Übung 9 B-Teil

Nr. 43 Löse die folgenden DGLs:

a) $u'(x) = -\sin(x)u(x) + \sin^3(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $u'(x) + \sin(x)u(x) = \sin^3(x)$ ist eine lineare inhomogene DGL. Benutze Satz 6.7:

Stammfunktion von $\sin(x)$ ist $-\cos(x)$.

Damit:

$$u(x) = e^{\cos(x)} \int e^{-\cos(x)} \cdot \sin^3(x)\,dx$$

$$= e^{\cos(x)} \int e^{-\cos(x)} \cdot \sin(x) \cdot \sin^2(x)\,dx$$

$$= e^{\cos x}\left(\int e^{-\cos(x)} \sin(x)\,dx - \int e^{-\cos(x)} \sin(x) \cdot \cos^2(x)\,dx \right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} e^{\cos x}\left(\int e^y\,dy - \int e^y \cdot y^2\,dy \right)$$

sub.: $y = -\cos x$
$y' = \sin x$

$$= e^{\cos x}\left(e^y - y^2 e^y + 2\int e^y y\,dy \right) + C$$

$$= e^{\cos x}\left(e^y - y^2 e^y + 2ye^y - 2\int e^y\,dy \right) + C$$

$$= e^{\cos x}\left(e^y - y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y \right) + C$$

$$= e^{\cos x} \cdot e^{-\cos x}\left(-\cos^2 x - 2\cos x - 1 \right) + C$$

$$= -\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 + C$$

Also löst $u(x) = -\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 + C$ die DGL.

b) $u'(x) = -\tan(x)u(x) + \cos^2(x)$, $u(\pi) = 1$,
$x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

mit Satz 6.8 folgt:
($\tan(x)$, $\cos^2(x)$ stetig in $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$.)

$$u(x) = \exp\left(-\int_\pi^x \tan(y)dy\right) \cdot \left(1 + \int_\pi^x \cos^2(y) \exp\left(\int_\pi^y \tan(u)du\right) dy\right)$$

$$\int_\pi^x \tan(y)dy = \Big[-\ln|\cos(x)|\Big]_\pi^x \overset{\cos x < 0 \text{ für } x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)}{=} -\ln(-\cos(x)) + \ln(1)$$

$$= -\ln(-\cos(x))$$

$$\int_\pi^x \cos^2(y) \exp(-\ln(-\cos(y))) dy = \int_\pi^x \frac{\cos^2(y)}{-\cos(y)} dy$$

$$= -\int_\pi^x \cos(y) dy = \Big[-\sin(y)\Big]_\pi^x = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \exp(+\ln(-\cos(x))) \cdot (1 - \sin(x))$$

$$= -\cos(x)(1 - \sin(x))$$

$$= \cos(x)(\sin(x) - 1)$$

c) $u'(x) = \frac{x}{1+x^2} u(x) + \sqrt{1+x^2} \cosh(x)$, $u(0) = 1$,
$x \in (0, \infty)$.

benutze Satz 6.8:

$$u(x) = \exp\left(-\int_0^x -\frac{t}{1+t^2} dt\right)\left(1 + \int_0^x \sqrt{1+t^2} \cosh(t) \cdot \exp\left(\int_0^t -\frac{u}{1+u^2} du\right) dt\right)$$

$$-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ u=1+t^2 \\ u'=2t}}{=} -\frac{1}{2}\int_1^{1+x^2} \frac{1}{u}\,du = \left[-\frac{1}{2}\ln|u|\right]_1^{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\int_0^x \sqrt{1+t^2}\cosh(t)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)dt$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+t^2}\cosh(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_0^x \cosh(t)\,dt$$

$$= \left[\sinh(t)\right]_0^x = \sinh(x)$$

$$\Longrightarrow u(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)(1+\sinh(x))$$

$$= \sqrt{1+x^2}\,(1+\sinh(x))$$

Nr. 44

a) $u'(x) = \frac{x^2}{u(x)}$ ist eine separable DGL.

Die Lösungen $u(x)$ erhält man, indem man

$(f(x) = x^2,\ h(y) = y)$

$$\int h(y)\,dy\Big|_{y=u(x)} = \int f(x)\,dx$$

nach $u(x)$ auflöst.

$$\int y\,dy\Big|_{y=u(x)} = \int x^2\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}y^2 + c\right)\Big|_{y=u(x)} = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(u(x))^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}$$

b) $u'(x) = \frac{(u(x))^2+1}{x^2+1}$ ist separable DGL.

mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(y) = \frac{1}{y^2+1}$ löse

$$\int g(y)\,dy\Big|_{y=u(x)} = \int f(x)\,dx$$ nach $u(x)$ auf.

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy\Big|_{y=u(x)} = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{artan}(y)\Big|_{y=u(x)} = \arctan(x) + C$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \tan(\arctan(x) + C)$$

c) $u'(x) = \frac{x - e^{-x}}{u(x) + e^{u(x)}}$ ist separable DGL.

$$\int y + e^y\,dy\Big|_{y=u(x)} = \int x - e^{-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}y^2 + e^y\right)\Big|_{y=u(x)} = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}u^2(x) + e^{u(x)} = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + C$$

Das ist $u(x)$ in impliziter Form.

Nr. 45

a) $u'(x) = \frac{\ln(x)}{1+u(x)}$, $u(1)=0$

Da für $\beta > 1$ $f(x) := \ln(x)$ stetig auf $[1,\beta]$ und $g(y) := 1+y$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist dies eine Anfangswertaufgabe wie in Satz 6.10.

Löse also $\int_0^{u(x)} g(y)\,dy = \int_1^x f(x)\,dx$ nach $u(x)$ auf.

$$\int_0^{u(x)} 1+y\,dy = \int_1^x \ln(y)\,dy \iff \left(y+\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{u(x)} = (y\cdot\ln y - y)\Big|_1^x$$

$$\iff u(x) + \tfrac{1}{2}(u(x))^2 = x\cdot\ln(x) - x + 1$$

$$\iff (u(x))^2 + 2u(x) - 2(x\cdot\ln(x) - x + 1) = 0$$

$$\implies u(x) = -1 \pm \sqrt{1 + 2(x\cdot\ln(x) - x + 1)}$$

wegen $u(1) = 0$: $u(x) = -1 + \sqrt{1+2(x\cdot\ln(x) - x + 1)}$

Definitionsbereich von $u(x)$:

$$1 + 2(x\cdot\ln(x) - x) + 2 \geq 0$$

$\iff x\cdot(\ln(x) - 1) \geq -\frac{3}{2}$ gilt für alle $x \in [1,\beta)$,

denn wegen $x \geq 1$ gilt $x, \ln(x) - 1 \geq 0$.

Also u def. in $[1,\beta)$.

b) $u'(x) = \frac{x\cdot(u(x))^3}{\sqrt{1+x^2}}$, $u(0) = -1$

$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $g(y) := \frac{1}{y^3}$ sind stetig, also Satz 6.10 anwendbar.

$$\int_{-1}^{u(x)} \frac{1}{y^3}\,dy = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \iff \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\right)\Big|_{-1}^{u(x)} = \frac{1}{2}\int_1^{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

<u>sub</u>: $u = 1+t^2$
$u' = 2t$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(u(x))^{-2}+\frac{1}{2} = \left(\sqrt{u}\right)\Big|_1^{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(u(x))^{-2}+\frac{1}{2} = \sqrt{1+x^2}-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(u(x))^2} = -2\sqrt{1+x^2}+3$$

$$\Leftrightarrow \quad (u(x))^2 = \frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}}$$

wegen $u(0)=-1$: $u(x) = -\sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

Definitionsbereich von $u(x)$:

$$3-2\sqrt{1+x^2}>0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2<\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2<\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow$ $u(x)$ ist def. für $x\in[0,\frac{\sqrt{5}}{2})$.