Gamma
Γ - Funktion, $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

a) zunächst: $\Gamma(x)$ konvergiert nach Vergleichskriterium

(i) $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ existiert $\forall\ x > 0$

Betrachte zunächst $f(t) := e^{-t} t^{x-1}$ und wähle $g(t) := \frac{1}{t^2}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} t^{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ M > 0 \text{ mit } \underbrace{f(t)}_{e^{-t}t^{x-1}} \le \underbrace{M\ g(t)}_{\frac{M}{t^2}} \ \forall\ t \ge 1$$

Nach Vorlesung (Bem. (10.3), S. 97) gilt:

$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ konvergiert, also

$$0 = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \le M \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} < \infty$$

Nach Vgl.-Krit. konvergiert $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

(2)

(ii) Zu $x>0$ wähle $\alpha = \alpha(x) \in (0,1)$ mit $x+\alpha-1>0$.

Dann ist

$$\lim_{t\to 0} \underbrace{e^{-t}}_{\to 1} \underbrace{t^{x+\alpha-1}}_{\to 0} = 0$$

$$\Rightarrow \exists M>0: \quad 0 \le e^{-t} t^{x+\alpha-1} \le M$$

$$\rightarrow \qquad 0 \le e^{-t} t^{x-1} \le \frac{M}{t^\alpha}$$

Nach Vorlesung (S. 97) existiert

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \alpha \in (0,1)$$

also wie oben $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

Insgesamt existiert $\Gamma(x) = \int_0^1 \dots + \int_1^\infty \dots$ für alle $x \in (0,\infty)$

(iii) Zeige nach $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x>0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{v'} \underbrace{t^x}_{u} dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= t^x \\ u'(t) &= x t^{x-1} \\ v'(t) &= e^{-t} \\ v(t) &= -e^{-t} \end{aligned}}$$

$$= \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{t} t^{x-1} dt$$

$$= e^0 \cdot 0^x + x\,\Gamma(x)$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$

Beweis (mit vollst. Induktion)

IA: $(n=1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^0 \, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = -(-1) \cancel{= 1!}$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) \overset{(iii)}{=} 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \checkmark$$

IS:

Induktionsvorraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\Gamma(n+1) = n!$

" behauptung: $\Gamma(n+2) = (n+1)!$

$$\Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) \overset{(iii)}{=} (n+1)\,\Gamma(n+1) \overset{(IV)}{=} (n+1)\,n! = (n+1)!$$

c) $\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1} dt$ (4)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \boxed{\begin{aligned} u &= e^{-t} \\ \frac{du}{dt} &= -e^{-t} \end{aligned}}$$

$$= -\int_1^0 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} du$$

$$= \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} du$$

A5 a) $\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\sin(x^2) + x^3}}}$

Für $x \to \infty$ ist $\frac{1}{\sqrt{\sin(x^2)+x^3}}$

$\approx \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$

(„unproblematisch")

Für $x \approx 0$ ist $\sin(x^2) + x^3 \approx x^2 + x^3$

$\approx x^2$

$$\to \frac{1}{\sqrt{\sin(x^2) + x^3}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

(nicht integrierbar)

Aus $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ folgt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$

folglich ist für hinreichend kleine x

$$\frac{1}{2}x^2 \leq \sin(x^2) \leq 2x^2$$

Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\sin(x^2) + x^3}} \geq \underbrace{\int_0^\varepsilon \dots}_{=: I} + \underbrace{\int_\varepsilon^\infty \underbrace{\dots}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

Richtung ist wichtig

Für $0 < x < \varepsilon < 1$ gilt

$$0 < 2x^2 + x^3 < 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

und

$$I \geq \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x^3}} \geq \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{3x^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{x}}_{\text{divergent (S. 97)}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\sin(x^2) + x^3}} \text{ divergiert}$$

---

b) $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Für $x \to \infty$ ist $y := \frac{1}{x} \to 0$

$\to \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(y) \approx y = \frac{1}{x}$ (nicht integrierbar)

Aus Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \cancel{0}\ 1$

folgt $\lim_{y \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = 1$, also für hinreichend große x

$$\frac{1}{2x} \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$$

Nun ist für hinreichend große $N > 1$

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \geq \underbrace{\int_1^N \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx}_{< \infty} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_N^\infty \frac{dx}{x}}_{\text{divergiert}}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad \text{divergiert}$$

---

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\, dx$ Falls $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\, dx$ konvergiert, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\, dx = 2 \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

$$\cancel{x \to \infty \Rightarrow y := \frac{1}{x} \to 0}$$

$$\cancel{\sin(x^2) = \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \approx \frac{1}{y^2} =}$$

