2. Übung

Teil A

Aufgabe A4: Seien A, C zwei ähnliche (n,n)-Matrizen, d.h. $\exists B$, invertierbar, so daß

$$B^{-1} A B = C \quad \Leftrightarrow \quad A = B C B^{-1}$$

Wir müßen zeigen: λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert von C.

Sei λ Eigenwert von A zum Eigenvektor $v \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad A v = \lambda v$

$\Leftrightarrow \quad B C B^{-1} v = \lambda v$

$\Leftrightarrow \quad C \underbrace{B^{-1} v}_{=w} = \lambda \underbrace{B^{-1} v}_{=:w}$

$\Leftrightarrow \quad C w = \lambda w$, $\quad w \neq 0$, da B invertierbar und $v \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda$ ist Eigenwert von C zum Eigenvektor $w \neq 0$

Aufgabe A5:

Zunächst bestimmen wir C.

1. Schritt: Bestimme die Bilder der Basisvektoren

$$L(w_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$L(w_2) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$L(w_3) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1 - v_3$$

Koordinatenvektoren bzgl. $\mathfrak{B}$

2. Schritt: Stelle die Bildvektoren bzgl. $\mathcal{Z}$ dar:

$$(v_1)_{\mathcal{Z}} = (w_2 - w_3)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(v_2)_{\mathcal{Z}} = (w_1 - w_2)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-v_1 - v_3)_{\mathcal{Z}} = (-w_2)_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Basiswechselmatrix B bestimmen wir wie folgt.
B ist die Matrix, deren Spalten gerade die **Koordinaten** der "neuen" Basis $\mathcal{Z}$ sind.

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B ist invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind.

(Satz 5.8) $\Rightarrow \quad C = B^{-1} A B$

Aufgabe A6

1 Schritt: Bestimme die Eigenwerte von A.

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\lambda^2 - 1 + \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2-1)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ ist Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit 2

$\lambda_2 = -1$ ist Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit 1

2. Schritt Bestimme die Eigenräume zu λ_1 und λ_2:

zu λ_1: $(A-\lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_3 \wedge x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$

$\Rightarrow E(\lambda_1) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow \dim E(\lambda_1) = 1 =$ geometrische Vielfachheit

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit < algebraische Vielfachheit

zu λ_2: $(A-\lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 + x_3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 = -x_2 = x_3$

$\Leftrightarrow \mathbf{x_1 = -x_2 = x_3}$

$\Rightarrow E(\lambda_2) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

3. Schritt: Bestimme die Hauptvektoren: D.h. zu $k \in \mathbb{N}$ suche Vektoren b mit $(A-\lambda I)^k b = 0$ und $(A-\lambda I)^{k-1} b \neq 0$.

zu λ_1: Sei $k=2$:

$$(A-\lambda_1 I)^2 x = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 - x_3$

Alle Zeilen sind linear abhängig!

$\Rightarrow$ Wir können zwei Unbekannte frei wählen, z.B. $x_2 = s$, $x_3 = t$

$\Rightarrow \text{Kern}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Suche nun b in $\text{Kern}((A-\lambda_1 I)^2) \setminus \text{Kern}(A-\lambda_1 I)$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Kern}((A-\lambda_1 I)) = E(\lambda_1) \Rightarrow (A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

und $(A-\lambda_1 I)^2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\rightsquigarrow$ Wähle $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Hauptvektor 2. Stufe

Dieses Verfahren wiederholen wir i. Allg. für $k=3,4,\ldots$ bis wir einen Hauptvektor höchster Stufe gefunden haben, d.h. einen Vektor b, so daß $(A-\lambda I)x=b$ keine Lösung hat.

Ist $b=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ bereits Hauptvektor höchster Stufe?

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{matrix}x_2-x_3=-1\\x_1-x_2=0\\x_2-x_3=1\end{matrix} \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ist Hauptvektor höchster Stufe.

<u>4. Schritt:</u> Bilde die Kette von Hauptvektoren und die Transformationsmatrix B:

$$(A-\lambda I)\,b_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=:b_1$$

$$(A-\lambda I)\,b_1=0$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}|&|&|\\b_1&b_2&v\\|&|&|\end{pmatrix} \quad \text{für ein } v\in E(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow B^{-1}AB=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right)$$

Eine äquivalente Wahl von B wäre: $\tilde{B}=\begin{pmatrix}|&|&|\\v&b_1&b_2\\|&|&|\end{pmatrix}$

Diese Wahl führt zu der Jordan Normalform $\tilde{B}^{-1}A\tilde{B}=\left(\begin{array}{c|cc}-1&0&0\\\hline 0&1&1\\0&0&1\end{array}\right).$

Aufgabe A7

- Für $x<1$ gilt $f(x)=x^n$

  Also ist f für $x<1$ differenzierbar (da Polynom)

- Für $x>1$ gilt $f(x)=ax+b$

  Also ist für $x>1$ differenzierbar (da Polynom)

- Untersuche f im Punkt $x_0=1$:

<u>Stetigkeit:</u> $\lim_{x\nearrow 1} f(x)=\lim_{x\nearrow 1} x^n=1$

$\lim_{x\searrow 1} f(x)=\lim_{x\searrow 1}(ax+b)=a+b$

$\Rightarrow f$ ist stetig in $x_0=1 \iff 1=a+b \quad (*)$

<u>Differenzierbarkeit:</u>

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\begin{cases}\dfrac{(1+h)^n-1}{h} & \\ & \text{für} \\ \dfrac{a(1+h)+b-1}{h} & \end{cases}\begin{matrix}h\le 0\\ \\ h>0\end{matrix}$$

Für $h\le 0$: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^i 1^{n-i}-1\right)$

$$=\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}h^i=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}h^{i-1}$$

$$\Rightarrow f'_-(1)=\lim_{h\nearrow 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\binom{n}{1}=n$$

Für $h>0$: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{a+b-1}{h}+a\overset{(*)}{=}a$

. Da $a+b=1$ folgt:

$$f_+'(1) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = a$$

Weiter gilt: f ist differenzierbar im Punkt $x_0 = 1$

$\iff$ $f_+'(1)$ und $f_-'(1)$ existieren und es gilt $f_+'(1) = f_-'(1)$

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar in $x_0 = 1$

$\iff$ $a+b=1 \quad \wedge \quad a = f_+'(1) = f_-'(1) = n$

$\iff$ $a = n \quad \wedge \quad b = 1-n$

Aufgabe A8

Betrachte
$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)\,(x-x_0)}$$

$$= \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)\,(x-x_0)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\xrightarrow{x \to x_0} \frac{1}{g(x_0)}} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}}_{\xrightarrow{x \to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}} \underbrace{\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} -g'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Aufgabe A9

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} g(h) = g(0)$$

2. Übung B-Teil

B5 A sei invertierbare $(n \times n)$-Matrix, λ sei ein Eigenwert von A. Zeige: $\frac{1}{\lambda}$ ist EW von A^{-1}.

dazu: Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dh es gilt:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$
$$\Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot v = A^{-1} \cdot \lambda \cdot v$$
$$\Rightarrow \quad v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} \cdot v = A^{-1} \cdot v$$

Also ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.
(Insbesondere ist v Eigenvektor von A^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$).

B6 $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ Basis von $\mathbb{R}^3$

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$L(v_1) = 2v_1 + 2v_2$, $L(v_2) = v_1 + v_2 - v_3$, $L(v_3) = -v_2 + 2v_3$

Die Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ des $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Koordinatenvektoren $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ und $(1,0,0)$ bezüglich $\mathcal{B}$.

i) Berechne die Matrix der lin. Abb. L bzgl. $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =: A$$

Dh. bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ gilt: $L(x) = A \cdot x$.

ii) Berechne die Matrix C der lin. Abb. L bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$, sowie die Basiswechselmatrix B mit $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

(Idee: benutze Satz 5.8)

Es gilt: $w_1 = v_1 - v_3$, $w_2 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_1$

damit: $L(w_1) = L(v_1) - L(v_3) = 2v_1 + 2v_2 + \cancel{v_3}^{v_2} - 2v_3$

Linearität

$= 3w_2 + 5w_1 - 3w_3$

$L(w_2) = L(v_2) + L(v_3) = v_1 + v_2 - v_3 - v_2 + 2v_3 = v_1 + v_3$

$= -w_1 + 2w_3$

$L(w_3) = L(v_1) = 2v_1 + 2v_2 = 2w_2 + 2w_1$

Also:

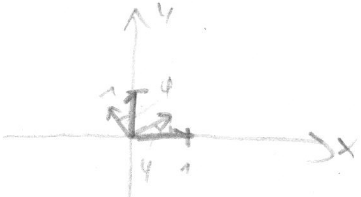
$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

In der j-ten Spalte der Basiswechselmatrix zwischen den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ stehen die Koordinaten des j-ten Basisvektors aus $\mathcal{B}'$ bzgl. $\mathcal{B}$.

Also:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

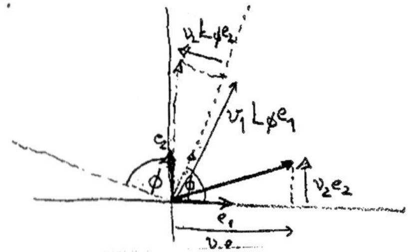
Dann gilt: $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$.



Aufgabe B7

(i) Offenbar wird $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$ abgebildet, demnach ist $A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.

(ii) Aufgrund der Linearität dreht L_ϕ den e_1- und e_2-Anteil von v jeweils um den Winkel ϕ, natürlich auch v selbst.



Mathematisch präziser:
Zu jedem $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ gibt es $\rho = \rho(v) > 0$ und $\alpha = \alpha(v) \in [0, 2\pi)$ mit
$v = \rho e^{i\alpha} = \rho \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \rho L_\alpha(e_1) = L_\alpha(\rho e_1)$.
Wende nun (ii) an.

