12. Übung B-Teil

Nr. 53 Löse die inhomogene DGL.

$$u'' - u = \frac{2e^x}{e^x - 1}, \quad x \neq 0$$

Berechne zunächst Lösungsmenge der homogenen DGL $u'' - u = 0$. Diese DGL hat konstante Koeffizienten, also bestimme char. Gleichung:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda^2 = 1 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

Damit bilden $u_1(x) = e^x$ und $u_2(x) = e^{-x}$ ein Fundamentalsystem der hom. Gleichung (vgl. A-Teil Nr. 56).

Wegen
$$W(x) = u_1(x) \cdot u_2'(x) - u_1'(x) \cdot u_2(x)$$
$$= -e^x \cdot e^{-x} - e^x \cdot e^{-x} = -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ist nach 9.6 eine partikuläre Lsg. der inhom. Gleichung

$$u_0(x) = u_1(x) \int -\frac{2e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{u_2(x)}{(-2)}\, dx + u_2(x) \int \frac{2e^x}{e^x - 1} \frac{u_1(x)}{(-2)}\, dx$$

$$-\int \frac{2e^x \cdot e^{-x}}{e^x - 1 \cdot (-2)}\, dx = \int \frac{1}{e^x - 1}\, dx = \int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x - 1}\, dx$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx - \int 1\, dx = \ln|e^x - 1| - x$$

$$\int -\frac{2e^x \cdot e^x}{2(e^x - 1)}\, dx = -\int \frac{e^{2x} - e^x + e^x}{e^x - 1}\, dx = -\int e^x\, dx - \int \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$$
$$= -e^x - \ln|e^x - 1|$$

$$\implies u_0(x) = e^x(\ln|e^x - 1| - x) + e^{-x}(-e^x - \ln|e^x - 1|)$$
$$= \ln|e^x - 1|(e^x - e^{-x}) - xe^x - 1$$

Damit gilt nach 9.5

$$u(x) = \ln|e^x - 1|(e^x - e^{-x}) - xe^x - 1 + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Nr. 54 Löse die folgende inhomogene DGL

$$u'' - u'\cos(t) + u\cdot\sin(t) = \sin(t) \quad , t \in \mathbb{R}$$

i) Zeige: $u_1(t) = e^{\sin(t)}$ ist Lösung der homogenen DGL.

$$u_1''(t) - u_1'(t)\cdot\cos(t) + u_1(t)\cdot\sin(t)$$
$$= (-\sin(t) + \cos^2(t))e^{\sin(t)} - \cos^2(t)e^{\sin(t)} + \sin(t)e^{\sin(t)}$$
$$= 0 \cdot e^{\sin(t)} = 0.$$

ii) nach 9.3 ist die Lösungsmenge der hom. DGL gegeben durch $u_h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_1(x)\int \frac{1}{u_1^2(x)} \exp(-\int -\cos(t)dt)dx$

Also bilden $u_1(x)$ und

$$u_2(x) := u_1(x)\int \frac{1}{u_1^2(x)} \exp(-\int -\cos(t)dt)\,dx$$
$$= e^{\sin(x)} \int e^{-2\sin(x)} e^{\sin(x)} dx = e^{\sin(x)} \int e^{-\sin(x)} dx$$

ein Fundamentalsystem der homogenen DGL.

iii) Es gilt: $W(x) = u_1(x)\cdot u_2'(x) - u_1'(x)\cdot u_2(x)$

$$= e^{\sin(x)}\left(\cos(x)e^{\sin(x)}\int e^{-\sin(x)}dx + e^{\sin(x)}\cdot e^{-\sin(x)}\right)$$
$$- \cos(x)e^{\sin(x)}\cdot e^{\sin(x)}\int e^{-\sin(x)}dx$$
$$= e^{\sin(x)}\cdot 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist nach 9.6 eine partikuläre Lsg. der inhom. DGL gegeben durch:

$$u_0(x) = u_1(x)\int \frac{-\sin(x)u_2(x)}{e^{\sin(x)}}dx + u_2(x)\int\frac{\sin(x)u_1(x)}{e^{\sin(x)}}dx$$

$$\int \frac{-\sin(x)e^{\sin(x)}\int e^{-\sin(x)}dx}{e^{\sin(x)}}dx = \int -\sin(x)\left(\int e^{-\sin(x)}dx\right)dx$$

$$\int\frac{\sin(x)e^{\sin(x)}}{e^{\sin(x)}}dx = \int \sin(x)dx = -\cos(x)$$

dh: $u_0(x) = -e^{\sin(x)}\int \sin(x)\left(\int e^{-\sin(x)}dx\right)dx - \cos(x)e^{\sin(x)}\int e^{-\sin(x)}dx$

Dann ist nach 9.5: $u(x) = u_0(x) + c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bel.