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\, dx \underset{\substack{y = x^2 \\ \frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y}}}{=} \int_1^\infty \sin(y) \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

Lemma 10.7 $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt \quad \text{beschränkt } \forall x \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\, x^{-\alpha}\, dx < \infty \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

hier: $f(x) = \sin(x)$, $\alpha = \frac{1}{2}$ 7

$$F(x) = \int_1^x \sin(t)\,dt = \Big[-\cos(t)\Big]_1^x$$

$$= -\cos(x) - (-\cos(1)) \quad \in [-2, 2]$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f(t)\, t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \int_1^\infty \sin(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{konvergiert}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)\,dx = 2\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

$$\cancel{= 2\cdot\frac{1}{2}\int \sin(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{konvergiert}}$$

$$= 2\underbrace{\int_0^1 \sin(x^2)\,dx}_{\in[0,1]} + \underbrace{\overset{?!}{(2)}\int_1^\infty \sin(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t}}}_{\text{konvergiert}}$$

d) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$

(8)

$x \to \infty : \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} \approx x^{-\frac{4}{3}}$ (integrierbar)

$x \to 1 : x^4 - 1 = \underbrace{(x^2+1)}_{\to 2}\underbrace{(x+1)}_{\to 2}\underbrace{(x-1)}_{\to 0}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} \approx \frac{c}{\sqrt[3]{x-1}}$ (integrierbar)

Für $x \geq 2$ gilt $x^4 \geq 16$

$\Rightarrow x^4 - 1 \geq \frac{15}{16} x^4 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{15}{16} x^4}}$

$= c \cdot x^{-\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}} \leq c \cdot \int_2^\infty x^{-\frac{4}{3}} dx < \infty$

Für $x \in [1,2]$ gilt $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{\underbrace{(x^2+1)}_{\geq 1}\underbrace{(x+1)}_{\geq 1}(x-1)}}$

$\leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_1^2 < \infty$

$\Rightarrow$ Konvergenz des gesamten Integrals

e) $\int_1^\infty \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) dx$ 9

$x \to \infty \Rightarrow y := \frac{1}{x-1} \to 0$

$\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) \underset{x = \frac{1}{y}+1}{=} \sqrt{1+\frac{1}{y}} \sin(y^3)$

$\approx \sqrt{\cancel{1+}\frac{1}{y}}\, y^3 = y^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{5}{2}} \approx x^{-\frac{5}{2}}$

integrierbar

$\sin(y) \leq y$ für $y \geq 0$ ist

$\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) \leq \sqrt{x} \cdot \frac{1}{(x-1)^3}$

Für $x \geq 5$ ist $(x-1)^3 \geq \frac{1}{2} x^3$

$\Rightarrow \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) \leq \sqrt{x} \cdot \frac{2}{x^3} = 2x^{-\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \int_1^\infty \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) dx = \int_1^5 \underbrace{\sqrt{x}}_{\leq\sqrt{5}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)}_{\leq 1} dx + \underbrace{2\int_5^\infty x^{-\frac{5}{2}} dx}_{\text{konvergiert}}$

f) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1}}{\log(x)}\, dx$ 10

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1}}{\log(x)} = \frac{1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1}{\log(x) \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$x \to \infty \quad \approx \quad \frac{2}{\log(x) \cdot x}$$

$$= 2 \cdot \int_2^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \log(x)}$$

$$\geq 2 \int_2^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{2x^2} + \sqrt{x^2}\right) \log(x)}$$

$$= c \int_2^\infty \frac{dx}{x \cdot \log(x)} = c \int_{\log(2)}^\infty \frac{dy}{y}$$

$y = \log(x)$

divergiert

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3}, \quad \int_{1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} \text{ konvergiert nicht}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} \right) \text{ konv.}$$

$$\int_{-1}^{b} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[-\frac{1}{2}(x-1)^{-2} \right]_{-1}^{b}$$

$$= -\frac{1}{2}(b-1)^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$\longrightarrow -\infty \text{ für } b \nearrow 1$$

$$\int_{a}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[-\frac{1}{2}(x-1)^{-2} \right]_{a}^{5}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2}(a-1)^{-2} \longrightarrow \infty \text{ für } a \searrow 1$$

Aber $\int_{-1}^{1-\varepsilon} \cdots + \int_{1+\varepsilon}^{5} \cdots = -\frac{1}{2}(1-\varepsilon-1)^{-2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon-1)^{-2}$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon^{-2} + \frac{3}{32} + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2} = \frac{3}{32}$$