(iii) $\det A_\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$

Skalarprodukt der Spalten ist

Wegen $|A_\phi e_1| = |A_\phi e_2| = 1$ und $\langle A_\phi e_1, A_\phi e_2 \rangle = 0$ ist A_ϕ für alle $\phi \in \mathbb{R}$ orthogonal.

A_ϕ ist symmetrisch $\iff \sin\phi = -\sin\phi \iff \sin\phi = 0$
$\iff \phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

In diesem Fall ist $A_{k\pi} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iv) $$A_\phi A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Satz 7.9}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{pmatrix} = A_{\phi+\psi}.$$

Aus $\psi := -\phi$ ergibt sich $A_\phi A_{-\phi} = A_0 = Id$,
also $A_\phi^{-1} = A_{-\phi}$.

(v) $B = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det B = -1$ wichtig

B ist orthogonal und symmetrisch mit $B^2 = Id$,
also $B^{-1} = B^T = B$.

B8

i) Bestimme links- und rechtsseitige Abl. von $f(x) := |x|$ in $x_0 = 0$.

nach Def. 1.5:

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x}{x} = -1$$

ii) Ist $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = |x|^3$ in $x_0 = 0$ diff'bar?

zu zeigen: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

allg., $x \in \mathbb{R}$

Zeige: Links- und Rechtsseitiger Grenzwert existieren.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{(-x)^3}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x^2) = 0$

links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und sind gleich !

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, also ist f in $x_0 = 0$ diff'bar mit $f'(0) = 0$.

B9

$f_i : (a,b) \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$, $x_0 \in (a,b)$, diff'bar in x_0

zu zeigen: $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$ ist in x_0 diff'bar mit $f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(x_0) \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} f_j(x_0)\right)$

Beweis per Induktion nach n: Produktregel

(IA) $n = 1$ ✓

$n = 2$: $f = f_1 \cdot f_2$, dann gilt nach Produktregel (Z.2)
f ist in x_0 diff'bar und es gilt:

$$f'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_2'(x_0) \cdot f_1(x_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \left(f_i'(x_0) \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2} f_j(x_0)\right)$$

(IV) Gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$.

$n \to n+1$: $f = \prod_{i=1}^{n+1} f_i = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)}_{\text{diff'bar in } x_0 \text{ nach (IV)}} \cdot f_{n+1}$ ist nach Produktregel diff'bar in x_0.

$$f'(x_0) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x_0) \cdot f_{n+1}(x_0)\right)'$$
$$\overset{(Z.2)}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x_0)\right)' \cdot f_{n+1}(x_0) + \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x_0)\right) \cdot f_{n+1}'(x_0)$$

$$\underset{(IV)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(f_i'(x_0)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x_0)\right)\cdot f_{n+1}(x_0) + \prod_{j=1}^{n} f_j(x_0)\cdot f_{n+1}'(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\left(f_i'(x_0)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} f_j(x_0)\right)$$

Damit gilt die Behauptung nach dem Induktionsprinzip.

Zeige: Gilt außerdem $f_i(x_0)\neq 0$ für $i=1,\dots,n$, dann gilt: $\left(\frac{f'}{f}\right)(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'(x_0)}{f_i(x_0)}$

Beweis:

$$\left(\frac{f'}{f}\right)(x_0) \underset{s.o.}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i'(x_0)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x_0)\right)}{\prod_{i=1}^{n} f_i(x)}$$ ← in jeden Summanden reinziehen

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)\left(\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x_0)}{\prod_{j=1}^{n} f_j(x)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'(x_0)}{f_i(x_0)}$$ ein Faktor bleibt übrig

□

Aufgabe B10

(i) A orthogonal $\overset{(6.4)}{\iff} A^TA = Id = 1$ S. 143

$\Rightarrow 1 = \det Id = \det(A^TA) \overset{S.147}{=} \underbrace{\det A^T}_{=\det A}\det A$

$\Rightarrow (\det A)^2 = 1$

$\Rightarrow \det A \in \{1,-1\}$ ⟶ falsch

(ii) Die Behauptung ergibt sich aus der Jordan-Normalform, da ähnliche (*) Matrizen (Def. 5.7) dieselbe Determinante haben und die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix dem Produkt der Diagonaleinträge entspricht. ⟶ wahr

(iii) Die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2\sin\frac{1}{x},\ 0\mapsto 0$, besitzt auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Ableitung $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}$. Weiterhin ist $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(h)-f(0)) = 0$. Die Ableitung f' ist unstetig in $x=0$. ⟶ wahr

(iv) $f(x) = 2^x = e^{x\log 2} \Rightarrow f'(x) = (\log 2)e^{x\log 2} = 2^x\log 2$

⟶ falsch

(v) Nach Definition muss die Ableitung stetig sein.

⟶ falsch

(*) ähnlich:

$C = B^{-1}AB \Rightarrow C, A$ ähnlich