Lin. gew. DGL 2. Ordnung

1

HöMa 2 ÜB 11 01.07.09
A-Teil

$u'' + a u' + b u = f$

Lösungsstrategie

1) Best. Lsg. der homogenen Gleichung $(f \equiv 0)$

Fall a) Konst. Koeffizienten $(a, b \in \mathbb{R})$

(Verfahren üben!)

→ Aufg. A52 Ansatz $e^{\lambda x} = u(x)$

→ charakt. Gleichung

(Satz 9.2)

Fall b) Suche eine (spezielle) homogene Lsg $(\neq 0)$ und erhalte nach Satz 9.3 die Lösungsgesamtheit

2) Aus Satz 9.6 eine Partikular Lsg. → Wronski-Determinante $W(x)$

3) Lsg. gesamtheit inhomogene Gleichung

= – " – homogener Fall + Partikulär Lsg. (inhomogener Fall)

A54 → gew. lin. DGL 2. O. mit konst. Koeffizienten

$$u'' + u = \frac{1}{\sin(x)} \qquad x \in (0, \pi)$$

$$u'' + a u' + b u = f \qquad a = 0 \qquad b = 1 \qquad f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

1) Löse hom. DGL $u'' + u = 0$

→ char. