10. Übung B-Teil

Nr. 46 Löse die Anfangswertprobleme

a) $u' = A \cdot u$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimme zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren von A:

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-4-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$
$$= (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

EV zu λ_1: $(A - \lambda_1 E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 = -2v_2 \Leftrightarrow v_2 = -v_1$$

Ein Eigenvektor zu λ_1 ist also $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

EV zu λ_2: $(A - \lambda_2 E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3w_1 = -2w_2 \Leftrightarrow -\tfrac{3}{2}w_1 = w_2$$

Ein Eigenvektor zu λ_2 ist also $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u \in \{\alpha v e^{-x} + \beta w e^{-2x} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Bestimme α und β: $u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h.:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cdot e^{-0} + \beta \cdot 2 \cdot e^{-2\cdot 0} = -1 \\ \wedge\ -\alpha \cdot e^{-0} \quad 3\beta \cdot e^{-2\cdot 0} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 1$$

Also: $u(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2x}$

b) $u' = A \cdot u$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bestimme Eigenwerte von A:

$\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$

Also ist $\lambda = 1$ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2

Bestimme Eigenvektoren:

$(A - E)v = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$

$\Rightarrow 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$, v_1 bel.

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (z.B.) und die geometrische Vielfachheit von λ ist 1.

Bestimme Hauptvektor 2. Stufe:

$(A - E)w = v \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow w_2 = 1/2$, w_1 beliebig $\Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ (z.B)

Dann ist

$u(x) = \alpha v \cdot e^x + \beta(w + v \cdot x)e^x$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Bestimme α und β:

$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha \cdot v + \beta w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \beta = -2$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3$

$\Rightarrow u(x) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x - 2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x\right) e^x$

$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot e^x$

c) $u' = A \cdot u$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimme Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)\lambda^2 - (-\lambda + 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$\Rightarrow \lambda = -1$ und $\mu = 1$ sind die EWe von A, dabei ist μ von algebraischer Vielfachheit 2.

Bestimme Eigenvektoren:

- zu λ: $(A - \lambda E)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 \wedge v_3 = -v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (z.B.)}$$

- zu μ: $(A - \mu E)w_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow w_{1,2} = w_{1,3},\ w_{1,1} = w_{1,2} \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (z.B)},$$

geometr. Vielfachheit von μ ist 1, bestimme also Hauptvektor 2. Stufe: $(A - \mu E)w_2 = w_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} w_{2,2} - w_{2,3} = 1 \\ \Leftrightarrow w_{2,3} = w_{2,2} - 1 \\ \wedge\ w_{2,1} - w_{2,3} = 2 \\ \Leftrightarrow w_{2,3} = w_{2,1} - 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow w_{2,2} - 1 = w_{2,1} - 2$$
$$\Leftrightarrow w_{2,2} = w_{2,1} - 1$$

wähle $w_{2,1} = 1$, dann: $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dann hat $u(x)$ die Form: $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$u(x) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + \gamma \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{x}$$

Bestimme α und β:

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{4}, \quad 2\beta + \gamma = 1 \iff \gamma = \frac{1}{2}$$

Also:

$$u(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{x}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}$$

Nr. 47 Transformiere die DGL 2. Ordnung in Systeme erster Ordnung, löse sie und gebe das Phasenportrait an.

a) $u'' + 6u' + 9u = 0$

mit $v = u$ und $w = u'$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= -9v + 6w \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Bestimme Eigenwerte und -Vektoren von A:

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & -6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-6-\lambda)+9$$

$$= \lambda^2+6\lambda+9 \quad = (\lambda+3)^2$$

$\Rightarrow \lambda = -3$ ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2.

$(A+3E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \overset{\cdot 3}{\downarrow} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow 3x_1 + x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\text{z.B.}) \end{aligned}$$

geometrische Vielfachheit von λ 1, also bestimme Hauptvektor 2. Stufe:

$(A+3E)y = x$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & -3 \end{array}\right) \overset{\cdot 3}{\downarrow} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} &\Rightarrow 3y_1 + y_2 = 1 \\ &\text{wähle z.B. } y_1 = 1, \end{aligned}$$

dann $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Also ist $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \beta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) e^{-3t}$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -3\alpha-2\beta \end{pmatrix} + \beta t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] e^{-3t}$$

b) $u'' - 4u' + 13u = 0$

mit $v = u$ und $w = u'$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= -13v + 4w \end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Bestimme Eigenwerte und -vektoren von A:

$\det(A - \lambda E) = 0$: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -13 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 13$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 13 \implies \lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

A hat also die komplexen EWe $\lambda = 2+3i$ und $\mu = 2-3i$.

$(A - \lambda E)a = 0$: $\begin{pmatrix} -2-3i & 1 \\ -13 & 2-3i \end{pmatrix} \cdot (-2+3i)$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} -2-3i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies a_2 = (2+3i)a_1$

wähle also z.B. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix} = \binom{1}{2} + i\binom{0}{3}$

Der Eigenvektor zum Eigenwert $\mu = \overline{\lambda}$ ist $b := \overline{a}$,

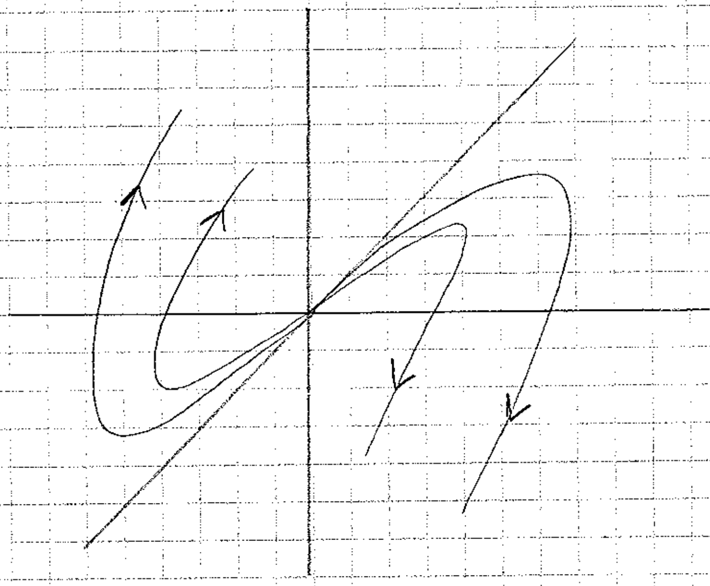
also $b = \binom{1}{2} - i\binom{0}{3}$

Damit ist $\binom{v}{w}$ von folgender Form $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

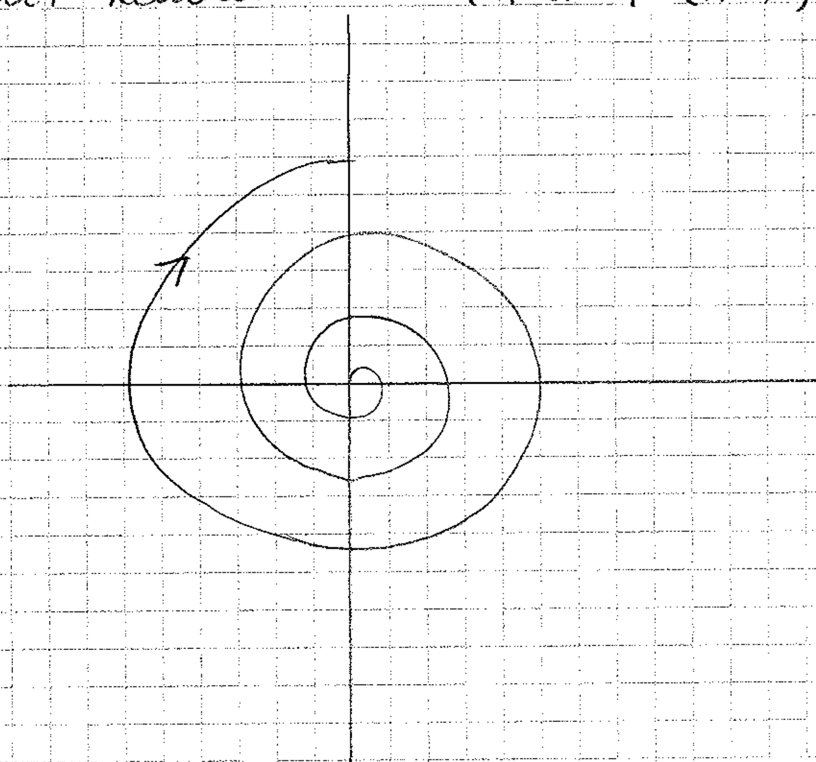
$$\binom{v}{w} = e^{2x}\left\{ (\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x))\binom{1}{2} + (\beta\cos(3x) - \alpha\sin(3x))\binom{0}{3} \right\}$$

