (I)$$

GET II
Q6

Inhomogene (gewöhnl. lineare) DGL 1. Ordnung

Hier 2 Lösungsverfahren (vgl. Bsp. U-Skript 4.9.3)

a) Reg. Lsg.verfahren (Superposition der homogenen und einer partikulären Lsg.)

- homogene Lsg bestimmen durch Trennung der Variablen

- partik. Lsg bestimmen durch Typ der Störfkt. bzw. durch Betrachtung des stationären Zustands

- Superpositionsatz
 $\Rightarrow$ Allg. Lsg der DGL

- Lösung des AWP $\Rightarrow$ u(t)

b) spez. Lsg.verfahren: Anfangs-Endwertmethode (AEM)

- Anfangswerte bestimmen

- Endwerte "

- Zeitkonstante "

- $\Rightarrow$ unmittelbare Lsg des AWP

a) Superpos. hom. und einer part. Lsg.

• Allg. Lsg. der DGL

$$u(t) = \underbrace{u_h(t)}_{\text{hom.}} + \underbrace{u_p(t)}_{\text{part.}}$$

• Homogene Lsg. (für $u_h(t) \neq 0$):

Trennung der Variablen

$$(i) \Rightarrow c \cdot \frac{du_h(t)}{dt} + u_h(t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\frac{du_h(t)}{dt}}{u_h(t)} = - \int \frac{1}{c} dt \quad \left| \int \frac{dx}{x} = \ln(x) \right.$$

$$\Leftrightarrow \ln |u_h(t)| = -\frac{t}{c} + k \quad \nwarrow \text{Integrationskonstante}$$

$$\Rightarrow |u_h(t)| = e^{-\frac{t}{c}} \cdot e^k \quad \text{mit } k_1 := \pm e^k$$

$$\Rightarrow \boxed{u_h(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{t}{c}}} \quad \text{Homogene Lsg der DGL}$$

• Partikuläre Lsg (der inhomogenen DGL)

Ansatz vom Typ der Störfkt.

- Gleichungsspannungsquelle U_0 , d.h. konst. Amplitude

GET II
GU

$$\Rightarrow u_p(t) = K$$

- Einsetzen in inhomogen DGL (II)

$$\tau \cdot \frac{du_p(t)}{dt} + u_p(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$

$$\Rightarrow \tau \cdot \underbrace{\frac{dK}{dt}}_{=0} + K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$

$$\Rightarrow K = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{Spannungsteiler})$$

$$\Rightarrow \boxed{u_p(t) = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{Partikuläre Lsg. der inhomogenen DGL}$$

• Allg. Lösung

$$\Rightarrow u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

Allg. Lsg.
der DGL

$$\boxed{= b_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

• Lösung des AWP.

- Anfangswert bestimmen:

„Die Spannung am Kondensator kann nicht springen.“

$$u_C(0+) = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^{t=0} i_C(\tilde{t}) d\tilde{t} = u_C(0)$$

$$\Rightarrow u(t=0) = 0 \quad \text{Anfangswert (II)}$$

- (spez. Lsg. best.

Einsetzen $t=0$ und $u(0)=0$ in allg. Lsg.

$\Rightarrow k_1$ festlegen

$$u(0) = k_1 \cdot e^0 + u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow 0 = k_1 + u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow k_1 = -u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$$

hier einsetzen in allg. Lsg.

(spez. Lsg. des AWP)

$$\text{mit } \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot C$$

$$+ 2d\omega_0 - \gamma(x).$$

$$a = 2d\omega_0$$

A4

a)

$$\Rightarrow u(t) = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (IV)$$

spezielle Lsg. des AWP

• Nachtrag:

Betrachtung des stationären Zustands anstatt des Ansatz vom Typ der Störfunktion

$\Rightarrow$ Bestimmung der partik. Lsg.

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$= \underset{\parallel}{u_{\text{frei}}(t)} + \underset{\parallel}{u_{\text{erzwungen}}(t)} = u_{\text{frei}}(t) + u_{\text{trans}}(t) + u_{\text{stationär}}(t)$$

u_{frei}	u_{trans}	u_{stat}
<u>Eigenbewegung</u>	<u>transienter Anteil /</u>	<u>stationärer Zustand</u>
Durch Anfangsbed. $\neq 0$ d.h. durch in der Schaltung gespeicherte Energie zum Zeitpunkt $t=0$ konvergieren	<u>Einschwingvorgang</u> beschreibt Reaktion der Schaltung auf eine Änderung, z.B. durch einen Schalt- vorgang	Durch Anlegen (Quelle) in Schaltung konver- gieren
Für RL Schaltungen gilt: $u_h(t \rightarrow \infty) = 0$ $u_{\text{trans}}(t \rightarrow \infty) = 0$		Entsprechend der Quelle gilt im Allg. $u_{\text{stat}}(t \rightarrow \infty) \neq 0$
(LC-Schaltungen sind Sonderfall! $\hat{=}$ ungedämpfter Schwingen)		

Reaktion auf DC
→ DC-Analyse

AC
→ komplexe Wechsel-
stromrechnung

Schaltungsanalyse im eingeschwungenen
Zustand (Endwert)

→ spez. Bsp.verfahren (vgl. Kap IV Übungsbuch)

• DC-Anregung:

Eingeschwingen, wenn alle Ableitungen 0 sind
hier:

$$i_C = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \stackrel{!}{=} 0$$

⇒ kein Strom mehr durch C

⇒ Spannungsteiler

$$\Rightarrow u_{\text{stat}}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \quad (\text{III})$$

↳ bzw. aus (I)

$$u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \quad \text{mit} \quad \frac{du(t)}{dt} = 0$$

↳

2-) Lösung des AWP mit AEM:

• Voraussetzungen:

- Schaltung mit nur 1 Energiespeicher
⇔ DGL 1. Ordnung

- Nur DC-Anregung (Quellen)
⇔ konstante Störfunktion

QET II
GU

- Voraussetzungen $\Rightarrow$ DGL hat Form:

$$\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K$$

- Lsg. des AWP unmittelbar angebar:

$$y(t) = y(t \rightarrow \infty) + [y(t=0) - y(t \rightarrow \infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Hier mit (I):

$$\tau \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$

- Anfangswert (s.o.)

$$(II): u(t=0) = 0$$

- Endwert (s.o.)

$$(III): u(t \rightarrow \infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$

- Zeitkonstante

τ ist Faktor vor der Ableitung, bei Normierung der DGL auf $u(t)$

- Lsg. des AWP:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t \rightarrow \infty) + [u(t=0) - u(t \rightarrow \infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_0 + \left[0 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \tau = \frac{\text{mit } R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

$\hat{=}$ (TV)

- Bzw. $\hat{=}$ unmittelbar aus „Sicht“ des Energiespeichers im Netzwerk bestimmen:

- Quellen durch ihre Innenwiderstände ersetzen (vgl. Ersatzquellenverfahren):

Spannungsquellen $\rightarrow$ Kurzschluss

Stromquelle $\rightarrow$ offene Klemmen

- Ersatzwiderstand R_E des Netzwerk von den Klemmen des Energiespeichers aus

- Kondensator: $C = R_E \cdot G$

Spule: $L = \frac{C}{R_E}$

(vgl. Übungskript Kap 6 Seite 90)

Hier:

$$R_E = (R_1 \parallel R_2) \Rightarrow C = (R_1 \parallel R_2) \cdot G \\ = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot G$$

②

Vereinfachungen:

Reale Spannungsquellen $\approx$ Ideale Spannungsquelle

$$\Rightarrow R_1 \ll R_2$$

IV:

$$u(t) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

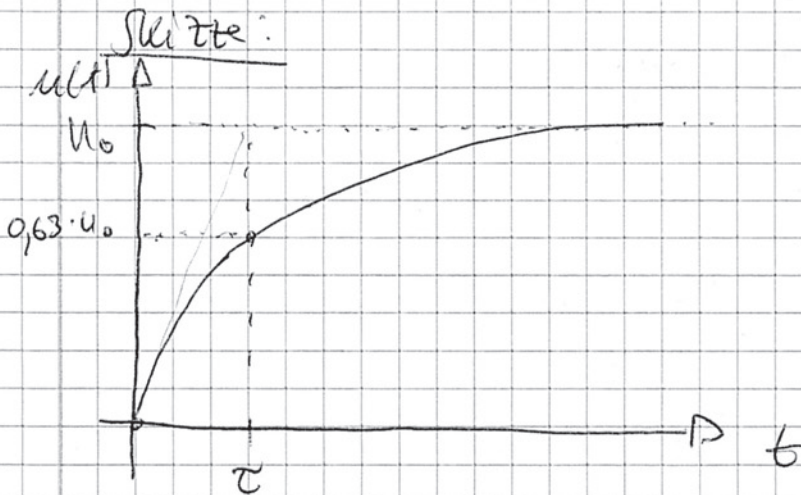
GBT II
GV

$$R_1 \ll R_2 \Rightarrow$$

$$U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \approx U_0$$

$$\tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} C \quad \xrightarrow{R_1 \ll R_2} \quad \tau \approx R_1 \cdot C$$

$$\Rightarrow u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{mit } \tau = R_1 \cdot C$$

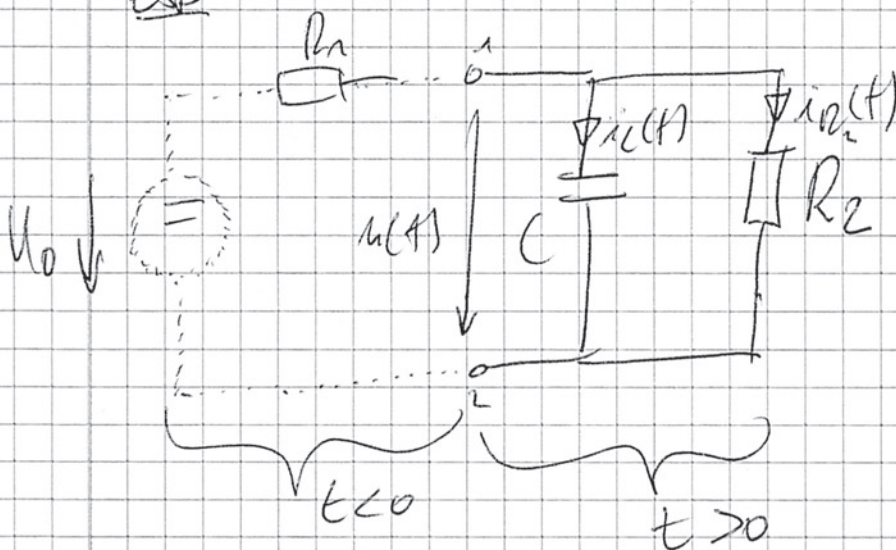


$R \cdot C$ ist Zeitkonst.

$$[R \cdot C] = s$$

- ③ R hier t neu definiert
Außerdem gilt jetzt $R_2 = R_1$ auch für $t < 0$

ESB:



AEM:

• Anfangswert $u(t=0) =$
aus Betrachtung des eingeschränkten/stationären

zustands vor der Schaltanwendung ($-\infty < t < 0$),
für DC-freien. alle Ableitungen $\stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ Spannungsteiler:

$$u(t=0) = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_0 \cdot \frac{2}{3}$$

• Endwert

C entlädt sich vollständig

$$\Rightarrow u(t \rightarrow \infty) = 0$$

• Zeitkonstante:

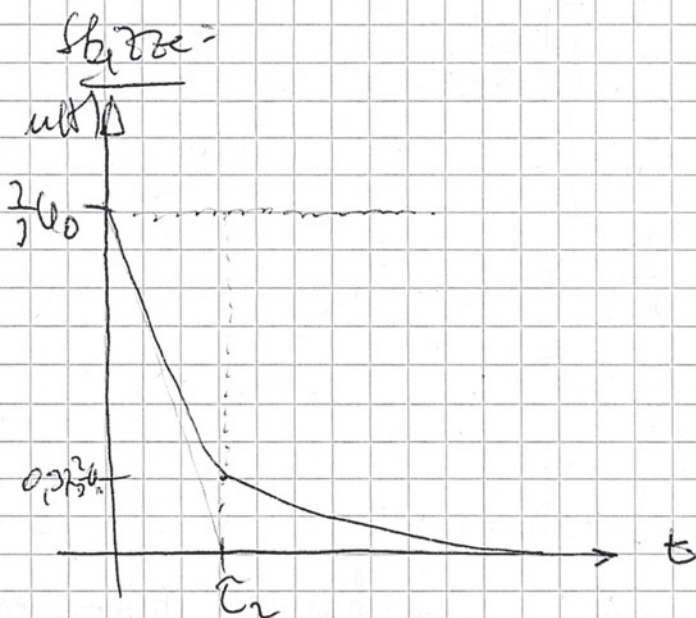
$$\tau_2 = R_2 C$$

• Lösung des AWP nach AEM

$$u(t) = u(t \rightarrow \infty) + [u(t=0) - u(t \rightarrow \infty)] e^{-t/\tau_2}$$

$$= 0 + \left[\frac{2}{3} U_0 - 0 \right] e^{-t/\tau_2}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{2}{3} U_0 \cdot e^{-t/\tau_2}}$$



(4)

Ab $t=0$:

$$W = \int_0^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt = \int_0^{\infty} i^2(t)/R dt = \dots$$

Alternative: Energieerhaltungssatz

$$W = W_c(t=0) = \frac{1}{2} C [\bar{u}_c(t)]^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{2}{3} U_0 \right)^2 = \frac{2}{9} C U_0^2$$

(A5)

1) Balkengleichung (fremden beachten)

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + \underbrace{u_c(t=0)}_{=0} \\ &= \frac{\hat{I}}{C} \int_0^t \cos(\omega t' + \varphi_i) dt' = \frac{\hat{I}}{\omega C} \left[\sin(\omega t' + \varphi_i) \right]_0^t \\ &= \underbrace{\frac{\hat{I}}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_i)}_{\text{Wechselanteile}} - \underbrace{\frac{\hat{I}}{\omega C} \sin(\varphi_i)}_{\text{Gleichanteile}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_c = \bar{u}_c(\varphi_i) = \frac{1}{T} \int_0^T u_c(t) dt = -\frac{\hat{I}}{\omega C} \cdot \sin(\varphi_i)$$

②

a) $t \geq 0$:

$$\varphi_i = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i(t) = I \cdot \cos(\omega t) \\ u_c(t) = \frac{I}{\omega C} \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

b) $t \geq 0$:

$$\varphi_i = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i(t) = \frac{I}{\omega C} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{I}{\omega C} \cdot \sin(\omega t) \\ u_c(t) = \frac{I}{\omega C} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\frac{I}{\omega C} \cdot \cos(\omega t) + \frac{I}{\omega C} \end{cases}$$

③

Kurzschluss $t \geq t_1$

Maschenumlauf:

$$u_c(t) = -u_R(t)$$

Beitragf. einsehen

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = -Ri$$

Differenzieren um vor Integralgl. auf DGL zu kommen:

$$\frac{1}{C} \cdot i(t) = -R \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \left[RC \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0 \right]$$

Homogene DGL
1. Ordnung

Lösung mit FEM:

⚠ Achtung: Anfangszeitpunkt $t_1 \neq 0$

- Anfangswert bestimmen für $\varphi_1 = -\pi/2$

$$u_c \text{ kann nicht springen} \Rightarrow u_c(t_{1-}) = 2 \frac{I}{\omega C}$$

$$\Rightarrow u_c(t_{1+}) = 2 \frac{I}{\omega C}$$

Jetzt bleibt C Strom durch R

$$\Rightarrow i(t_{1+}) = - \frac{u_c(t_{1+})}{R} = -2 \frac{I}{\omega CR}$$

⬆ Stromrichtung kehrt sich um

- Endwerte bestimmen

C entlädt sich vollständig

$$\Rightarrow u_c(t \rightarrow \infty) = 0$$

$$i(t \rightarrow \infty) = 0$$

• Zeitkonstante

$$\tau = RC$$

- Lösung des AWP:

Für $t \geq t_1$ gilt

$$i(t) = i(t \rightarrow \infty) + \left[i(t_1) - i(t \rightarrow \infty) \right] e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

⚠
⬆
 $t - t_1$
 τ

$$i(t) = -\frac{U^a}{\omega L} e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

$$u_c(t) = \dots \text{ ABEM}$$

~~$$u_c(t) = R \cdot i(t) = \frac{U^a}{\omega L} \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right)$$~~

$$u_c(t) = u_c(t \rightarrow \infty) + [u_c(t_1) - u_c(t \rightarrow \infty)] e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

~~$$= \frac{U^a}{\omega L}$$~~

$$= 0 + \left[2 \frac{U^a}{\omega L} - 0\right] e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

$$= \frac{2U^a}{\omega L} e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

④ Für $U_1 = 0$ gilt

$$u_c(t_1) = 0$$

$$i(t_1) = 0$$

⇒ C ist entleert

⇒ Endzustand

⇒ $t \geq t_1$ gilt

$$u_c(t) = 0$$

$$i(t) = 0$$

UAGOS

$$a) \quad i(1) = \frac{112V}{100\Omega} = 1,12A$$

$$b) \quad i(t) = \frac{112V}{300\Omega} = 0,373A$$

$$c) \quad u_{L1}(A) = \frac{112V - 0,373A \cdot 100\Omega}{1} = \underline{74,7V}$$

$$d) \quad u_{L2}(A) = 74,7V \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \underline{56V}$$

$$e) \quad u_{L2}(t) = R_3 \cdot i_3(t)$$

$$u_{L2}(t) - R_3 \cdot C \cdot \frac{du_{L2}(t)}{dt} = 0$$

$$\tau = R_3 \cdot C$$

$$u_{L2}(t \rightarrow 0) = 56V$$

$$u_{L2}(t \rightarrow \infty) = 0$$

$$\Rightarrow u_{L2}(t) = 0 - [56V - 0] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$= 56V \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow i_3(t) = \frac{56V}{100\Omega} e^{-\frac{t}{7,5ms}} = 0,373A e^{-\frac{t}{7,5ms}}$$

⑦ ~~112V~~ ~~112V~~

$$u_0 = i(t) \cdot R_1 + u_C(t)$$

$$\Leftrightarrow u_0 = R_1 C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

$$\tau = R_1 \cdot C_1$$

$$u_C(t \rightarrow 0) = 0$$

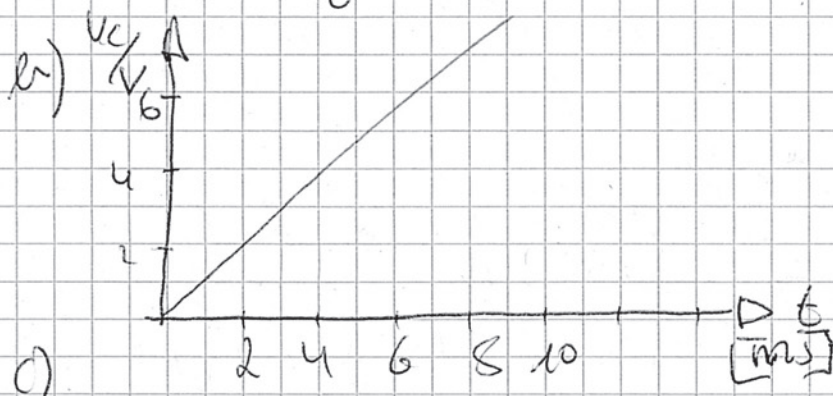
$$u_C(t \rightarrow \infty) = 74,7V$$

$$\Rightarrow u_C(t) = 74,7V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

KGÜ7

a) $i_c(t) = i_0(t)$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_0(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{1}{C} \int_0^t I_0 d\tilde{t}$$
$$= \frac{1}{C} [I_0 \tilde{t}]_0^t = \frac{1}{C} I_0 t = 1000 \frac{V}{s} t$$



Knoten: $i_0(t) = i_c(t) + i_R(t)$

$$I_0 = \frac{u_c(t)}{R} + C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$R I_0 = u_c(t) + R C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\tau = RC$$

$$R I_0 - u_c(t) = R C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\frac{I_0}{C} - \frac{u_c(t)}{RC} = \frac{du_c(t)}{dt}$$

homogene Lösung

$$0 = u_c(t) + R C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\frac{du_c(t)}{u_c(t)} = - \frac{1}{RC} dt$$

$$\int \frac{du_c(t)}{u_c(t)} = - \frac{1}{RC} \int 1 \cdot dt \Rightarrow \ln u_c(t) = - \frac{1}{RC} t + K_1$$

$$\Rightarrow u_c(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{k_1}$$

$$u_{cp}(t) = R \cdot I_0 \quad \text{Superposition:}$$

~~Gesetz:~~ $u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t)$

$$\Leftrightarrow u_c(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{k_1} + R \cdot I_0$$

AWP:

$$u_c(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{0}{\tau}} \cdot e^{k_1} + R \cdot I_0 = 0$$

$$\Rightarrow e^{k_1} = -R \cdot I_0$$

$$\Rightarrow k_1 = -\ln(R \cdot I_0) = \ln\left(\frac{1}{R \cdot I_0}\right)$$

$$\Rightarrow u_c(t) = R \cdot I_0 + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot R \cdot I_0 = R \cdot I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



e) Knotenregel:

$$i_0(t) = i_c(t) + i_L(t)$$

$$\Leftrightarrow I_0 = \frac{1}{L} \int_0^t u_c(\tilde{t}) d\tilde{t} + C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{L} \cdot u_c(t) + C \cdot \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{CL} u_c(t) + \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2}$$

Anfangswerte $t=0$

~~u_c(t=0) = 0~~

$$u_c(t=0) = 0$$

$$i_c(t=0) = I_0$$

homogene Lösung

~~Ansatz $i(t) = i_h(t) = e^{st}$~~

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$u(t) = k_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + k_2 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$u(t=0) = 0 = k_1 \cdot \cos(0) \Rightarrow k_1 = 0$$

$$i_C(t) = I_0 = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot k_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \neq$$

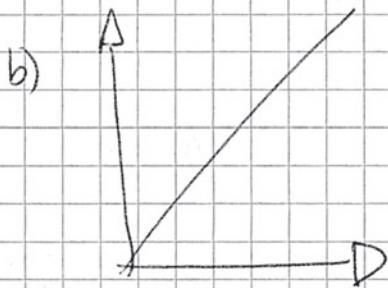
$$1A = 1mF \cdot k_2 \cdot 1000 \Rightarrow k_2 = 1V$$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = 1V \cdot \sin(\omega_0 t)}$$

⑦

$$a) u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(\tilde{t}) d\tilde{t} + u_c(t_0)$$

mit $t_0 = 0$



③

Knottengl.

$$i_0(t) = i_c(t) + i_R(t)$$

$$\Rightarrow i_0(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_R(t)}{R}$$

$$\Rightarrow RC \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = R i_0(t) = R I_0$$

homogen Lsg:

① Separation:

$$0 = RC \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$\Rightarrow \frac{du_c(t)}{u_c(t)} = -\frac{1}{RC} dt \quad | \int$$

$$\Rightarrow \ln(u_c(t)) = -\frac{1}{RC} t + C_1$$

$$\Rightarrow u_{ch}(t) = \frac{k_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$k_1 = e^{C_1}$$

① Exp-Ansatz

$$u_{ch}(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

τ bestimmen:

$$0 = RC \cdot \left(-\frac{k_1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + k_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \tau = RC$$

$$\Rightarrow u_{ch}(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Allg. Lösung

$$u_n = u_n(t) \rightarrow u_c(t) = k_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

u_c in DGL einsetzen

$$\frac{du_c(t)}{dt} = k_1'(t) e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{k_1(t)}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\downarrow \quad RC \left(k_1'(t) - \frac{k_1(t)}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} + \underbrace{k_1(t) e^{-\frac{t}{RC}}}_{u_c} = I_0 R$$

$$\Leftrightarrow \overset{u_c'}{k_1'(t)} = \frac{I_0}{C} \cdot e^{+\frac{t}{RC}} \Rightarrow k_1(t) = \int \frac{I_0}{C} e^{\frac{t}{RC}} dt$$

$$\Rightarrow u_n(t) = R I_0 e^{\frac{t}{RC}} + C$$

$$u_c(t) = \left[R I_0 e^{\frac{t}{RC}} + C \right] e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_c(t) = I_0 R + C \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

2. Variante

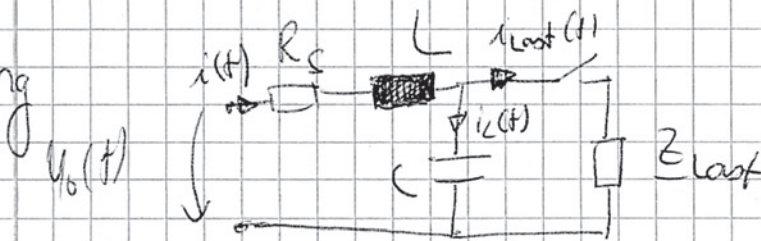
Superposition

$$u_{cp}(t) = \text{const} = k_2$$

$$u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t)$$

QET II

Vorlegung



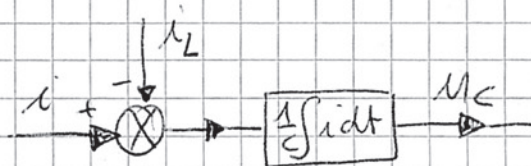
$$i_{\text{last}}(t) = i_C(t)$$

Knoten:

$$i = i_C + i_L$$

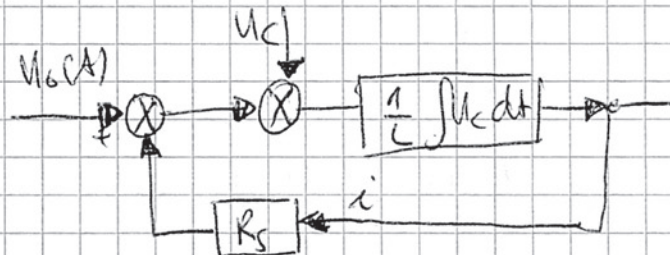
$$u_0(t) = R_s \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_C(t)$$

Blockdiagramm:

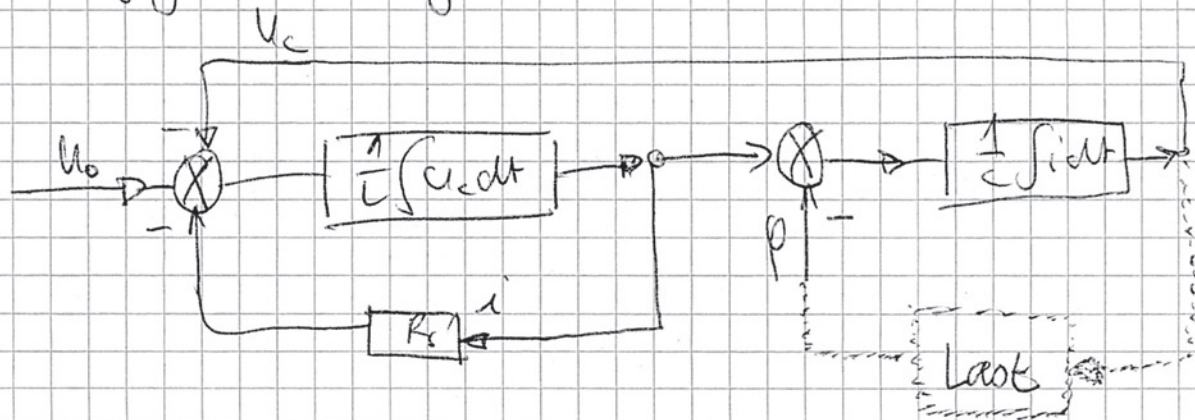


$$u_C = L \frac{di}{dt}$$

$$= u_0 - R_s i - u_C$$



Zusammenfügen der Diagramme:



A5.4

Nachtrag

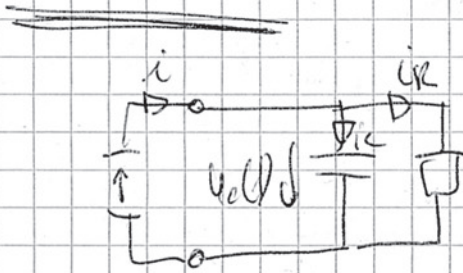
GET II
GU

$$i(t) = - \frac{2I^a}{\omega RC} e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_C = -u_R$$

$$\Rightarrow u_C(t) = + \frac{2I^a}{\omega C} e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$$



$$\varphi_i = -\pi/2$$

(analog zu 2b)

$$u_C(t) = ?$$

Einschwingvorgang mit AC-Anregung

DGL aufstellen

$$i(t) = i_C(t) + i_R(t)$$

$$= C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R}$$

$$R \cdot i(t) = \underbrace{RC}_{\tau} \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

inhomogene DGL 1. Ordn.

Allg. Lösung durch Superposition

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p}$$

- homogene Lsg:

$$\tau \cdot \frac{du_{C,h}}{dt} + u_{C,h} = 0$$

Lsg. nach einer DGL ist eine e-Fkt

Get II
GU

⇒ Ansatz:

$$u_{ch} = K_h e^{-t/\tau}$$

- Eine partik. Lsg ist der stat. Zustand der Schaltung
(durch komplexe AC-Rechnung gut zu bestimmen)

$$u_{c,p}(t) \stackrel{!}{=} \operatorname{Re}\{u_{c,p}(t)\} = \operatorname{Re}\{\hat{u}_{c,p} e^{j\omega t}\}$$

$$i(t) \stackrel{!}{=} \operatorname{Re}\{i(t)\} = \operatorname{Re}\{\underbrace{\hat{I} e^{j\varphi_i}}_{=\hat{I}} e^{j\omega t}\}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL

$$R \hat{I} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = j\omega RC \cdot \hat{u}_{c,p} e^{j\omega t} + \hat{u}_{c,p} e^{j\omega t}$$

$$R \hat{I} e^{j\varphi_i} = \hat{u}_{c,p} (1 + j\omega RC)$$

$$\Leftrightarrow R \hat{I} e^{j\varphi_i} = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \cdot e^{j\arctan(\frac{\omega\tau}{1})} \cdot \hat{u}_{c,p}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_{c,p} = \underbrace{\frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j\arctan(\omega\tau)}}_{\hat{Z}} e^{j\varphi_i} \cdot \hat{I}$$

zurück zu reellen Zeitfunktionen:

$$\operatorname{Re}\{\underbrace{\hat{u}_{c,p} e^{j\omega t}}_{u_{c,p}}\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot e^{j(\varphi_i - \arctan(\omega\tau))} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$\Rightarrow u_{c,p} = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i - \arctan(\omega\tau))$$

Superposition

$$u_c = u_{c,h} + u_{c,p}$$

- AWP lösen

$$t=0: u_c(t=0) = 0$$

einsetzen in allg. Bsg der Superposition

$$0 = K_h e^0 + \frac{R}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos(0 - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau))$$

$$\Rightarrow K_h = - \frac{R}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos(-\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau))$$

(A6) AEM

Anfangswert:

Eingeschwingener Zustand von $-\infty$ bis $t=0$

→ Alle Ableitungen müssen 0 sein

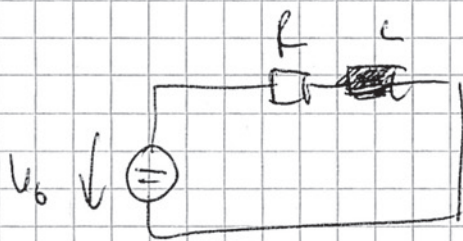
$$u_c = L \frac{di_c(t)}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für eingeschwingen}$$

(Spule $\hat{=}$ Kurzschluss)

$$t=0: i(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{120V}{36\Omega + 40\Omega} = 1,58A$$

GeT II
GeT

Ersatzwert:



$$R = R_1 + (R_2 \parallel R_3) \\ = 60 \Omega$$

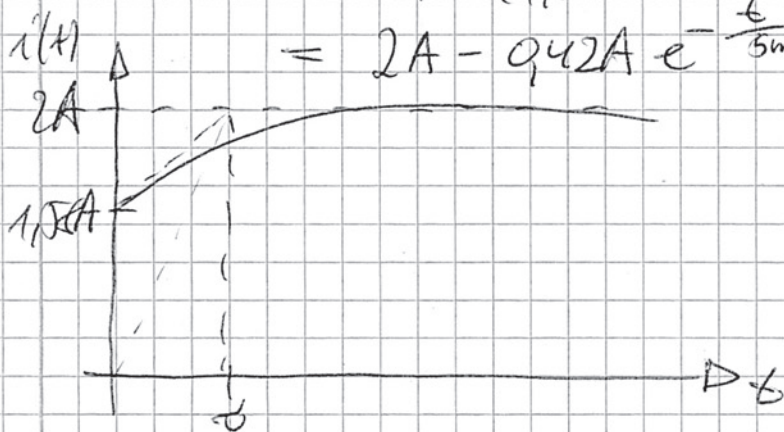
$$i(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{R} = \frac{120V}{60\Omega} = 2A$$

Zeitkonstante:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{300 \text{ mH}}{60\Omega} = 5 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow i(t) = i(t \rightarrow \infty) + [i(t=0) - i(t \rightarrow \infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 2A + (1,5A - 2A) \cdot e^{-\frac{t}{5 \text{ ms}}} \\ = 2A - 0,42A \cdot e^{-\frac{t}{5 \text{ ms}}}$$



AS

allg. vs spez. Lösungsweg
(vgl. Bsp. 4.5.3 TI-Skript)

1) allg. DGL aufstellen

$$u_L(t) + u_C(t) = U_0$$

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U_g$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0} \quad \begin{array}{l} \text{homogene DGL} \\ 2. \text{ Ordnung} \end{array}$$

(ungedämpftes System)

Komplexer Exponentialansatz:

Ansatz $i(t) = i_h(t) \stackrel{!}{=} e^{\underline{\lambda} t}$

Einsetzen in DGL $\rightarrow$ charakteristische Polynom:

$$\underline{\lambda}^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte} \quad \underline{\lambda}_1 = j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\underline{\lambda}_2 = -j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonanzfrequenz ω_0 ist Betrag der Eigenwerte
(vgl. Zeitkonstante: $\lambda = +\frac{1}{\tau}$)

$$\Rightarrow \omega_0 = |\underline{\lambda}_1| = |\underline{\lambda}_2| = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Alternativ kann bei einem System 2. Ordnung ω_0^2 aus der normierten Darstellung der DGL abgelesen werden

$$y''(x) + \underbrace{2d\omega_0}_{\text{Damping}} y'(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$$

GET II
BG

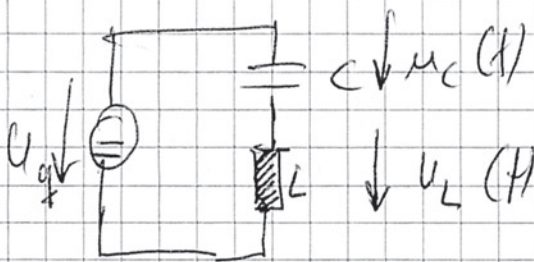
(vgl. Kap. 4 A-Skript)

$$f_{\text{res}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

• spez. f_{res} bzw. ω_0 aller LC-Schwingkreise
berechnen sich gleich!

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_{\text{res}}$$

2) für $s=2$



Anfangswerte:

a) $i(t=0_+) = 0$, da Strom durch L nicht
springen kann: $L \stackrel{\Delta}{=} \text{offenbar}$
(im allg. $\stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\uparrow}$)

b) $u_L(t=0_+) = U_g$

c) $u_C(t=0_+) = 0$, da Spannung an C nicht
springen kann: $C \stackrel{\Delta}{=} \text{KS}$
(im allg. $C \stackrel{\Delta}{=} \oplus$)

③ Mittelwerte gesucht

at $\hat{I}$:

Eigenwerte

- allg.: Einsetzen der ~~Real- und Imag-Teile~~
in den Exponentialansatz führt auf
den Ansatz für die allg. Lsg:

$$i(t) = K_1 \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{\frac{1}{\sqrt{L}} t} \right\} + K_2 \cdot \operatorname{Im} \left\{ e^{\frac{1}{\sqrt{L}} t} \right\}$$

$$= K_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{L}} t\right) + K_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{L}} t\right)$$

$$= K_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + K_2 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

1. Anfangswert einsetzen

$$i(t=0_+) = 0 \stackrel{!}{=} K_1 \cdot \cos(0) + K_2 \cdot \sin(0)$$

$$\Rightarrow K_1 = 0$$

$$\Rightarrow i(t) = K_2 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Einsetzen in Bauteilgl. für L und 2. AW:

$$u_L(t \neq 0) = u_g = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$
$$= L \cdot \omega_0 \cdot K_2 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{=1} \Big|_{t=0} \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{u_g}{L \omega_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{u_g}{L \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)} \quad \text{Lsg des AWP}$$

6.5.7 II
a) b)

Mittelwert:

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{T} \int i(t) dt = 0$$

- spez.

- Annahme: gedämpfte Schwingung

- Homogene Lsg $\Rightarrow$ Schwingung klingt ab
- Endwert wird durch die Quelle (Exo. partik. Lsg) bestimmt

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \rightarrow y_p(t) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

• D-Quelle:

stat. Zustand (Endwert) wird erreicht, wenn alle Ableitungen $\rightarrow 0$ sind

$\Rightarrow$ kein Strom durch C $\rightarrow$ Leerlauf

$\Rightarrow$ keine Spannung über L $\rightarrow$ KKS

$$\Rightarrow \bar{I} = 0$$

- Auch gültig für ungedämpftes System, da der Grenzübergang $d \rightarrow 0$ stetig verläuft

b) $\bar{u}_L$

- allg.:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{L \cdot U_g}{L \cdot \omega} \cdot \omega \cdot \cos(\omega_0 t) = U_g \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_L = \frac{1}{T} \int u_L(t) dt = 0 \quad (\text{Wechselgröße})$$

spez:

unged. (Schwingung um gleichen Endwert wie gedämpft angeregte Schwingung (s.o.)

$$\Rightarrow \bar{u}_L = 0$$

c) $\bar{u}_C$

- allg.: $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \frac{U_g}{L \omega_0} \frac{1}{\omega_0} \left[-\cos(\omega_0 t) \right]_0^t$

$$= U_g \frac{LC}{LC} \left[-\cos(\omega_0 t) + 1 \right]$$

mit $\omega_0 = \frac{1}{LC}$

$$= \underbrace{U_g}_{DL} - \underbrace{U_g \cos(\omega_0 t)}_{AC}$$

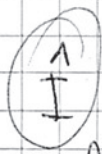
$$\Rightarrow \bar{u}_C = \frac{1}{T} \int_0^T u_C(t) dt = U_g \quad (DL)$$

- spez

ungedämpftes System ... (s.o.)

$$\Rightarrow \bar{u}_C = U_g$$

GeT II 5) Zeitblatt 2P



- allg.: unmittelbar aus Lsg des AWP ablesen:

$$i(t) = \frac{U_g}{\underbrace{L \cdot \omega_0}} \sin(\omega_0 t)$$

- spez.: z.B. über u_L

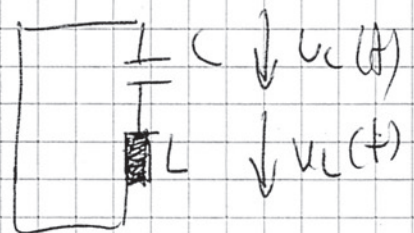
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t') dt'$$

$$\text{mit } u_L(t') = U_g \cdot \cos(\omega_0 t')$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{U_g}{\underbrace{\omega_0 L}} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

G) Bis zum Zureckschalten wie vorher
Nach Zureckschalten gilt:

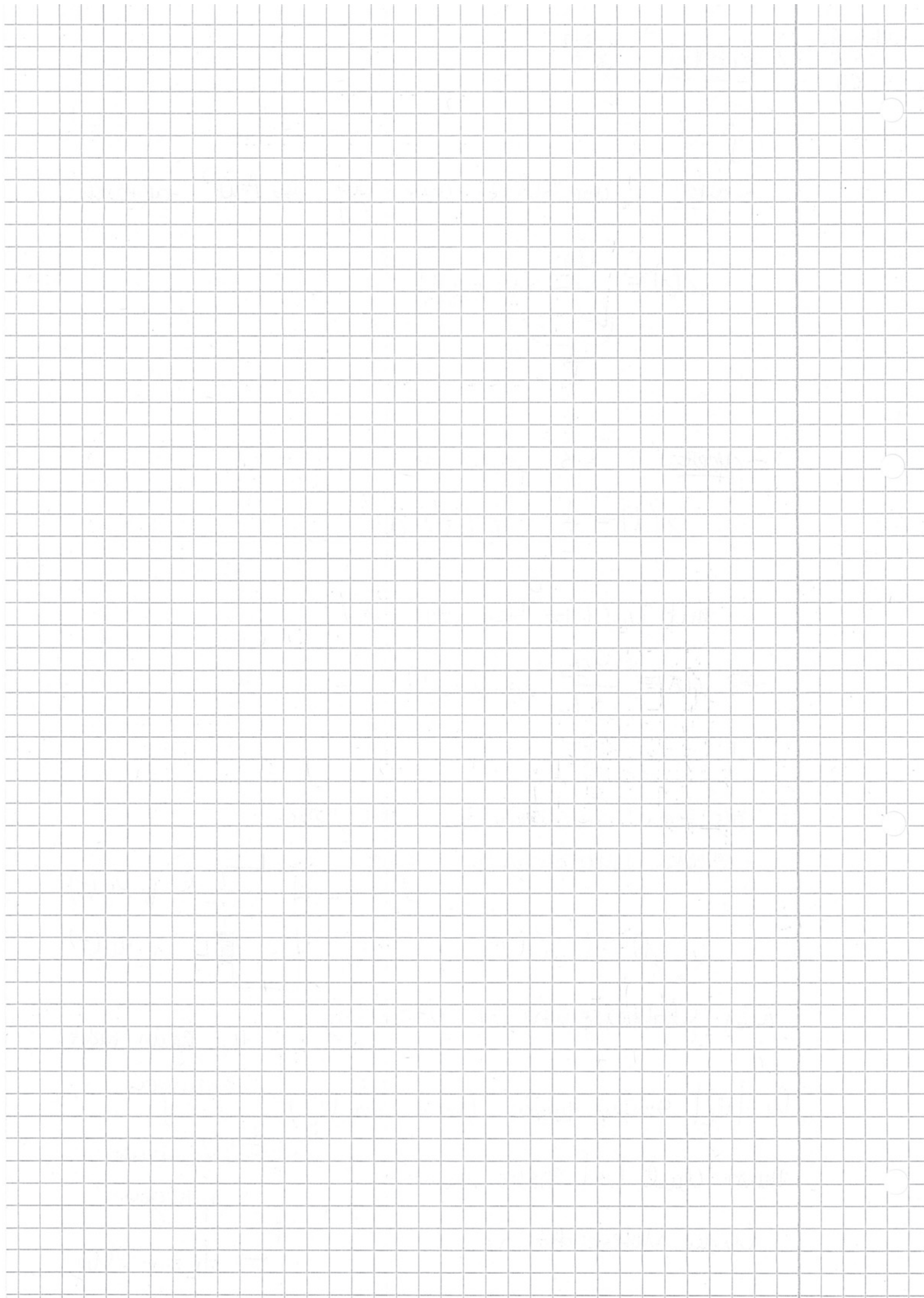
$$u_L(t) = -u_C(t)$$



Zum Schaltzeitpunkt ist $u_C = 2 U_g$

Da $|u_L|$ größer wird (vorher $\max. U_g$)
muss auch $|i|$ größer werden
(siehe Unterpunkt 5)

u_C kann nicht
springen
 $\Rightarrow u_L$ muss
springen
 $\Rightarrow u_L = -2 U_g$



1) Parallelschaltung $\rightarrow$ Komplexe Admittanz (Steinwert)

$$\underline{Z} \rightarrow \underline{Y} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

Admittanzdreieck: ⑥

$$\tan \delta = \frac{|1/R|}{|j\omega C|} = \frac{1}{R\omega C}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\omega \tan \delta} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot 0,8 \mu\text{F} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}} = \underline{20,7 \text{ k}\Omega}$$

2) Die ESB ② und ⑤ sind elektrisch gleichwertig, wenn ihre komplexen Steuerelemente bzw. Steuerelemente übereinstimmen

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \underline{Z}' \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y} = \underline{Y}' = \frac{1}{\underline{Z}'}$$

Für $\underline{Z}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} \\ &= \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \end{aligned}$$

Für $\underline{Z}'$ folgt damit

$$\underline{Z}' = R' - j \frac{1}{\omega C'} = R' + \frac{1}{j\omega C'} \stackrel{!}{=} \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Vergleiche Real- und Imag.kel

Re: $P' = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \dots = \underline{\underline{3 \Omega}}$

Im: $-\frac{1}{\omega C'} = -\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \Rightarrow C' = \frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{\omega^2 R^2 C} \cdot \frac{C}{C}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\tan^2 \delta}}{\frac{1}{\tan^2 \delta}} C = (1 + \underbrace{\tan^2 \delta}_{\ll 1}) \cdot C \approx C = 98 \mu F$$

Gilt nur für $f = 100 \text{ Hz}$!

• für $\omega = 0$:

$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Z}' \rightarrow \infty$$

• für $\omega \rightarrow \infty$:

$$\underline{Z}^* = 0$$

$$\underline{Z}' = R'$$

3)

$$\underline{S} = P + jQ_c$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} (\underline{U} \cdot \underline{Y})^* \\ &= \underline{U} \cdot \underline{U}^* \cdot \underline{Y}^* \\ &= U^2 \cdot \underline{Y}^* = (100V)^2 \cdot \left(\frac{1}{107 \mu S} + j \frac{15 \cdot 100 \text{ Hz}}{8 \cdot 10^6 \mu F} \right)^* \\ &= (100V)^2 \cdot (48,3 \mu S - j \cdot 40,2 \text{ mS}) \\ &= 9,483 \text{ W} - j \cdot 40,2 \text{ VA}_r \\ &= P + jQ_c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Re: } P = 9,483 \text{ W}$$

$$\text{Im: } Q_c = -40,2 \text{ VA}_r$$

GET II
GÜ

$$[S] = VA$$

$$[P] = W$$

$$[Q] = VA_r$$

A11

Übertragungsfunktion

$$H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{\text{Ausgangsgröße}}{\text{Eingangsgröße}} = \underbrace{\alpha(\omega)}_{\text{Verstärkung}} \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{Phase}$$

Bsp. $Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} \quad Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}$

Ü-Fkt beschreibt das Verhalten einer Schaltung in Abhängigkeit von ω

Bsp. $H(j\omega) = \frac{U_3(j\omega)}{U_1(j\omega)}$

1) $H(j\omega) = \frac{U_3}{U_1} = k \cdot e^{-j90^\circ} = -jk = \frac{k}{j} \leftarrow \text{rein imaginär!}$
 mit $k = \frac{U_3}{U_1} > 0$

$$H(j\omega) = \frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} = H_2(j\omega) \cdot H_1(j\omega)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{U_3}{U_2} = \frac{jX}{R+jX} \quad \text{Spannungsteiler}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{jX \parallel (R+jX)}{R+jX \parallel (R+jX)} \quad \begin{matrix} \text{belasteter} \\ \text{Spannungsteiler} \end{matrix}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jX}{R+jX} \cdot \frac{\frac{j1 \cdot (R+jX)}{R+j2X}}{R + \frac{jX(R+jX)}{R+j2X}} = \frac{jX}{R+jX} \cdot \frac{jX(R+jX)}{R^2 + j2XR + jX(R+jX)}$$

$$= \frac{-X^2}{R^2 + j2XR + jXR - X^2} = \frac{-X^2}{-R^2 - j3XR + X^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{j} \quad (\text{s.o.})$$

konj. komplex erweitern

oder $\Leftrightarrow$

$$\underline{H}^{-1}(j\omega) = \frac{u_1}{u_3} = \left(1 - \frac{R^2}{X^2}\right) - j\left(3\frac{R}{X}\right) \stackrel{!}{=} \frac{j}{1}$$

Vergleichen Real und Imaginärteil!

~~Re~~ Re: $1 - \frac{R^2}{X^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{R}{X} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{R}{X} = -1$

$$\Rightarrow R = |X|$$

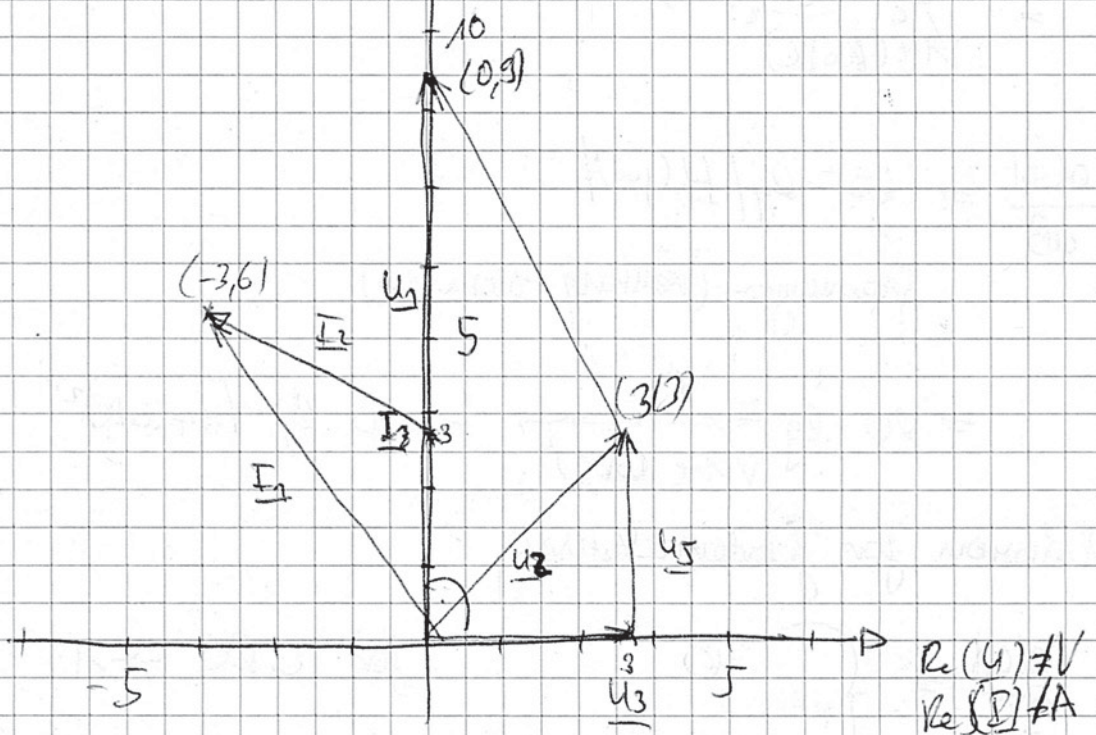
Im: $-3\frac{R}{X} \stackrel{!}{=} \frac{1}{1} \Rightarrow X < 0 \Rightarrow \text{Kapazität}$
 $X = -\frac{1}{\omega C}$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \frac{R}{X} = -1}} \quad (\text{da } R \geq 0)$$

2) $\underline{u_3} = u_3 = 1V$
 $\uparrow$ liegt auf reeller Achse

$$R = 1\Omega \quad \frac{R}{X} = -1 \Rightarrow X = -1\Omega$$

$$\frac{\operatorname{Im}(U)/V}{\operatorname{Im}(I)/A}$$



$$\underline{I}_3 = \frac{U_3}{jX} = j \text{ 3A}$$

$$\underline{U}_5 = R \underline{I}_3 = j \text{ 3V}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_5 + \underline{U}_3 = 3\text{V} + j \text{ 3V} =$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_2}{jX} = j(3\text{A} + j \text{ 3A}) = -3\text{A} + j \text{ 3A}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -3\text{A} + j \text{ 6A}$$

$$\underline{U}_4 = R \cdot \underline{I}_1 = -3\text{V} + j \text{ 6V}$$

$$\underline{U}_1 = j \text{ 9V} = \underline{U}_4 + \underline{U}_2$$

A12

Übertragungsfkt

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

o) Betragsgang

$$|\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{|1|}{|1 + j\omega RC|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

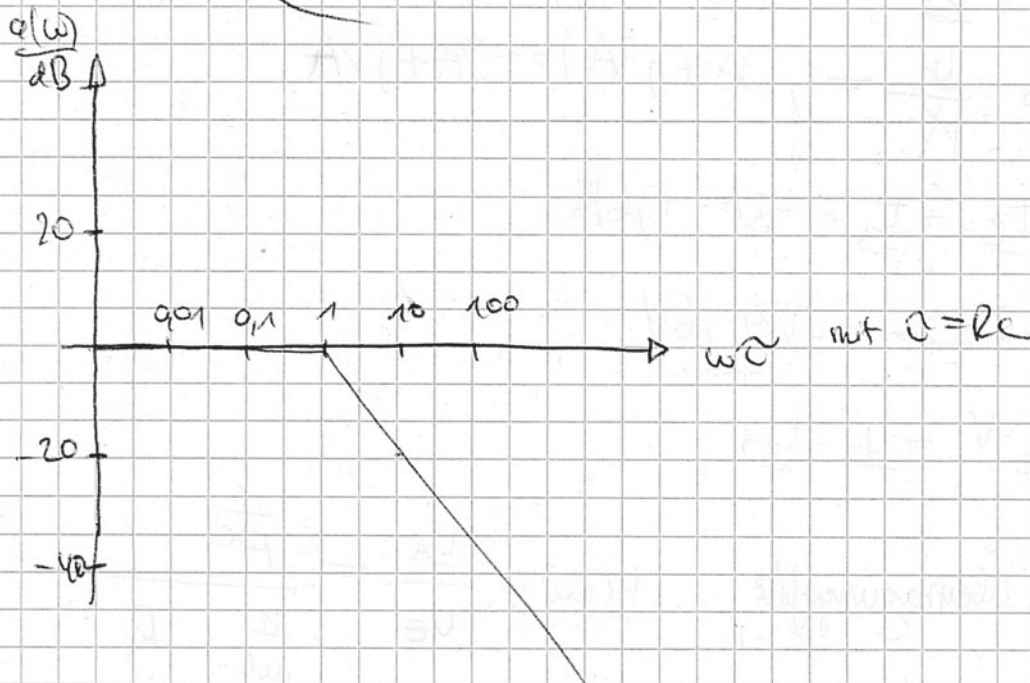
$$\frac{d(\omega)}{dB} = 20 \cdot \lg |H(j\omega)|$$

↑
Spannungen (Leistung wäre 10)

$$= 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

Discussion for frequency

$$\frac{d(\omega)}{dB} = \begin{cases} 0 & \text{for } \omega RC \ll 1 \\ -20 \cdot \lg(\omega RC) & \text{for } \omega RC \gg 1 \\ -3 & \text{for } \omega RC = 1 \end{cases}$$

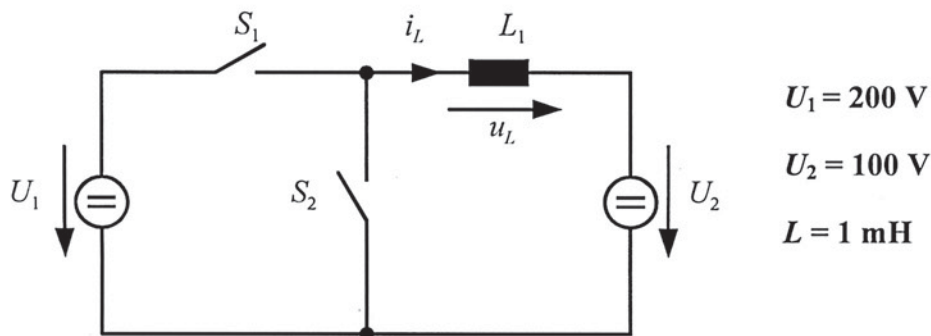


Grundgebiete der Elektrotechnik II – Feedbackaufgabe: Transiente Vorgänge

Aufgabe 1

(15 Punkte)

Gegeben sei zunächst folgende Schaltung:



Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Strom $i_L = 0$ und beide Schalter offen.

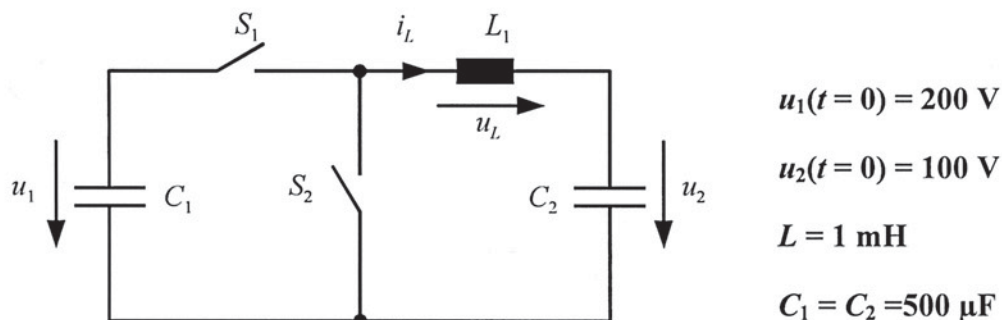
- 1.1 Nun wird bei $t = 0$ der Schalter S_1 geschlossen. Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des Drosselstroms i_L für $0 < t < 1 \text{ ms}$ und berechnen Sie $i_L(t = 1 \text{ ms})$

(4 Punkte)

- 1.2 Bei $t = 1 \text{ ms}$ wird der Schalter S_1 geöffnet und Schalter S_2 geschlossen. Skizzieren Sie den Verlauf des Drosselstroms i_L für $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$.

(2 Punkte)

Nun sind in der Schaltung die idealen Spannungsquellen durch Kondensatoren ersetzt.



Die Anfangsbedingungen seien dieselben wie oben, d.h. die Kondensatoren sind bei $t = 0$ auf die Spannungen $u_1 = 200 \text{ V}$ und $u_2 = 100 \text{ V}$ vorgeladen und $i_L(t=0) = 0$.

- 1.3 Bei $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Bestimmen Sie zunächst für diesen Fall die allgemeine Differentialgleichung des Drosselstroms i_L ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

(4 Punkte)

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist $i_L = I_1 \sin(\omega t) + I_2 \cos(\omega t)$, $\omega = 2000 \text{ s}^{-1}$. Die folgenden Aufgaben können unabhängig von Aufgabe 1.3 gelöst werden.

- 1.4 Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Anfangsbedingungen für $i_L(t = 0)$ und $u_L(t = 0)$ die Konstanten I_1 und I_2 .

(3 Punkte)

- 1.5 Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf von i_L und u_2 für $0 < t < \pi/\omega$.

(2 Punkte)

Grundgebiete der Elektrotechnik II – Lösung Feedbackaufgabe Transiente Vorgänge
1.1:

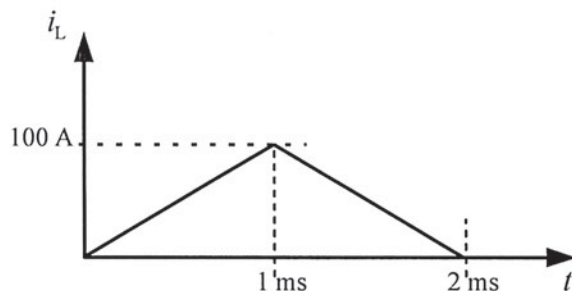
(Summe: 4 Punkte)

Maschengleichung: $U_1 = U_L + U_2$

Bauteilgleichung: $U_L = L \frac{di_L}{dt}$

Stromverlauf: $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t (U_1 - U_2) dt = \frac{100 \text{ V}}{L} \cdot t$ 2 P

Endwert: $i_L(t = 1 \text{ ms}) = \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ mH}} \cdot 1 \text{ ms} = 100 \text{ A}$ 1 P

Skizze (0 bis 1 ms) 1 P

1.2:

(Summe: 2 Punkte)

Skizze (1 ms bis 2 ms) 1 P
Symmetrischer Verlauf, da $|U_1 - U_2| = |U_2| \Rightarrow$ Stromwert bei $t = 2 \text{ ms}$ ist Null 1 P
Alternativ rechnerisch:

$$1 \text{ ms} \leq t < 2 \text{ ms}: \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t'=1 \text{ ms}}^t (-U_2) dt' + i_L(t = 1 \text{ ms}) = \frac{-100 \text{ V}}{L} \cdot (t - 1 \text{ ms}) + 100 \text{ A}$$

1.3:

(Summe: 4 Punkte)

Maschengleichung: $u_1 = u_L + u_2$

Bauteilgleichungen: $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ 1 P

$$i_L = -C_1 \frac{du_1}{dt}, \quad i_L = C_2 \frac{du_2}{dt}$$
 1 P

Ableiten und einsetzen:

$$\frac{du_L}{dt} = \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i_L = L \frac{d^2 i_L}{dt^2} \quad 1 \text{ P}$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)i_L = 0 \quad 1 \text{ P}$$

1.4:

(Summe: 3 Punkte)

$$i_L(t=0) = 0 \Rightarrow I_2 = 0 \quad 1 \text{ P}$$

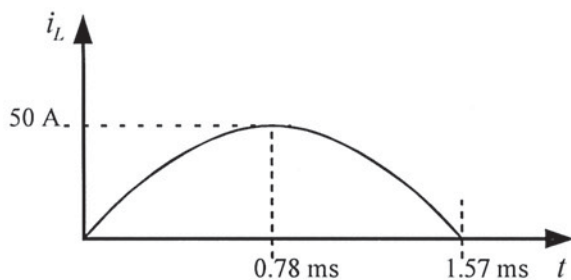
$$u_L(t=0) = L \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0} = I_1 \cdot \omega L \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = I_1 \cdot \omega L = u_1 - u_2 = 100 \text{ V} \quad 1 \text{ P}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{100 \text{ V}}{\omega L} = 50 \text{ A} \quad 1 \text{ P}$$

1.5:

(Summe: 2 Punkte)

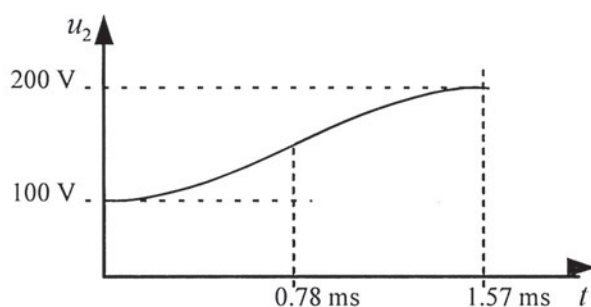
$$i_L = 50 \text{ A} \cdot \sin(\omega t)$$



Skizze qualitativ richtig (positive Halbwelle, beginnt und endet bei Null)

1 P

$$\begin{aligned} u_2 &= 100 \text{ V} + \frac{1}{C_2} \int_0^t 50 \text{ A} \cdot \sin(\omega t) dt = 100 \text{ V} + \frac{50 \text{ A}}{500 \mu\text{F} \cdot 2000 \text{ s}^{-1}} \cdot (1 - \cos(\omega t)) = \\ &= 100 \text{ V} + 50 \text{ V} \cdot (1 - \cos(\omega t)) \quad (\text{nicht gefordert!}) \end{aligned}$$



Skizze qualitativ richtig (beginnt bei 100 V, cos erkennbar)

1 P

A12 Fortsetzung

1)

b-) Phasengang

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{H\}}{\operatorname{Re}\{H\}}\right)$$

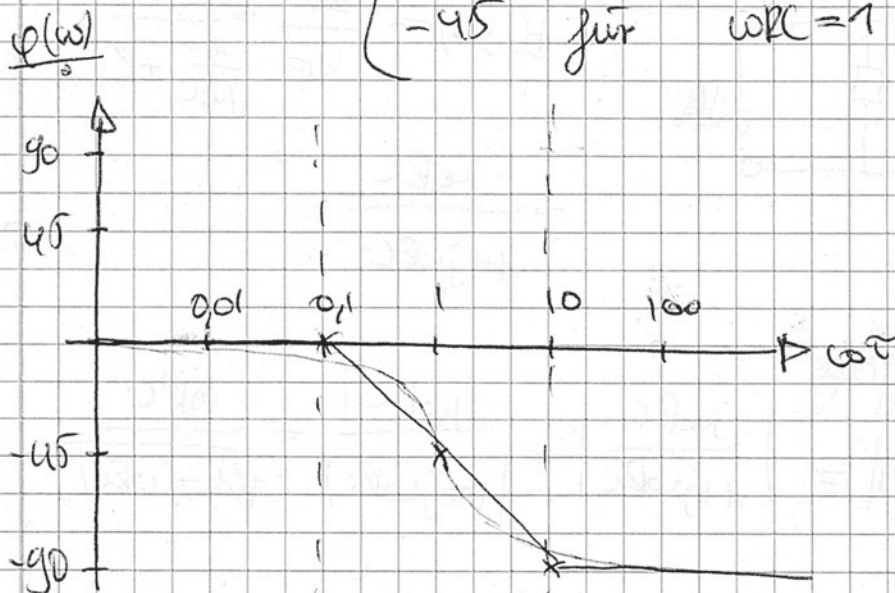
1. da rechte Halbebene (Quadrant I+IV)

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \dots$$

alternativ:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{\text{Zähler}} - \varphi_{\text{Nenner}} \\ &= 0 - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right) \\ &= -\arctan(\omega RC)\end{aligned}$$

$$\frac{\varphi}{^\circ} = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega RC = 0 \\ -90^\circ & \text{für } \omega RC \rightarrow \infty \\ -45 & \text{für } \omega RC = 1 \end{cases}$$



Geradennäherung
für ± 1 Dekade

2) $f = 1 \text{ kHz}$ $R = 1 \text{ k}\Omega$

+20dB Dämpfung $\hat{=}$ -20dB Verstärkung

a) Näherung:

$\omega RC \gg 1$ (aus Amplitudengang)

$$\Rightarrow -20 \text{ dB} \hat{=} -20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(\omega RC)$$

$$1 = \log_{10}(\omega RC)$$

$$\Rightarrow 10 = \omega RC$$

$$\rightarrow C = \frac{10}{\omega R} = 1,59 \mu\text{F}$$

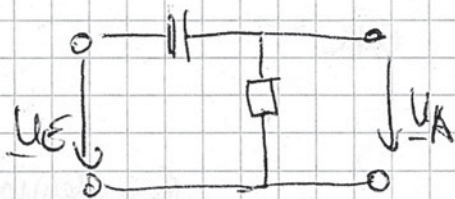
b) Exakt

$$\Rightarrow -20 \text{ dB} \hat{=} -20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(\sqrt{1 + (\omega RC)^2})$$

$$\Leftrightarrow 10 = \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{99}}{\omega R} = 1,58 \mu\text{F}$$

3)



$$H(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

a) Betragsgang

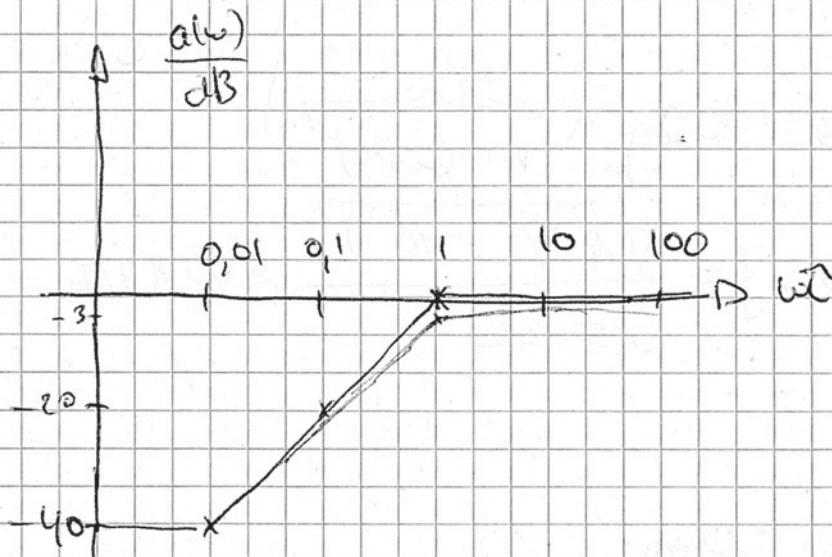
$$|H(j\omega)| = \left| \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{|j\omega RC|}{|1 + j\omega RC|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\frac{a(\omega)}{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$$

$$= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right)$$

$$\frac{a(\omega)}{dB} = \begin{cases} 20 \log_{10}(\omega RC) & \omega RC \ll 1 \\ 20 \log_{10} & \omega RC \gg 1 \\ -3 & \omega RC = 1 \end{cases}$$

mit $\log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -9.15$

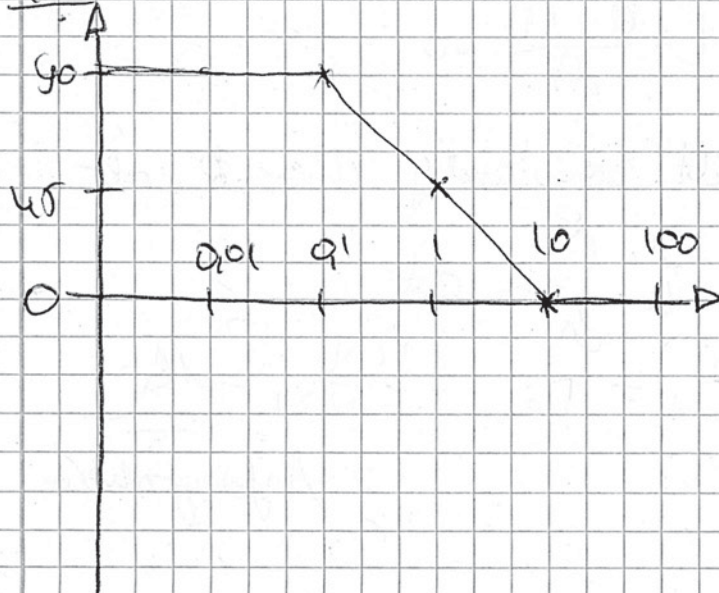


b) Phasengang

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arctan \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) =$$

oder

$$\varphi = \varphi_z - \varphi_N = 90^\circ - \arctan \left(\frac{\omega RC}{1} \right)$$



i) Näherung ($\omega RC \ll 1$)

$$\Rightarrow -20 \text{ dB} = 20 \log_{10} (\omega RC)$$

$$\Rightarrow f = \frac{91}{2\pi C \cdot R} = 191 \text{ Hz}$$

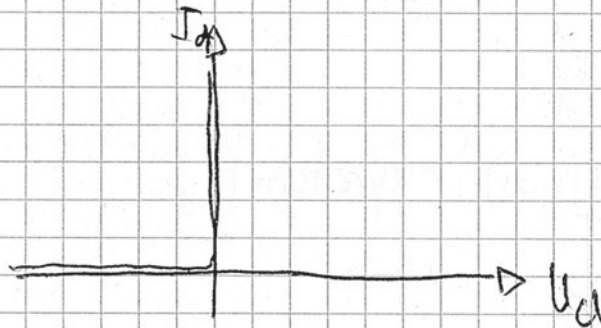
ii) Exakt

$$-20 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{\sqrt{10^2 / (1 - 10^2)}}{2\pi RC} = 10,1 \text{ Hz}$$

A7

1) Ideale Diode



$t < 0$: stat. Zustand für $t = 0_-$ erreicht

$$\Rightarrow u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

$\Rightarrow u_L$ fällt vollständig über R_L ab

$$\Rightarrow i_L(0_-) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt$$

$$= \frac{U_0}{R} = I_0 = \frac{220 \text{ V}}{220 \Omega} = \underline{\underline{1 \text{ A}}}$$

Anfangswert

$$u_s(t) = 0 \quad (\text{Schalter geschlossen})$$

$$(u_b = -u_o \Rightarrow \text{Diode sperrt})$$

$t = 0$: I kann am L nicht springen
L treibt I_0 weiter

$$\Rightarrow u_L < 0$$

$\Rightarrow$ Diode leitet und überwindet den Strom

$$i_L(t=0) = I_0 = 1A$$

$$u_b = 0$$

$$\Rightarrow u_s = u_o = 220V$$

$t > 0$: L entmagnetisiert sich vollständig über D und R_L

$$\tau = \frac{L}{R_L} = 95ms$$

$$\text{Endwert } i_L(t \rightarrow \infty) = 0$$

AEM:

$$\Rightarrow i_L(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau} = 1A \cdot e^{-t/0,095ms}$$

Da die Diode für $t > 0$ stets leitet
(asymptotische Entmagnetisierung)

$$\Rightarrow u_b = 0 \Rightarrow u_s(t) = u_o = 220V$$

$$2) \text{ Öffnen des Schalters } \Rightarrow u = L \frac{di}{dt} \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ hohe Spannung über Schalter wegen Induktion

$\Rightarrow$ Lichtbogen (weiterhin Quedel)

3) - "Strom fließt kontinuierlich"

$\Rightarrow$ hier: $i(t) > 0$ für alle $t > 0$

- $C \rightarrow \infty$, d.h. $u_C = \text{const.}$

$\Rightarrow$ DC-Spannungsquelle U_A

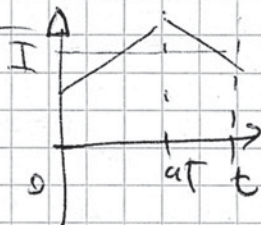
$0 \leq t \leq aT$: S geschlossen

$$\Rightarrow u_L(t) = u_E - u_A$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^{aT} \underbrace{(u_E - u_A)}_{u_L} dt + i(t=0)$$

$\Rightarrow$ linearer Anstieg Δi_{auf}

$$\Delta i_{\text{auf}} = \frac{u_E - u_A}{L} (aT - 0)$$



(alternativ aus $\frac{di}{dt} = L \cdot u_L$)

$$\xrightarrow{\text{ein } u_L = \text{const.}} \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \cdot u_L$$

$aT \leq t \leq T$: S geöffnet

$$u_L(t) = -u_A$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{aT}^T (-u_A) dt + i(t=aT)$$

$\Rightarrow$ linearer Abfall Δi_{ab}

$$\Delta i_{\text{ab}} = \frac{-u_A}{L} (T - aT)$$

GET II
zu

"stat. Betrieb" hier auf Gleichanteile der betrachteten Größen bezogen!

U_E und U_A sind Gleichgr.

(U_A wegen $C \rightarrow \infty$)

i_E und i_A : Kurzzeitmittelwert über eine Periode T

$\Rightarrow \bar{i}_E$ und $\bar{i}_A$

stat. Betrieb $\Rightarrow \bar{i}_A = \text{const}$, sonst noch

Änderungen $\Rightarrow$ transient



$$\bar{i}_A = \text{const} \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} (u_E - u_A) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T (-u_A) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \alpha T (u_E - u_A) - \frac{1}{T} u_A (T - \alpha T) = 0$$

$$\alpha u_E - \alpha u_A - u_A + \alpha u_A = 0$$

$$\alpha u_E - u_A = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{u_A}{u_E} = \alpha}$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Alternativ: Ansatz Mittelwerte

$$\Delta i_{auf} = -\Delta i_{ab}$$

$$|\Delta i_{auf}| = |\Delta i_{ab}|$$

$$\frac{U_E - U_A}{L} \cdot \Delta T - \frac{U_A}{L} (T - \Delta T) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha U_E - \alpha U_A - U_A + \alpha U_A = 0 \quad \text{so!}$$

$$\frac{\bar{I}_A}{\bar{I}_E} = ?$$

weil U_E und U_A liegen beide
am selben Verbraucher!

$$\Rightarrow P_A = P_E$$

$$U_A \cdot \bar{I}_A = U_E \cdot \bar{I}_E$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{I}_A}{\bar{I}_E} = \frac{U_E}{U_A} = \frac{1}{\alpha}$$

Korrekt,

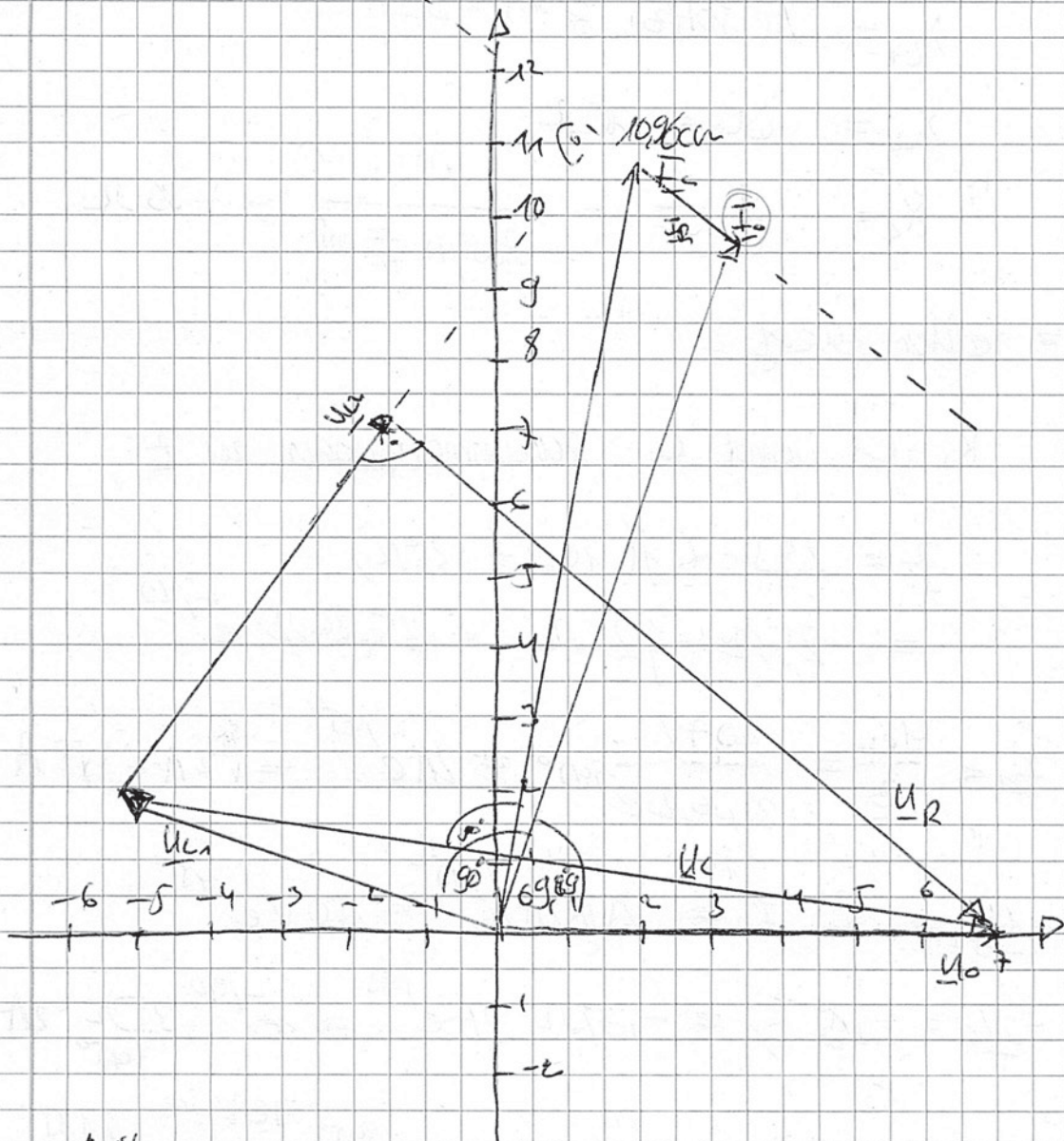
GET II

Gi

AB

verspannt

$0,5A \rightarrow 1\mu$
 $0 = 30^\circ \rightarrow 1\mu$



AM

1) AC

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

hier:

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \sqrt{\frac{P_{R2}}{R_2}} = \sqrt{2} A = 1,414 A$$

wir wählen: $\underline{I}_2 = I_2 = 1,414 A e^{j0^\circ}$

$$\underline{U}_{R2} = \underline{I}_2 \cdot R_2 = 1,414 A \cdot 50 \Omega = 70,7 V$$

Reaktanzen von L_1, L_2, C :

$$X_{L1} = j\omega L_1 = j2\pi 50\text{Hz} \cdot \frac{50}{\pi}\text{mH} = 5j\Omega$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 10j\Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi 50\text{Hz} \cdot \frac{2}{7\pi}\text{mF}} = -35j\Omega$$

$\underline{Z} :=$ rechte Zuerz

R_1, L_2 und C zusammenfassen zu $\underline{Z}$:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= 25\Omega + j(10\Omega - 35\Omega) \\ &= 25\Omega - j25\Omega = 35,36\Omega \cdot e^{j45^\circ}\end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{R1}}{\underline{Z}} = \frac{70,7V}{35,36\Omega \cdot e^{j45^\circ}} = 2A e^{j45^\circ} = \sqrt{2}A + j\sqrt{2}A$$

$$U_{R1} = R_1 \cdot \underline{I}_1 = 25\Omega \cdot 2A e^{j45^\circ} = 50V e^{j45^\circ}$$

$$U_C = jX_C \underline{I}_1 = -j35\Omega \cdot 2A e^{j45^\circ} = e^{j90^\circ} \cdot 35\Omega \cdot 2A e^{j45^\circ}$$

$$U_{L2} = \underline{I}_1 \cdot jX_{L2} = j10\Omega \cdot 2A e^{j45^\circ} = 20V e^{j135^\circ}$$

• Knotengleichung

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,414A + j1,414A + 1,414A$$

$$= 2,828A + j1,414A = 3,16A e^{j26,57^\circ}$$

$$\underline{U}_{L1} = jX_{L1} \underline{I}_0 = 5j\Omega \cdot e^{j90^\circ} \cdot 3,16A e^{j26,57^\circ} = 15,8V e^{j116,57^\circ}$$

QET II

Qü

• Maschengleichung

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \underline{U}_R + \underline{U}_L = 70,7V + 15,8V e^{j116,52^\circ} \\ &= 65,2V e^{j11,52^\circ}\end{aligned}$$

• Zeitverlauf

$$|\underline{I}| = 1,414A \hat{=} 5,6cm$$

$$|\underline{U}_R| = 70,7V \hat{=} 19,14cm$$

$$|\underline{I}| = 2A e^{j45^\circ} \hat{=} 8cm$$

$$\underline{I}_0 = 3,16A e^{j26,57^\circ} \hat{=} 12,6cm$$

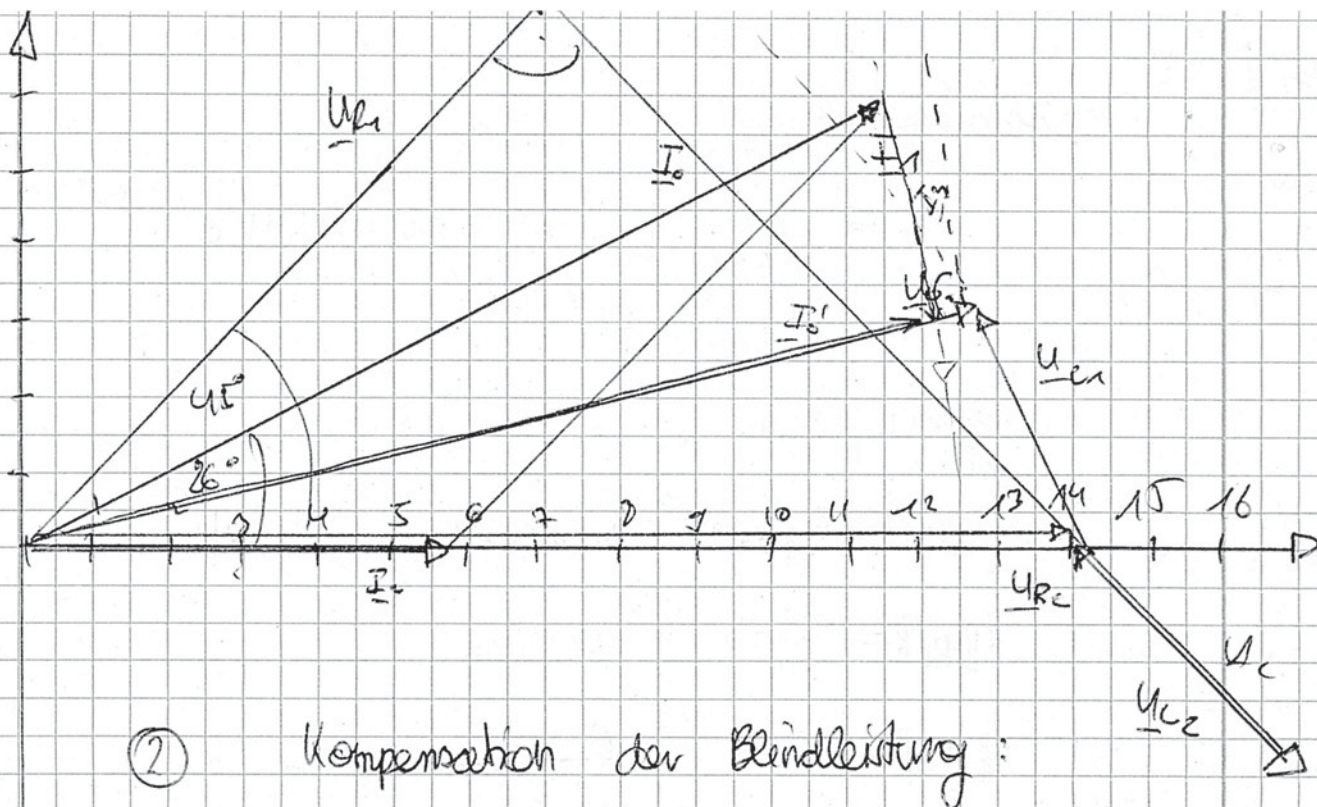
$$\underline{U}_R = 50V e^{j45^\circ} \hat{=} 10cm$$

$$\underline{U}_L = 70V e^{j135^\circ} \hat{=} 14cm$$

$$\underline{U}_{L2} = 20V e^{j135^\circ} \hat{=} 4cm$$

$$\underline{U}_{L1} = 15,8V e^{j116,57^\circ} \hat{=} 3,2cm$$

$$\underline{U}_0 = 65,2V e^{j11,52^\circ} \hat{=} 13cm$$



② Kompensation der Blindleistung:

die Spannungsquelle gibt keine Wirkleistung ab, wenn $\underline{I}_0'$ und $\underline{U}_0$ in Phase liegen

Aus dem Zeigendiagramm ersichtlich:

$\underline{I}_0$ eilt $\underline{U}_0$ voraus, d.h. die Quelle gibt kapazitive Blindleistung ab.

Zur Kompensation muss also eine Induktivität parallel geschaltet werden.

$$\underline{Z}_x = j\omega L_3$$

Einzeichnen: $\underline{I}_3 \perp$ zu $\underline{U}_0$ nachteilend

$$\underline{I}_0' = \underline{I}_0 + \underline{I}_3$$

$\underline{I}_3$ aus Zeigendiagramm ablesen:

$$3,1 \text{ cm} \stackrel{?}{=} |\underline{I}_3| \\ = 0,075 \text{ A}$$

$$X_{L3} = \frac{U_0}{\underline{I}_3} = \frac{65,2V}{0,775A} = 84,1\Omega$$

$$\Rightarrow L_3 = \frac{X_{L3}}{\omega} = \frac{84,1\Omega}{2\pi \cdot 50Hz} = 268\mu H$$

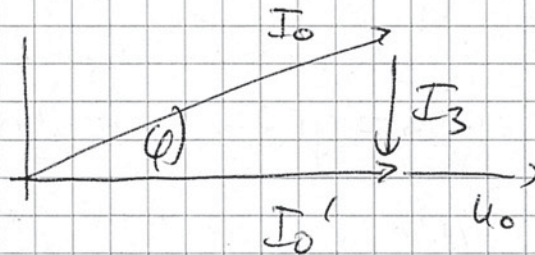
Man sieht $|\underline{I}_0'| < |\underline{I}_0|$

$\Rightarrow$ weniger Verluste in den "Leitungen"

-Rechnerisch:

Phasendiff. zw. $\underline{U}_0$ und $\underline{I}_0$

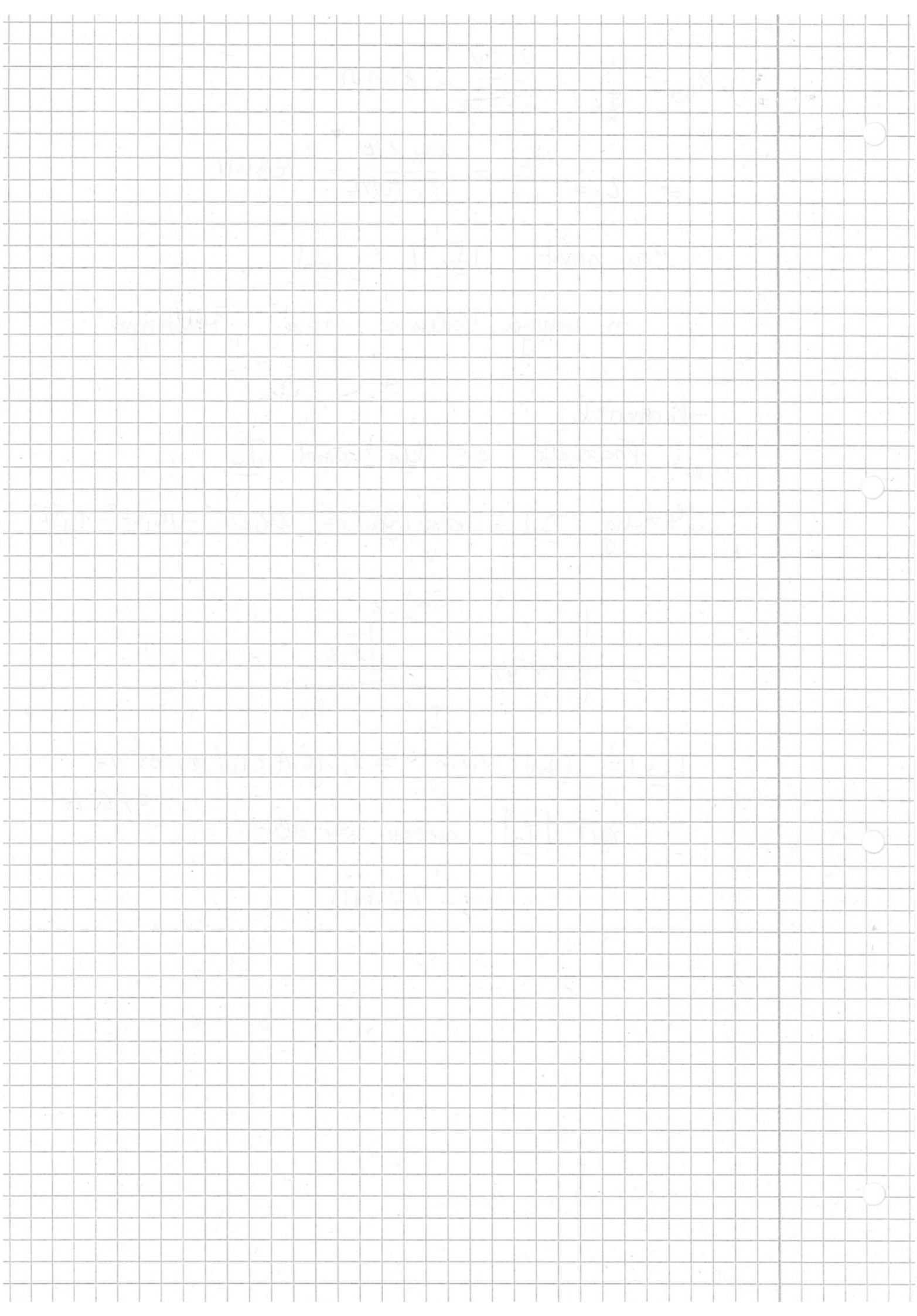
$$\varphi = \arg(\underline{I}_0) - \arg(\underline{U}_0) = 16,02^\circ - 16,57^\circ = -14,52^\circ$$



$$|I_3| = |I_0| \cdot \sin(\varphi) = 3,16A \sin(14,52^\circ) = 0,776A$$

mit $|I_3|$ weiter wie oben

$$\rightarrow L_3 = 277\mu H$$



GET #

GU

Do 30.6.

1. Std → Vorlesung

2. Std → Übung

2.7.

Vorlesung

A17

$$1) \quad \underline{Z} = j\omega L + \left(R + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \parallel \frac{1}{j\omega C_2}$$

$$= j\omega L + \frac{\left(R - j\frac{1}{\omega C_1}\right) \left(-j\frac{1}{\omega C_2}\right)}{R - j\frac{1}{\omega C_1} - j\frac{1}{\omega C_2}}$$

Doppelbrüche weitestgehend eliminieren

$$= j\omega L + \frac{-j\frac{R}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}{R - j\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\right)} \cdot \frac{\omega C_1 C_2}{\omega C_1 C_2}$$

$$= j\omega L + \frac{-jRC_2 - \frac{1}{\omega}}{R\omega C_1 C_2 - j(C_2 + C_1)} \cdot \frac{R\omega C_1 C_2 + j(C_1 + C_2)}{R\omega C_1 C_2 + j(C_1 + C_2)}$$

komplex konjugiert erweitern

... ausmultiplizieren

$$= j\omega L + \frac{RC_1(C_2 + C_1) - RC_1 C_2 - j(\omega^2 C_1^2 C_2 + \frac{C_2 + C_1}{\omega})}{R^2 \omega^2 C_1^2 C_2^2 + (C_1 + C_2)^2}$$

Zusammenfassen...

$$= j\omega L + \frac{RC_1^2 - j(\omega^2 C_1^2 C_2 + \frac{C_1 + C_2}{\omega})}{(R\omega C_1 C_2)^2 + (C_1 + C_2)^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\{Z\} = \omega L + \frac{-\omega R^2 C_1^2 C_2 + \frac{C_1 + C_2}{\omega}}{(R\omega C_1 C_2)^2 + (C_1 + C_2)^2}$$

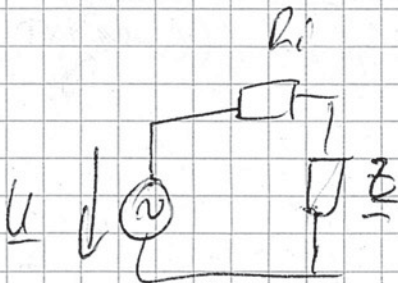
$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{Z\} = \frac{R C_1^2}{(R\omega C_1 C_2)^2 + (C_1 + C_2)^2}$$

2.) kein reell bei $\omega = \omega_0$ heißt $\operatorname{Im}\{Z\} = 0$

$$\omega_0 L - \frac{\omega_0 R^2 C_1^2 C_2 + \frac{C_1 + C_2}{\omega_0}}{(R\omega_0 C_1 C_2)^2 + (C_1 + C_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad / + \text{Bruchterm} / : \omega_0$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 R^2 C_1^2 C_2 + \frac{1}{\omega_0} (C_1 + C_2)}{R^2 C_1^2 C_2^2 + (C_1 + C_2)^2} = 19,49 \text{ mH}$$

3)



$Z = \operatorname{Re}\{Z\}$, da $\operatorname{Im}\{Z\}$ durch Wahl von L zu 0 wurde

$$Z = \frac{R C_1^2}{(R\omega C_1 C_2)^2 + (C_2 + C_1)^2} = 9,19 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R_i + Z} = 337,9 \text{ mA}$$

$$P = I^2 \cdot \operatorname{Re}\{Z\} = 1,05 \text{ W}$$

die maximale Leistung kann abgegeben werden, wenn Leistungsanpassung vorliegt.