Nr. 55 Untersuche die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+4x-7}\,dx$. Wegen $\left|\frac{1}{x^2+4x-7}\right| = \frac{1}{x^2+4x-7} \leq \frac{1}{x^2}$ für $x \geq \frac{7}{4}$ und $\int^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$, da der Exponent -2 kleiner als -1 ist, ist

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2+4x-7}\,dx < \infty .$$

b) $\int_1^\infty \frac{x^3+3x\cos(x)-\sin(x)}{4x^4+2\ln(x)}\,dx$. Für $x \geq 3$ gilt:

$$x^3+3x\cos(x)-\sin(x) \geq x^3-3x-1 \geq 0 .$$

Dann: $\frac{x^3+3x\cos(x)-\sin(x)}{4x^4+2\ln(x)} \geq \frac{x^3-3x-1}{4x^4+2x^4} \geq \frac{\frac{1}{2}x^3}{6x^4}$ für $x \geq 3$.

Da $\int_1^\infty \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x}\,dx$ divergiert, divergiert auch

$$\int_1^\infty \frac{x^3+3x\cos(x)-\sin(x)}{4x^4+2\ln(x)}\,dx$$

c) $\int_1^\infty \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$. Sei $d>0$, dann gilt mit partieller Integration:

$$\int_1^d \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{\sin(3x)}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^d + \int_1^d \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin(3x)}{\sqrt{x}^3}\,dx$$

Wegen $\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{\sin(3x)}{\sqrt{x}^3}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$ und $-\frac{3}{2} < -1$ existiert $\lim_{d\to\infty} \frac{1}{6}\int_1^d \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x}^3}\,dx$.

Weiterhin: $\lim_{d\to\infty} \frac{1}{3}\frac{\sin(3x)}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^d = \frac{1}{3}\lim_{d\to\infty}\left(\sin(3d)\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = 0$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\cos(3x)}{\sqrt{x}}\,dx$ ist konvergent.

alternativ: benutze Lemma 10.7

d) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$. Betrachte zunächst nur $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$.

Wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ gilt für $x \ll 1$:

$$\frac{1}{2}x \leq \sin(x) \leq 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \leq \sqrt{\frac{2}{x}}.$$

$\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\left(\sqrt{2}\,2\sqrt{x}\,\Big|_a^{\pi/2}\right)$ ex. jedoch.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx < \infty.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}$ symmetrisch ist in $x = \frac{\pi}{2}$ (auf dem Intervall $(0,\pi)$) gilt: $\infty > 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$

e) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}\,dx$.

Wegen $\arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}\right| = \frac{\arctan(e^x)}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Da $\int_0^{d} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}\arctan(d) \xrightarrow[d\to\infty]{} \frac{\pi^2}{4} < \infty$, ist $\int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}\,dx$ konvergent.

f) $\int_1^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ gilt:

$$\frac{1}{2x} \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{x} \quad \text{für } x \text{ hinreichend groß}$$

Damit gilt: $\sin^2(\frac{1}{x}) \leq (\frac{2}{x})^2 = 4\frac{1}{x^2}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ist konvergent, wegen $-2 < -1$

$\Longrightarrow \int_1^\infty \sin^2(\frac{1}{x})\,dx$ ist konvergent.

g) $\int_0^\infty \frac{e^x}{x^2+e^x}\,dx$. Da e^x schneller wächst als jedes Polynom, gilt: $\frac{e^x}{x^2+e^x} \geq \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2}$ für x hinr. groß

Da $\int_0^\infty \frac{1}{2}\,dx$ divergent ist, ist auch $\int_0^\infty \frac{e^x}{x^2+e^x}$ divergent.

<u>Nr. 56</u> Untersuche für welche reellen Konstanten α, β die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren.