Phasenportraits:

zu a) $\lambda = 3$ doppelter Eigenwert, Eigenraum eindimensional, $\lambda > 0$ (Fall III. (x))



zu b) λ, μ komplex konjugierte Eigenwerte mit Realteil > 0 (Fall IV. (xiv))



Nr. 48 Löse die DGLn

a) $x u' \cdot \ln(x) + u(x \cdot u - 1) = 0 \quad , x \in (1, \infty)$

$$\underset{\substack{x \neq 0 \\ 1 \neq x}}{\Longleftrightarrow} \quad u' - \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \cdot u = -\frac{1}{\ln(x)} \cdot u^2 \qquad (*)$$

Das ist eine Bernoulli-DGL wie in (8.1) mit $\alpha = 2$. Ansatz: $u(x) = (v(x))^{\beta}$ mit $\beta = \frac{1}{1-\alpha} = -1$

dann: $u'(x) = -(v(x))^{-2} \cdot v'(x)$

$$\Rightarrow (*) \Longleftrightarrow \quad -v^{-2} \cdot v' - \frac{1}{x \cdot \ln(x)} v^{-1} = -\frac{1}{\ln(x)} \cdot v^{-2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad v' + \frac{1}{x \cdot \ln(x)} v = \frac{1}{\ln(x)}$$

Diese DGL läßt sich mit Satz 6.7 lösen:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx \underset{\substack{\text{sub. } u = \ln(x) \\ u' = \frac{1}{x}}}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln|u| \underset{x \in (1,\infty)}{=} \ln(\ln(x))$$

$$\int \frac{1}{\ln(x)} \cdot \exp(\ln(\ln(x))) dx = \int 1 \, dx = x$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \exp(-\ln(\ln(x)))(x + C)$$

$$= \frac{x+C}{\ln(x)}$$

Also ist $\quad u(x) = (v(x))^{-1} = \dfrac{\ln(x)}{x+C}$

b) $v' = \sin(t) v + t^2 e^{-\cos(t)} \quad , v(0) = 1 \; , \; t \in (0, \infty)$.

Löse die DGL mit Satz 6.8:

$$v(x) = \exp\left(-\int_0^x \sin(t) dt\right) \left(\int_0^x t^2 e^{-\cos(t)} \exp\left(\int_0^t \sin(u) du\right) dt + 1 \right)$$

$$\int_0^x -\sin(t) dt = \cos(t) \Big|_0^x = \cos(x) - 1$$

$$\int_0^x t^2 e^{-\cos(t)} \exp(\cos(t)-1)\,dt = \int_0^x t^2 \cdot e^{-1}\,dt$$

$$= e^{-1} \cdot \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{1}{3}e^{-1}x^3$$

$$\Rightarrow v(x) = e^{1-\cos(x)} \cdot \left(\frac{1}{3}e^{-1}x^3 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 e^{-\cos(x)} + e^{1-\cos(x)}$$

$$v(0) = 0 + e^0 = 1$$

c) $(1+e^x)y \cdot y' = e^x$, $y(1) = -1$, $x \in (1, \infty)$

Bemerkung: Da $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, gilt $y(x) \neq 0\ \forall x \in (1,\infty)$, denn sonst kann die DGL nicht gelten.

Wegen $x \neq 0$ und $y(x) \neq 0\ \forall x$ gilt:

$$(1+e^x)y \cdot y' = e^x \Leftrightarrow y' = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \frac{1}{y}$$

Löse die DGL mit Satz 6.10:

$$\int_{-1}^{y} u\,du = \int_1^x \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{-1}^{y} = \int_{1+e}^{1+e^x} \frac{1}{w}\,dw \qquad \left(\text{sub. } \begin{array}{l} w = 1+e^t \\ w' = e^t \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = \ln(w)\Big|_{1+e}^{1+e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y^2-1) = \ln(1+e^x) - \ln(1+e)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right) \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right)+1}$$

$$\Rightarrow (\text{wegen } y(1) = -1) \quad y(x) = -\sqrt{2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right)+1}$$

(y definiert auf $[1,\infty)$).

d) $y' \sin(x) = y \cdot \ln(y)$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$$\underset{x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)}{\Longleftrightarrow} \quad y' = \frac{y \cdot \ln(y)}{\sin(x)}$$ Löse mit Satz 6.10.

$$\int_2^y \frac{1}{t \cdot \ln(t)} \, dt = \int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin(t)} \, dt$$ muss nach y aufgelöst werden.

$$\int_2^y \frac{1}{t \cdot \ln(t)} \, dt \underset{\substack{u = \ln(t) \\ u' = \frac{1}{t}}}{=} \int_{\ln(2)}^{\ln(y)} \frac{1}{u} \, du = \ln(u) \Big|_{\ln(2)}^{\ln(y)} = \ln(\ln(y)) - \ln(\ln 2)$$

$$\int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin(t)} \, dt = \int_{\pi/2}^x \frac{1 + \tan^2(\frac{t}{2})}{2 \tan(\frac{t}{2})} \, dt \underset{\substack{u = \tan(\frac{t}{2}) \\ u' = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{t}{2}))}}{=} \int_1^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{u} \, du = \ln(u) \Big|_1^{\tan(\frac{x}{2})}$$

$$= \ln(\tan(\tfrac{x}{2}))$$

Damit: $$\int_2^y \frac{1}{t \cdot \ln(t)} \, dt = \int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin(t)} \, dt$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)}\right) = \ln(\tan(\tfrac{x}{2}))$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(2)} = \tan(\tfrac{x}{2}) \Longleftrightarrow y = \exp(\ln(2) \cdot \tan(\tfrac{x}{2}))$$

$$\Longleftrightarrow y = 2^{\tan(\frac{x}{2})}$$

$$y(\tfrac{\pi}{2}) = 2^{\tan(\frac{\pi}{4})} = 2^1 = 2.$$

e) $xy' + y = \ln(x) \cdot y^2 \qquad y(1) = 1, \quad x \in (1, \infty)$

$$\underset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot y^2 \qquad (*)$$

Das ist eine Bernoulli-DGL mit $\alpha = 2$. (vgl. (8.1))

<u>Ansatz:</u> $\quad y(x) = [v(x)]^{-1}$

$$y'(x) = -(v(x))^{-2} \cdot v'(x)$$

dann: $(*) \Longleftrightarrow -v^{-2} \cdot v' + \frac{1}{x} \cdot v^{-1} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot v^{-2}$

$$\Longleftrightarrow \quad v' - \frac{1}{x} \cdot v = -\frac{\ln(x)}{x}$$

Anfangswert: $\quad y(1) = (v(1))^{-1} = 1$

$$\Longrightarrow \quad v(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Löse diese DGL mit Satz (6.8):

$$v(x) = \exp\left(-\int_1^x -\frac{1}{t}\,dt\right)\left(\int_1^x -\frac{\ln x}{x} \exp\left(\int_1^x -\frac{1}{t}\,dt\right) + 1\right)$$

$$\int_1^x -\frac{1}{t}\,dt = -\ln(t)\Big|_1^x = -\ln(x)$$

$$\int_1^x -\frac{\ln(t)}{t} \cdot \exp(-\ln(t))\,dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{-t^2}\,dt \qquad \left(\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\underset{\text{PI}}{=} \left[\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{x}(\ln(x) + 1) - 1$$

$$\Longrightarrow \quad v(x) = \exp(\ln(x))\left(\frac{1}{x}(\ln(x)+1) - 1 + 1\right)$$

$$= \underline{\ln(x) + 1}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = (v(x))^{-1} = \frac{1}{\ln(x)+1}$$