Allgemein: Leistungsaussparung bei komplexer Innenwiderstand

$$\underline{Z} = \underline{Z}_i^*$$

Hier:

Da $\underline{Z}_i = R_i = \underline{Z}_i^*$ rein reell

$$\Rightarrow \underline{Z} = R_i$$

$$\Rightarrow I_{\max} = \frac{U}{2R_i} \Rightarrow P_{\max} = I_{\max}^2 \cdot \underline{Z} = 2W$$

Für das Verhältnis der aufgenommenen zur abgegebenen Leistung folgt:

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{105W}{2W} = 52,5\%$$

A18

1) Scheinleistung $\underline{S}_1$, die bei Reihenschaltung aus R_1 und L_1 aufgenommen:

$$\underline{S}_1 = \underbrace{\underline{U}_0}_{= \frac{\hat{U}_0}{\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\underline{I}_1^*}_{= \frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}}} = \frac{\hat{U}_0 \cdot \hat{I}_1^*}{2} = \frac{1}{2} \hat{U}_0 \left(\frac{\hat{U}_0}{\underline{Z}_1} \right)^*$$

mit $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$

$\underline{X}_{L_1} = 40 \Omega \cdot j$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_0 \cdot \hat{U}_0^*}{R_1 - jX_{L_1}} \cdot \frac{R_1 + jX_{L_1}}{R_1 + jX_{L_1}} = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_0^2 (R_1 + jX_{L_1})}{R_1^2 + X_{L_1}^2}$$

wegen komplex-konjug.

Anmerkung: $\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{U}}_0^* = |\underline{\hat{U}}_0|^2 = U_0^2$

$$= \frac{U_0^2 \cdot R_1}{2(R_1^2 + X_{L1}^2)} + j \frac{U_0^2 X_{L1}}{2(R_1^2 + X_{L1}^2)}$$

$$= P_1 + j Q_1$$

Steuerleistung $\underline{S}_2$, die R_2 aufnimmt

$$\underline{S}_2 = \frac{\underline{\hat{U}}_0 \cdot \underline{\hat{I}}_2^*}{2} = \frac{1}{2} \underline{\hat{U}}_0 \cdot \left(\frac{\underline{\hat{U}}_0}{R_2} \right)^*$$

$$= \frac{U_0^2}{2R_2} + j \cdot 0$$

$$= P_2 + j Q_2$$

Für die gesamte Wirkleistung gilt:

$$P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 = \frac{U_0^2 R_1}{2(R_1^2 + X_{L1}^2)} + \frac{U_0^2}{2R_2}$$

$$= \frac{U_0^2}{2} \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_{L1}^2} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Auflösen nach U_0 :

$$\underline{\hat{U}}_0 = \sqrt{\frac{2P}{\frac{R_1}{R_1^2 + X_{L1}^2} + \frac{1}{R_2}}} = 316,2 \text{ V}$$

CFT II

65

Damit folgt für die in R_2 umgesetzte Wirkleistung P_2 :

$$P_2 = \frac{\hat{U}_0^2}{2R_2} = \frac{(316,2V)^2}{2 \cdot 100\Omega} = 500W$$

$$\Rightarrow P_1 = P - 500W = 600W$$

2.) Festlegung des Phasenwinkels

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_0 \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_0}{R_1 + jX_{L1}} = \frac{316,2V}{30\Omega + j40\Omega} = 6,32A \cdot e^{-j51,1^\circ} \\ = 3,79A - j5,06A$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_0}{R_2} = \frac{316,2V}{100\Omega} = 3,16A$$

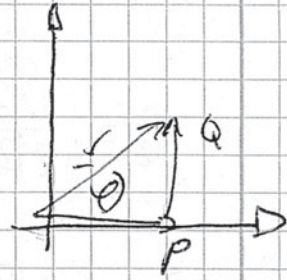
$$\hat{I}_0 = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 3,79A - j5,06A + 3,16A \\ = 8,6A \cdot e^{-j36,06^\circ}$$

$$3) S = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = \frac{\hat{U}_0 \cdot \hat{I}_0^*}{2} = \frac{316,2V \cdot 8,6A \cdot e^{+j36,06^\circ}}{2} \\ = 1360VA \cdot e^{j36,06^\circ} \\ = \underbrace{1100W}_P + j \cdot \underbrace{800VA}_Q$$

$$Q = 800VA_r$$

4) Wirkleistungsfaktor $\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$

$$\lambda = \frac{1100 \text{ W}}{1360 \text{ VA}} = 0,81$$



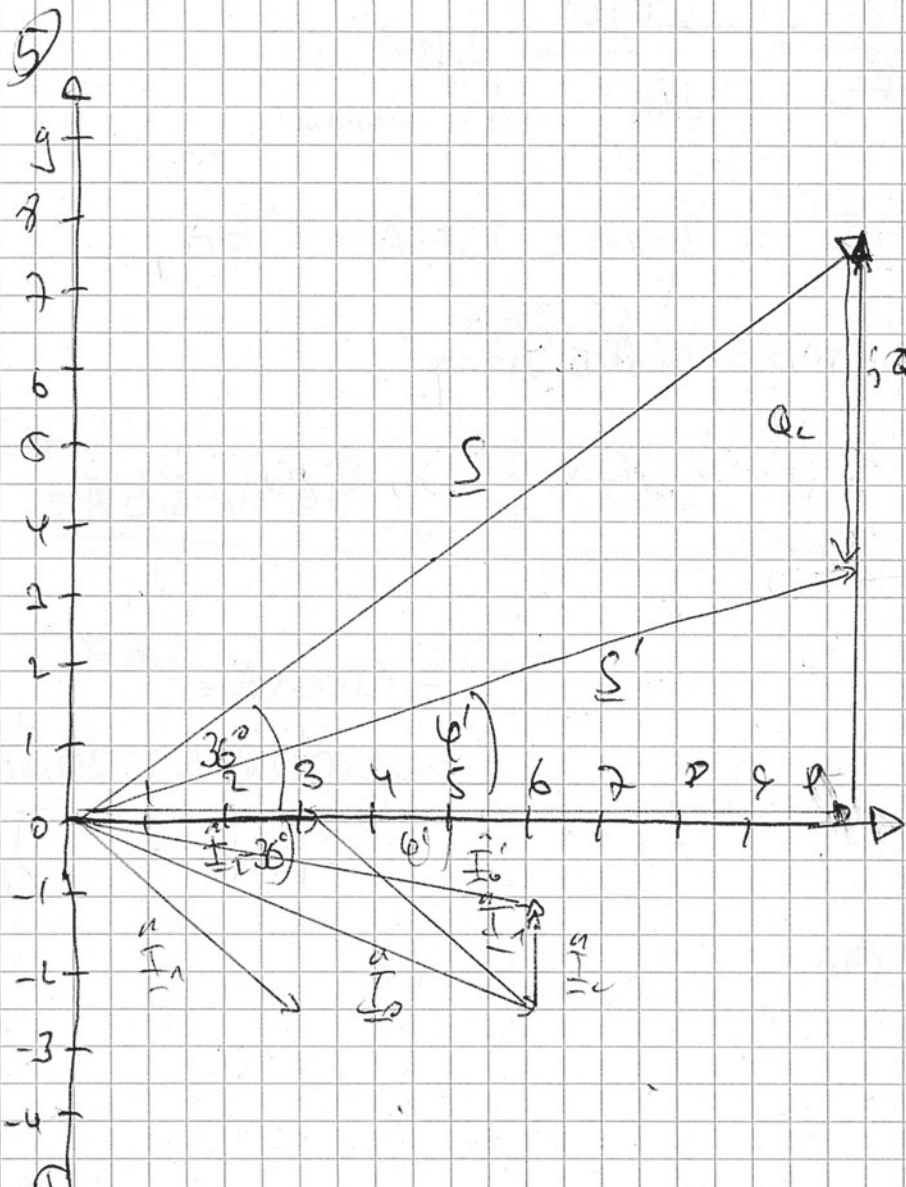
oder: $\cos 36,06^\circ = 0,81$

Blindleistungsfaktor

$$\frac{Q}{S} = \sin \varphi = \frac{800 \text{ VAR}}{1360 \text{ VA}} = 0,59$$

oder: $\sin 36,06^\circ = 0,59$

$100 \text{ VA} \hat{=} 1 \text{ kW}$
 $1 \text{ A} \hat{=} 1 \text{ kW}$

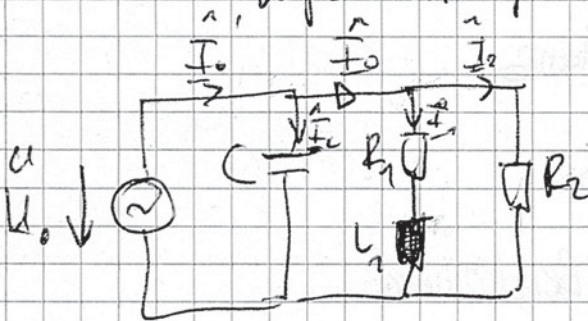


$$6) \cos \varphi' = 0,95 \quad \text{f. series} \Rightarrow \varphi' = 18,19^\circ$$

Schaltung nimmt pos. Blindleistung auf, wegen Induktivität L_1

Zur Kompensation wird ein Bauelement benötigt, dass negative Blindleistung aufnimmt, und damit die pos. Blindleistung kompensiert

$\Rightarrow$ Kapazität parallel



7) Lösung durch Ablesen aus Zeigerdiagramm

$\Rightarrow$ zusätzliche Aufnahme von neg. (d.h. kapazitiver) Blindleistung

$\Rightarrow$ Parallelschaltung der Kapazität

$$Q_C = \cancel{400 \text{ VA}_r}$$

$$S_C = \frac{\hat{U}_0 \cdot \hat{I}_C}{2} = \frac{\hat{U}_0 \cdot (\hat{U}_0 \cdot \cancel{j\omega C})}{2}$$

$$= j \left(-\frac{1}{2} \hat{U}_0^2 \omega C \right)$$

$$= P_C + jQ_C \Rightarrow Q_C = -\frac{1}{2} \hat{U}_0^2 \omega C$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{2Q_C}{\hat{U}_0^2 \cdot \omega} = 15 \mu\text{F}$$

$$\underline{\hat{I}}_c = 160C \cdot \underline{\hat{U}}_0 = j \cdot 2,78A$$

Verhlle:

$$\Rightarrow \underline{\hat{I}}_0 = \underline{\hat{I}}_c + \underline{\hat{I}}_0 = j2,78A + 6,95A - j5,06A \\ = 6,95A - j2,28A = 7,31A e^{-j18,16^\circ}$$

A16

$$\underline{Z} = R + jX$$

Impedanz Resistanz Reaktanz

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$$

Admittanz (Leitfähigkeit) Blindleitwert
 Leitfähigkeit Suszeptanz

- Sperrn der Frequenz f_1 :

Parallelschwingkreis aus L_1 und C_1 :

$$\underline{Y}_1(\omega) = \frac{1}{j\omega_1 L_1} + j\omega_1 C_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 C_1 = \frac{1}{\omega_1 L_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_1} = 11,73nF$$

Parallelschwingkreis aus L_2 und C_2

$$\omega_1 C_2 = \frac{1}{\omega_1 L_2} \Rightarrow C_2 = 13,53nF$$

D.h. der Gesamtwiderstand der Schaltung
 ist für f_1 nur unendlich hoch

A16 Fortsetzung

Sperrn der Frequenz f_2 :

Wähle C_3 so, dass der Gesamtwiderstand der Schaltung $\rightarrow \infty$ geht.

$$\text{D.h. } Y_{\text{ges}}(f_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$Y_{\text{ges}} = \frac{1}{j\omega_2 L_1} + j\omega_2 C_1 + jB_{23} \stackrel{!}{=} 0$$

Bz:
Blindleitwert
von
 L_2, C_2, C_3

$$\Rightarrow jB_{23} = j\left(\frac{1}{\omega_2 L_1} - \omega_2 C_1\right)$$

$$B_{23} = \frac{1}{2\pi \cdot 85 \text{ kHz} \cdot 0,15 \text{ mH}} - 2\pi \cdot 85 \text{ kHz} \cdot 11,73 \text{ nF}$$

$$= 6,22 \text{ mS}$$

$$jX_{23} = \frac{1}{jB_{23}} = -j160,82 \Omega \Rightarrow X_{23} = -160,82 \Omega$$

Der Widerstand des Zweiges aus L_2, C_2, C_3 ist:

$$jX_{23} = j\omega_2 L_2 \parallel \frac{1}{j\omega_2 C_2} + \frac{1}{j\omega_2 C_3}$$

$$= \frac{j\omega_2 L_2 \cdot \frac{1}{j\omega_2 C_2}}{j\omega_2 L_2 + \frac{1}{j\omega_2 C_2}} + \frac{1}{j\omega_2 C_3}$$

$$X_{23} = \frac{-\frac{L_2}{C_2} \cdot \omega_2 C_2}{\omega_2^2 L_2 C_2 - 1} - \frac{1}{\omega_2 C_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\omega_2 C_3} = -X_{23} + \frac{R_2 \omega_2}{1 - \omega_2^2 C_2 L_2}$$

$$= +160,82 \Omega + \frac{0,13 \text{ mH} \cdot 2\pi 85 \text{ kHz}}{1 - (2\pi 85 \text{ kHz})^2 \cdot 0,13 \text{ mH} \cdot 13,57 \text{ nF}}$$

$$= 300,15 \Omega$$

Damit folgt für C_3 :

$$C_3 = 0,29 \text{ nF}$$

A15

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Im Resonanzfall gilt

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$(\text{d.h. } \underline{Z} = R)$$

$$\Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Damit folgt für die Resonanzfrequenz

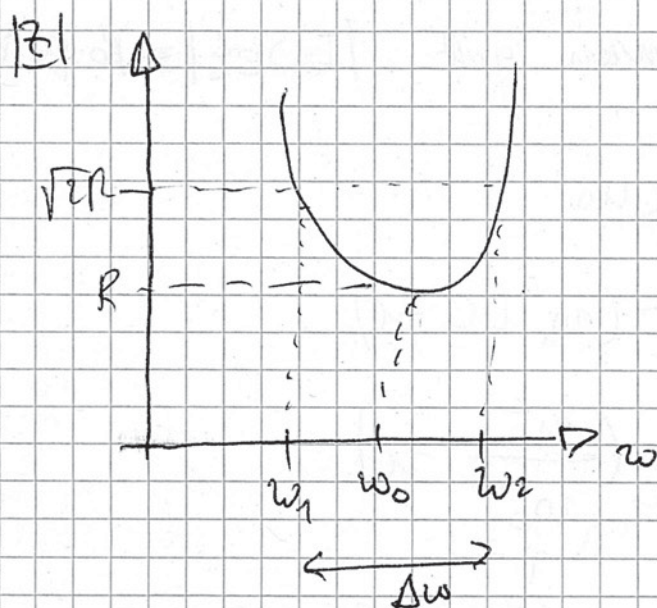
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Betrachte $|\underline{Z}(\omega)|$ für