<u>Bem.:</u> $\int_1^\infty x^\alpha\,dx \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \\ \alpha \geq -1 \end{cases}$

a) $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx$. **Falls $\beta > 0$ genügt es den Fall $x \geq 1$ zu betrachten:**

Wegen $x^\beta \geq 1$ gilt: $\frac{1}{2}\frac{x^\alpha}{x^\beta} \leq \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \leq \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}x^{\alpha-\beta} \leq \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \leq x^{\alpha-\beta}$$

Also ist $x^{\alpha-\beta}$ eine integrierbare Majorante, falls $\alpha-\beta < -1 \Leftrightarrow \alpha < \beta - 1$ und eine divergente Minorante, falls $\alpha - \beta \geq -1 \Leftrightarrow \alpha \geq \beta - 1$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx \begin{cases} < \infty, & \text{falls } \alpha < \beta - 1,\ \beta > 0 \\ = \infty, & \text{falls } \alpha \geq \beta - 1,\ \beta > 0 \end{cases}$$

Falls $\beta < 0$:

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} = \frac{x^{-\beta}}{x^{-\beta}} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} = \frac{x^{\alpha-\beta}}{1+x^{-\beta}}$$

Da $(-\beta)>0$ folgt nun wie im ersten Teil:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\, dx = \begin{cases} < \infty & \text{falls } \alpha < -1,\ \beta < 0 \\ = \infty & \alpha \geq -1,\ \beta < 0 \end{cases}$$

b) $\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx$

• $\alpha > 0$. Dann ist $\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})$, Γ wie in A-Teil Nr. 5),

denn:

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\cdot(t^{1/\alpha})'\,dt$$

$$\underset{\substack{x = t^{1/\alpha} \\ \Rightarrow t = x^\alpha}}{=} \int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx$$

Damit $\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) < \infty$ für $\alpha > 0$.

• $\alpha \leq 0$. Dann ist $\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{x^{|\alpha|}}\right)dx$

für $x \geq 1$ gilt: $\frac{1}{x^{|\alpha|}} \leq 1$

$$\Longrightarrow\ -\frac{1}{x^{|\alpha|}} \geq -1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie} \\ \text{von } e^x}}{\Longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{x^{|\alpha|}}\right) \geq \frac{1}{e}.$$

Da $\int_0^\infty \frac{1}{e}\,dx$ divergent ist, ist auch $\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx$ divergent für $\alpha \leq 0$.

c) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}\,dx$.

__Bemerkung:__ Für x groß gilt: $\ln(x) \leq x^\alpha \quad \forall \alpha > 0$

__denn:__

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha} = 0, \text{ da } \alpha > 0.$$

$\Longrightarrow$ für x groß gilt $\ln(x) \leq x^\alpha \ \forall \alpha > 0$.

Beh.: Das Integral konvergiert für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta > 1$.

Bew.: • Sei $\alpha > 0, \beta > 1$. Wähle $0 < \varepsilon < \frac{\beta-1}{\alpha}$.

Dann existiert ein $k > 0$, so daß

$$\ln(x) < x^{\varepsilon} \quad \text{für } x > k.$$

$$\Longrightarrow \frac{(\ln(x))^{\alpha}}{x^{\beta}} \leq \frac{x^{\varepsilon\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\varepsilon\alpha - \beta}$$

Es gilt: $\varepsilon\alpha - \beta < \frac{\beta-1}{\alpha} \cdot \alpha - \beta = -1$

$\Longrightarrow$ Das Integral konvergiert.

• Sei $\alpha \leq 0, \beta > 1$. Dann gilt:

$$(\ln(x))^{\alpha} \leq 1 \quad \text{für } x \geq e$$

$\Longrightarrow$ Das Integral konvergiert.

Beh.: Das Integral ist divergent für $\beta \leq 1$.

Bew.: Es gilt: $\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$ für $x \geq 0$

$$\Longrightarrow \frac{(\ln(x))^{\alpha}}{x^{\beta}} = \frac{(\ln((x-1)+1))^{\alpha}}{x^{\beta}} \geq \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\beta}}$$

$$= \frac{(x-1)^{\alpha}}{x^{\alpha+\beta}} \geq \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}}{x^{\alpha+\beta}} \quad \text{für } x \geq 2$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha}} \cdot \frac{1}{x^{\beta}}$$

Wegen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\beta}}\,dx$ divergent für $\beta \leq 1$ folgt die Beh.