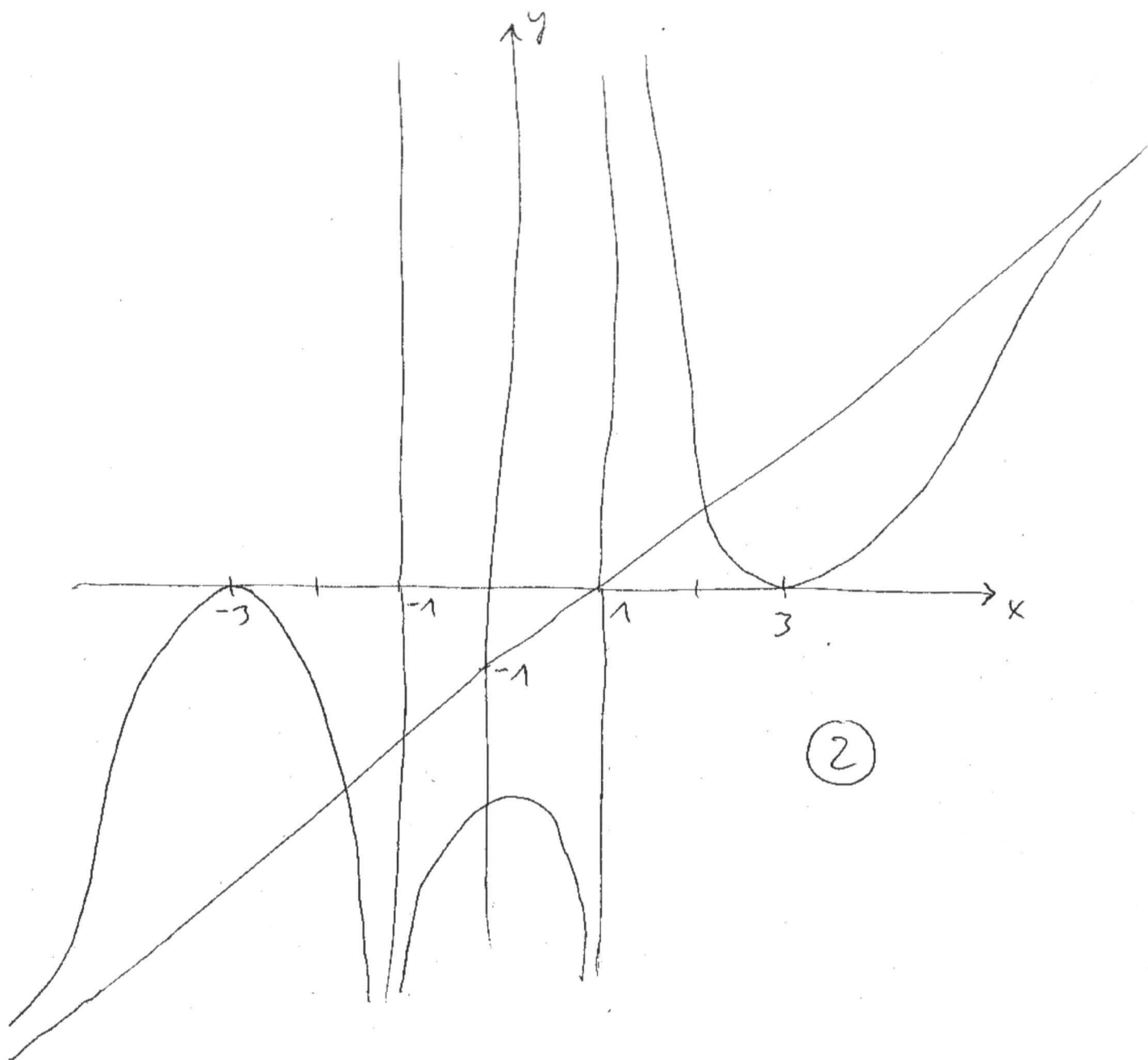




Aufgabe 2

Man untersuche, ob die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

(6)

Es ist

$$f'(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \frac{\sqrt{x^2+1} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \quad (1)$$

$$= e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \quad (1)$$

mit

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| < \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = 1 \text{ für } x \neq 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{e}{(x^2+1)^{3/2}} \leq e \text{ für } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

d.h. f' beschränkt auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (1)

Aufgabe 3

Man bestimme alle kritischen Punkte der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(1+x^2) - \sqrt{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

und untersuche, ob ein lokales Maximum, Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(7)

Es ist

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{1+x^2} = 2, \text{ d. h. } x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \quad (2)$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \quad (1)$$

$$f''(0) = 2 - 1 > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum in } x_1 = 0 \quad (1)$$

$$f''(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} < 0$$

$$\Rightarrow \text{lokales Maximum in } x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

(1)

Aufgabe 4

Man beweise die Ungleichung

(8)

$$x \arctan x > \ln(1+x^2) \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Betrachte $f(x) = x \arctan x - \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \arctan x - \frac{x}{x^2+1} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f''(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \quad (1) \\ &> 0 \text{ für } x \neq 0. \quad (1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x)$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ (1)

Wegen $f'(0) = 0$ folgt

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 0 \\ < 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow f(x)$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & \text{für } x \geq 0 \\ \text{fallend} & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ für $x \neq 0 \Rightarrow \text{Beh} \quad (1)$

Aufgabe 5

Man berechne für $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

(7)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^{(x^2)}.$$

Es ist
 $\left(\cos \frac{a}{x} \right)^{(x^2)} = e^{x^2 \ln \cos \frac{a}{x}}$ mit

$$x^2 \ln \cos \frac{a}{x} = \frac{\ln \cos \frac{a}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{Form } \frac{0}{0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos \frac{a}{x}} \left(-\sin \frac{a}{x} \right) \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{-\frac{2}{x^3}} \quad (1)$$
$$= -\frac{a}{2} \frac{x \sin \frac{a}{x}}{\cos \frac{a}{x}} \quad (1)$$

$$= -\frac{a^2}{2} \frac{1}{\cos \frac{a}{x}} \cdot \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{a}{x}} \quad (1)$$

$\rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$, da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (1)

$$\rightarrow -\frac{a^2}{2} \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (1)$$

oder $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{a}{2} \frac{1}{\cos \frac{a}{x}} \cdot \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}$

mit $\frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \text{Form } \frac{0}{0} \quad (1)$

$$\Rightarrow \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{\cos \frac{a}{x} \cdot \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = a \cos \frac{a}{x} \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (1)$$

l'Hospital $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^{(x^2)} = e^{-\frac{a^2}{2}} \quad (1)$$

oder ε int

$$\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{(x^4)} = e^{x^2 \ln \cos \frac{a}{x}} \text{ mult}$$

$$x^2 \ln \cos \frac{a}{x} = \frac{\ln \cos \frac{a}{x}}{\frac{1}{x^2}} \quad \text{Form } \frac{0}{0} \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\ln(1+t) = t + O(t^2) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2 \ln \cos \frac{a}{x} = \frac{\ln\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (1)$$

$$= \frac{-\frac{a^2}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) + O\left(\left(-\frac{a^2}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^2\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (1)$$

$$= -\frac{a^2}{2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$\rightarrow -\frac{a^2}{2} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^{(x^4)} = e^{-\frac{a^2}{2}} \quad (1)$$

Aufgabe 6

Man berechne das unbestimmte Integral

(6)

$$\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} dx.$$

Mit $\sqrt{1+x} = t$, $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx = dt$, d.h. $dx = 2t dt$ (1)
folgt (1)

$$\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} 2t dt \quad (1)$$

$$= \int (2t - 4 + \frac{4}{t+1}) dt, \text{ da } (2t^2 - 2t) : (t+1) = 2t - 4 + \frac{4}{t+1}$$

$$= t^2 - 4t + 4 \ln|t+1| + c \quad (1)$$

$$= 1+x - 4\sqrt{1+x} + 4 \ln|\sqrt{1+x}+1| + c \quad (1)$$

oder $\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} dx = \int (1 - \frac{2}{\sqrt{1+x}+1}) dx$
 $\left[\sqrt{1+x} = t, \quad dx = 2t dt \right] \quad (1)$

$$= x - \int \frac{4t}{t+1} dt \quad (1)$$

$$= x - \int (4 - \frac{4}{t+1}) dt \quad (1)$$

$$= x - 4t + 4 \ln|t+1| + c \quad (1)$$

$$= x - 4\sqrt{1+x} + 4 \ln|\sqrt{1+x}+1| + c \quad (1)$$

Aufgabe 7

Man berechne das unbestimmte Integral

(8)

$$\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$$

$$\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \ln x + \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx \quad (1)$$

$$\left[x^2 = t, 2x dx = dt \right] = \frac{-\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{1}{2t \sqrt{t-1}} dt \quad (1)$$

$$\left[\sqrt{t-1} = u, \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} = du, t = u^2 + 1 \right] \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{1}{u^2+1} du \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan u + c \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan \sqrt{x^2-1} + c \quad (1)$$

$$\text{oder } \sqrt{x^2-1} = t, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = dt, \quad x^2 = t^2 + 1 \quad (1)$$

$$= \int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{dt}{t^2+1} \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan t + c \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan \sqrt{x^2-1} + c \quad (1)$$

$$\text{oder } x = \cosh t, \quad dx = \sinh t dt \quad (1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{dt}{\cosh t} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{2e^t}{e^{2t}+1} dt \quad (1)$$

$$(e^t=u) \quad = -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{2}{u^2+1} du \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \arctan u + c \quad (1)$$

$$= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \arctan(x + \sqrt{x^2-1}) + c \quad (1)$$

da $2x = e^t + e^{-t} = u + \frac{1}{u}$, d.h. $u^2 - 2xu + 1 = 0$

$$\Rightarrow u = x \left(\pm \sqrt{x^2-1} \right)$$

denn $x - \sqrt{x^2-1} < 1$ für $x > 1$

$$\Leftrightarrow x-1 < \sqrt{x^2-1}, x > 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 < x^2-1, x > 1$$

$$\Leftrightarrow -2x+1 < -1 \Leftrightarrow 2 < 2x \Leftrightarrow x > 1$$

Aufgabe 1

Man untersuche die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x \ln(x-1)}} dx \text{ und } \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x \ln(x+1)}} dx$$

auf Konvergenz oder Divergenz.

(7)

linkes Integral, untere Grenze

Es gilt

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x \ln(x+1)}} \geq \frac{e^{-1}}{\sqrt{x \cdot x}} = \frac{1}{ex} \quad \text{für } 0 < x \leq 1$$

Minorantenkriterium: $\int_0^1 \frac{1}{ex} dx$ divergiert

$\Rightarrow$ linkes Integral divergiert (1)

rechtes Integral, obere Grenze

Es gilt

$$\left| \frac{e^{-x}}{\sqrt{x \ln(x+1)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} e^{-x} \quad \text{für } x \geq 1 \quad (1)$$

da $\sqrt{x \ln(x+1)}$ (streng) monoton wachsend für $x \geq 1$ (1)

Majorantenkriterium: $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{\ln 2}} dx$ konvergiert

$\Rightarrow$ rechtes Integral ist konvergent (1)

Aufgabe 2

Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

und berechne $f(x)$ in expliziter Form.

(9)

$$\text{Es ist } \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{\sqrt[n]{n+1}} \rightarrow 3 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{Konvergenzradius ist } r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{oder } \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{3^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{3^n} |x| = 3 \frac{n+1}{n+2} |x| \quad (1)$$

$$\rightarrow 3 |x| \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{Potenzreihe konvergiert für } |x| < \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{Für } |x| < \frac{1}{3} \text{ gilt}$$

$$x \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\text{d.h. } \frac{d}{dx} (x f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \quad (1)$$

$$= \frac{1}{1-3x} \quad (1) \quad (\text{geometrische Reihe})$$

$$\Rightarrow x f(x) = \int \frac{dx}{1-3x} = -\frac{1}{3} \ln(1-3x) + c \quad (1)$$

$$x=0 \Rightarrow 0 = c \quad (1), \text{ d.h.}$$

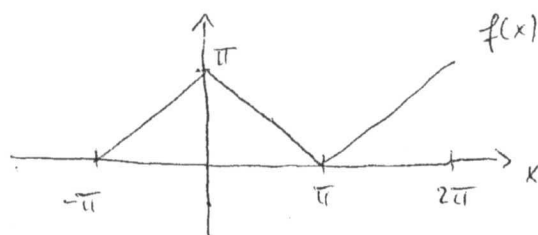
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3x} \ln(1-3x) & \text{für } |x| < \frac{1}{3}, x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x=0 \end{cases} \quad (1)$$

Aufgabe 3

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Man bestimme die Fourierreihe von $f(x)$ und untersuche, wo die Fourierreihe $S(f)(x)$ die Funktion f darstellt.



$$f(x) \quad \left[\text{oder: } f(-x) = \begin{cases} \pi - x & \text{für } -\pi \leq -x < 0 \\ \pi + x & \text{für } 0 \leq -x < \pi \end{cases} \stackrel{(9)}{=} f(x) \right]$$

$\Rightarrow f(x)$ ist gerade Fkt (1)

$\Rightarrow b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ (1) und für $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \cos(nx) dx \quad (1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n} (\pi - x)}_{=0} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx) dx \right\} \quad (1)$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2} \cos(nx) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \quad (1)$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi n^2} & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$\text{und } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow S(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (1)$$

f ist auf $\mathbb{R}$ stetig und stückweise stetig diff'bar

$$\Rightarrow S(f)(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (\pi+x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{(\pi+x)^2}{2} \right|_{-\pi}^0 - \frac{1}{2\pi} \left. \frac{(\pi-x)^2}{2} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (\pi+x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n} (\pi+x) \Big|_{-\pi}^0}_{=0} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n} (\pi-x) \Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right\} \quad (1) \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \left\{ \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 - \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \right\} = \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (\pi+x) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\cos(nx)}{n} (\pi+x) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx - \frac{\cos(nx)}{n} (\pi-x) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right\} \quad (1) \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\pi}{n} - \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} \right\} \quad (1) \\ &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (1)$$

f ist stetig und stückweise stetig diff'bar auf $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow S(f)(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Aufgabe 4

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(6)

$$(1+x^2)y' + xy = \sin x \cdot \sqrt{1+x^2}.$$

Es ist $y' = -\frac{x}{1+x^2}y + \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$ lineare Dgl

homogene lin. Dgl.

$$y_h' = -\frac{x}{1+x^2}y_h \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y_h'}{y_h} = -\frac{x}{1+x^2}, \text{ d.h.}$$

$$\ln|y_h| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|c| \Rightarrow y_h(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Variation der Konstanten: $y(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$

$$\Rightarrow y' = \frac{c'}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{c \cdot 2x}{2(1+x^2)^{3/2}} = \frac{-x}{1+x^2} \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \sin x, \text{ d.h. } c(x) = -\cos x + c \quad (1)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{c - \cos x}{\sqrt{1+x^2}}, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

oder die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c e^{A(x)} + \int_0^x g(t) e^{A(x)-A(t)} dt$$

mit $A(x) = \int_0^x f(u) du$ und $f(x) = \frac{-x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2)$

$$\Rightarrow A(x) = -\int_0^x \frac{u}{1+u^2} du = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad (1)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+x^2}} dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (c - \cos x + 1) \quad (1)$$

Aufgabe 5

Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems

(12)

$$x_1' = 2x_2 - 2x_3$$

$$x_2' = -2x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$x_3' = -x_1 - x_2 + 3x_3$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ -2 & -3-\lambda & 7 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-9 + \lambda^2 + 7) + 2(6 - 2\lambda - 2) - (14 - 6 - 2\lambda) \quad (1)$$

$$= -\lambda^3 \quad (1)$$

$$= 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \mu_1 = 3 \quad (1)$$

Eigenvektoren

$$2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow -x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{d.h. } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

einzigster l. u. Eigenvektor

Hauptvektoren

$$(A - 0 \cdot E)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A - 0 \cdot E)^2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad (1)$$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow (A - 0 \cdot E)^3 = 0$, d.h. $\text{Kern } A^3 = \mathbb{R}^3$

Wähle z.B. $\vec{v}_1^{(3)} = \vec{e}_1 \in \text{Kern } A^3 \setminus \text{Kern } A^2$ (1)

$\Rightarrow \vec{v}_1^{(2)} = A \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1) und

$\vec{v}_1^{(1)} = A \vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow \vec{x}_1(t) = e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1)

$\vec{x}_2(t) = e^{0 \cdot t} \left\{ t \vec{v}_1^{(1)} + \vec{v}_1^{(2)} \right\} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t-2 \\ -t-1 \end{pmatrix}$ (1)

$\vec{x}_3(t) = e^{0 \cdot t} \left\{ \frac{t^2}{2} \vec{v}_1^{(1)} + t \vec{v}_1^{(2)} + \vec{v}_1^{(3)} \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 1 \\ -\frac{1}{2}t^2 - 2t \\ -\frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}$ (1)

oder $\vec{v}_1^{(3)} = \vec{e}_2 \in \text{Kern } A^3 \setminus \text{Kern } A^2$ (1)

$\Rightarrow \vec{v}_1^{(2)} = A \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1) und

$\vec{v}_1^{(1)} = A \vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1), $\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -4t+2 \\ -2t-3 \\ -2t-1 \end{pmatrix}$ (1)

und $\vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} -2t^2+2t \\ -t^2-3t+1 \\ -t^2-t \end{pmatrix}$ (1)

oder $\vec{v}_1^{(3)} = \vec{e}_3 \in \text{Kern } A^3 \setminus \text{Kern } A^2$ (1)

$\Rightarrow \vec{v}_1^{(2)} = A \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1) und

$\vec{v}_1^{(1)} = A \vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (1)

$$1. \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textcircled{1}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t+7 \\ 4t+3 \end{pmatrix} \textcircled{1}$$

$$\text{und } \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 4t^2-2t \\ 2t^2+7t \\ 2t^2+3t+1 \end{pmatrix} \textcircled{1}$$

oder Hauptvektoren

Löse $(A - 0 \cdot E) \vec{x} = \vec{v}_1$:

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 1 \quad \textcircled{2} \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow -x_2 + x_3 = -1$
 $\uparrow \quad | \cdot (-2)$

Wähle $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1, x_1 = -2$, d.h. $\vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textcircled{1}$

Löse nun $(A - 0 \cdot E) \vec{x} = \vec{v}_1^{(2)}$, d.h.

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 1 \quad \textcircled{1} \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow -x_2 + x_3 = 1$
 $\uparrow \quad | \cdot (-2)$

Wähle $x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1, x_1 = 3$, d.h. $\vec{v}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \textcircled{1}$

$$\Rightarrow \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textcircled{1}$$

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \textcircled{1} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} t^2-2t+3 \\ \frac{1}{2}t^2+t \\ \frac{1}{2}t^2+1 \end{pmatrix} \textcircled{1}$$

Aufgabe 6

Man bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (7)

$$x_1' = 2x_1 + 6x_2 + e^{-4t}$$

$$x_2' = 6x_1 + 2x_2 - e^{-4t}$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 4\lambda - 32$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+32} = 2 \pm 6, \text{ d.h. } \lambda_1 = 8, \lambda_2 = -4$$

$$\mu_{1,2} = 1 \quad (1)$$

Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 8: \quad \begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 6x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\lambda_2 = -4: \quad A = A^T_{\text{reell}} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_h(t) = c_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Es ist } -\vec{x}_2(t) = e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{g}(t), \text{ d.h. Resonanzfall} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{sp}(t) = t \vec{g}(t) = t e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{oder } W(t) = \begin{vmatrix} e^{8t} & -e^{-4t} \\ e^{8t} & e^{-4t} \end{vmatrix} = 2e^{4t}, \quad W_1(t) = 0$$

$$\text{und } W_2(t) = \begin{vmatrix} e^{8t} & e^{-4t} \\ e^{8t} & -e^{-4t} \end{vmatrix} = -W(t) \quad (1)$$

$$\Rightarrow c_1(t) = 0, \quad c_2(t) = \int (-1) dt = -t, \text{ d.h. } \vec{x}_{sp}(t) = t e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_{sp}(t) \quad (1)$$

$$k=1: f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$$

f ist stetig für $x_0 \leq 0$, aber nicht diffbar für $x_0 \leq 0$:

$$|f(x) - f(0)| = |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| = |x-0| < \varepsilon$$

für x mit $|x-0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$

bzw:

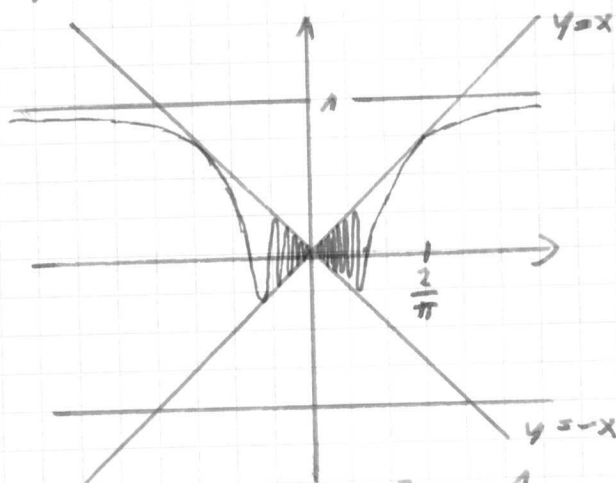
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \sin \frac{1}{h} \text{ divergiert für } h \rightarrow 0$$

Ferner gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$\Rightarrow g(x) \equiv 1$ ist Asymptote für $x \rightarrow \pm \infty$ nach A4a(i) $\Rightarrow f$ ist für $k=1$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig

$$f(-x) = (-x) \sin(-\frac{1}{x}) = x \sin \frac{1}{x} = f(x), \text{ d.h. gerade Funktion}$$



$$|\sin x| < |x| \text{ für } x \neq 0$$

$$k=2: f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ist in $x_0 \leq 0$ stetig, und diffbar, aber nicht stetig diffbar

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$\Rightarrow f$ diffbar in $x_0 \leq 0 \Rightarrow f$ auch stetig in $x_0 = 0$

$\Rightarrow f'(x)$ definiert auf $\mathbb{R}$

Für $x \neq 0$ gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x^2 \sin \frac{1}{x}) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0 \text{ divergiert für } x \rightarrow 0 \text{ -M24U}$$