GFT II
60

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \text{ d.h. } |Z| \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \omega L \rightarrow \infty \text{ d.h. } |Z| \rightarrow \infty$$



$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad \text{Bandbreite}$$

Der Scheinwiderstand des Schwingkreises bei der Kreisfrequenz ω_2 und ω_1 beträgt das $\sqrt{2}$ -fache des Scheinwiderstandes im Resonanzfall
(s. Vorlesungsskript S. 96)

Bei der Grundfrequenz ω_1 gilt:

$$|Z(\omega_1)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{2} R$$

$$R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = 2R^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \left| \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right| = R$$

Andere Definition:

Bei Grenzfrequenzen gilt $|\operatorname{Im}\{Z\}| = \operatorname{Re}\{Z\}$

$$\text{bzw. } \arg(Z) = \pm 45^\circ$$

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{\omega_1 C} (\omega_1^2 LC - 1)$$

$$= \frac{1}{\omega_1 C} \left(\underbrace{\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}_{< 1, \text{ da } \omega_1 < \omega_0} - 1 \right)$$

$$< 0$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R$$

$$\Leftrightarrow \omega_1^2 + \omega_1 \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

↑ nur "+" sinnvoll, da sonst negative Frequenz

Bei der Grenzfrequenz ω_2 gilt analog

$$\left| \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right| = R$$

$$\dots \omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

↑ nur "+" sinnvoll

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

Daraus folgt für L

$$\Rightarrow L = \frac{R}{\Delta\omega} = 79,58 \text{ mH}$$

Aus $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ folgt: $C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi 800 \text{ Hz})^2 \cdot 79,58 \text{ mH}}$
 $= 497,4 \text{ nF}$

Anmerkung:

ω_0 zwar zwischen ω_1 und ω_2 , jedoch nicht genau mittig

$$\text{d.h. } \omega_0 \neq \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} \neq \omega_2 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

A19

1). Abgleichbedingung:

$$\frac{Z_2}{Z_4} = \frac{Z_1}{Z_3}$$

$$U_5 = 0 \text{ V}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \quad ; \quad \underline{U}_4 = \underline{U}_3$$

$$\underline{I}_5 = 0$$

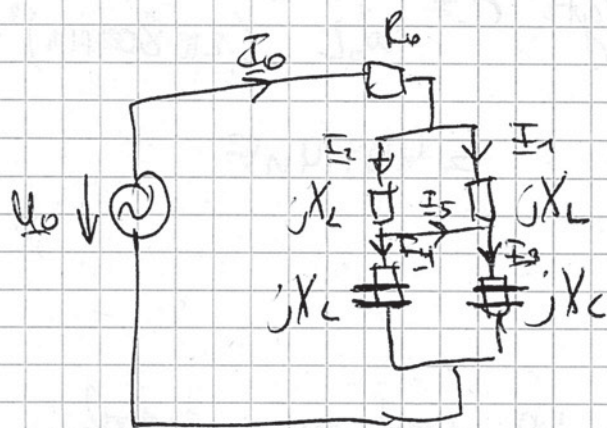
$$\Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_6 \quad ; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_4$$

$$\frac{Z_2}{Z_4} = \frac{\underline{U}_2 / \underline{I}_2}{\underline{U}_4 / \underline{I}_4} = \frac{\underline{U}_1 / \underline{I}_2}{\underline{U}_3 / \underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_3}$$

$$\Rightarrow \frac{U_1 / I_1}{U_3 / I_3} = \frac{Z_1}{Z_3} \Rightarrow Z_1 = \frac{Z_2}{Z_4} \cdot Z_3$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{jX_L}{jX_C} \cdot jX_C = jX_L = j20\Omega$$

2.) ESB vereinfachen:



$I_5 = 0$, da symmetrisch

$$Z_{ges} = R_0 + j\left(\frac{X_L}{2} + \frac{X_C}{2}\right) = 5\Omega + j\left(\frac{20\Omega}{2} + \frac{10\Omega}{2}\right) \\ = 5\Omega + j5\Omega$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_{ges}} = \frac{50V}{5\Omega + j5\Omega} = \frac{50V}{(5\Omega)^2 + (5\Omega)^2} (5\Omega - j5\Omega) \\ = 5A - j5A$$

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2} = 2.5A - j2.5A = I_3 = I_4$$

$$U_R = R \cdot I_0 = 5\Omega \cdot (5A - j5A) = 25V - j25V$$

$$U_1 = U_2 = I_1 \cdot jX_L = 50V + j50V$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_4 = \underline{I} \cdot jX_L = (2.5A - j2.5A) \cdot (j10\Omega) \\ = -25V - j25V$$

$$0FA \hat{=} 10m$$

$$5V \hat{=} 10m$$

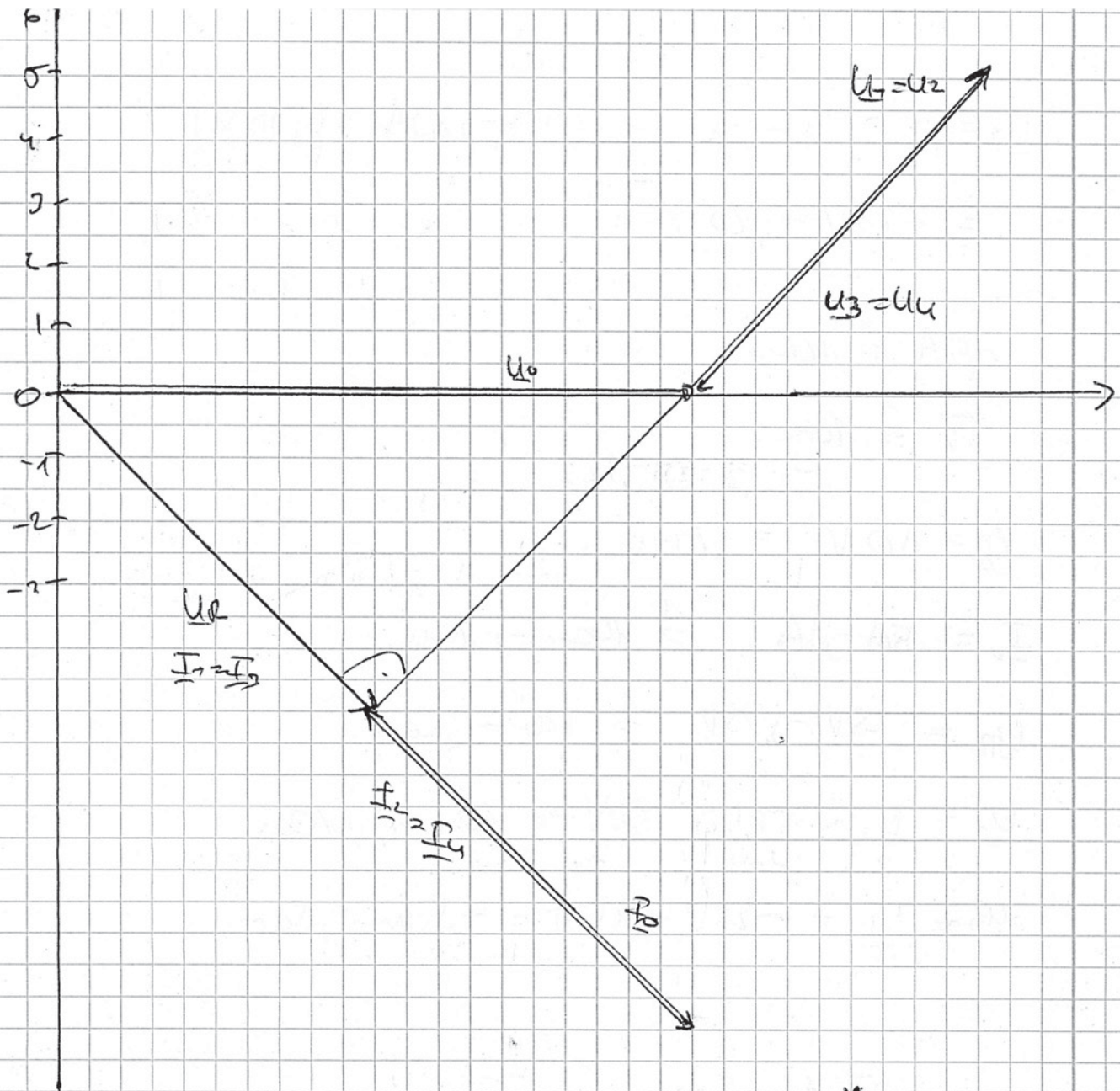
$$\underline{U}_6 = 50V \hat{=} 100m$$

$$\underline{I}_6 = 5A - j4A \hat{=} 100m - j100m$$

$$\underline{U}_6 = 25V - j25V \hat{=} 50m - j50m$$

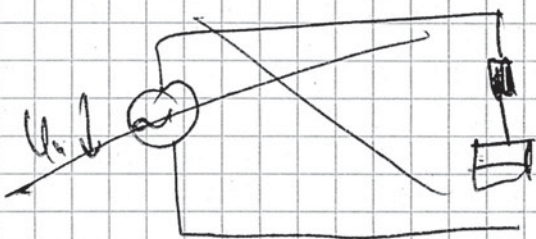
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 = 50V + j50V = 100m + j100m$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_4 = -25V - j25V = -50m - j50m$$

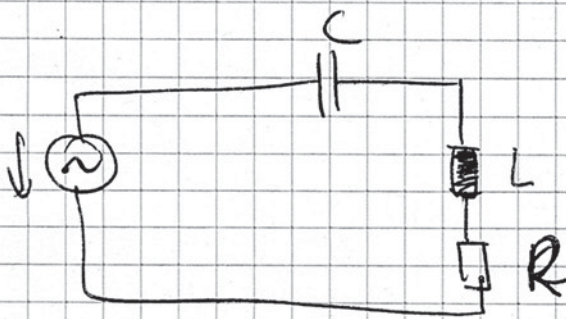


$$\begin{aligned}
 3) \quad \underline{S} &= \underline{U}_0 \underline{I}_0^* = 50\text{V} \cdot (5\text{A} - j5\text{A})^* \\
 &= 50\text{V} (5\text{A} + j5\text{A}) = 250\text{W} + j250\text{VA}_{\text{r}} \\
 \Rightarrow P &= 250\text{W} \\
 Q &= 250\text{VA}_{\text{r}}
 \end{aligned}$$

Blindleistungskompensation



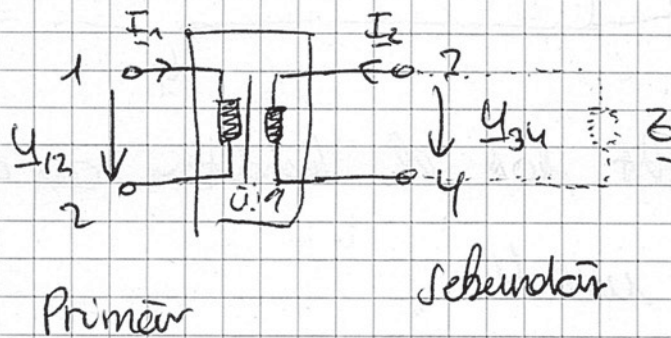
BT II
6U



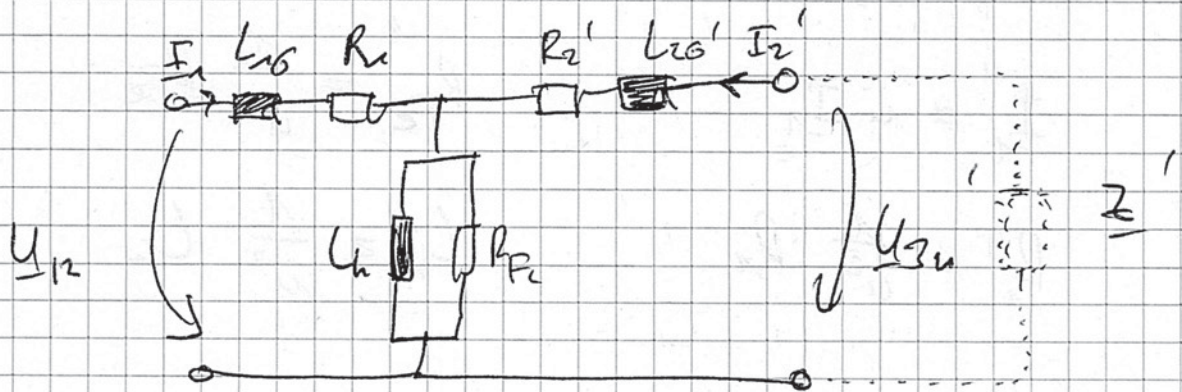
parallel compensation,
da sonst Strom
durch R zu groß

Transformator

ESB mit den an den Klemmen messbaren
Größen



ESB bezogen auf die Primärseite



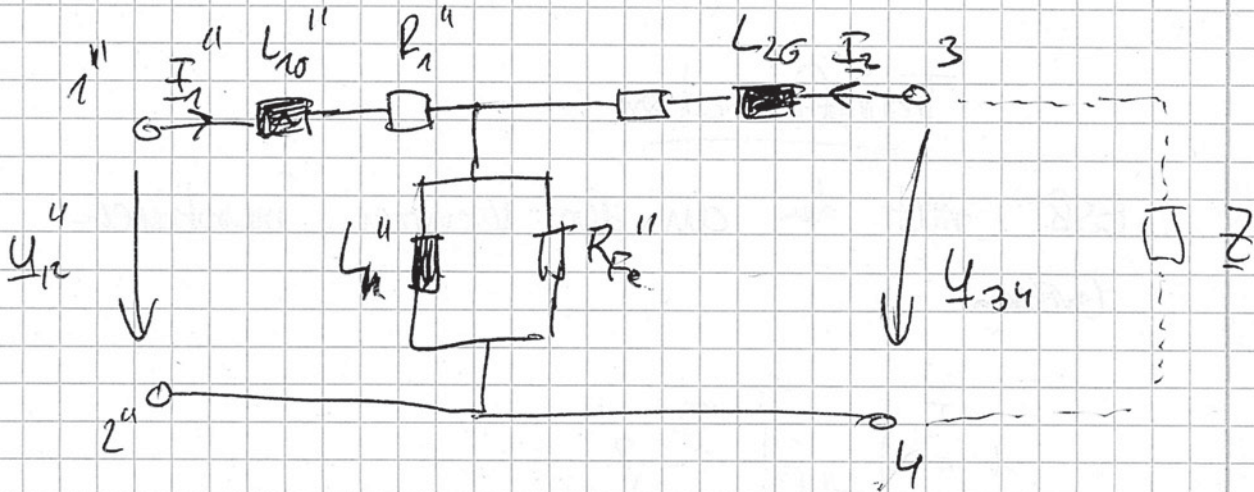
$$\begin{aligned} U_{34}' &= j I_{34}' \\ I_{2}' &= \frac{1}{n} I_2 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad Z = \frac{U_{34}}{-I_2}$$

$$Z' = \frac{U_{34}'}{-I_{2}'} = \frac{j I_{34}'}{\frac{1}{n} \cdot (-I_2)} = n^2 Z$$

$$R_1' = \ddot{u}^2 R_1$$

$$L_{2G}' = \ddot{u}^2 L_{2G}$$

- ESB bezogen auf die Sekundärseite:



Beschreibt durch das el. Verhalten an den Klemmen 3 und 4

$$U_{12}'' = \frac{1}{\ddot{u}} U_{12}$$

$$L_{10}'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} L_{10}$$

$$I_1'' = \ddot{u} I_1$$

$$R_{Fe}'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} R_{Fe}$$

$$R_1'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} R_1$$

$$L_h'' = \frac{1}{\ddot{u}^2} L_h$$

Leistungen: Passivität
(müssen sich addieren)

$$\begin{aligned} U_{34}' I_2' &= \ddot{u} U_{34} \cdot \frac{1}{\ddot{u}} I_2 \\ &= U_{34} I_2 \end{aligned}$$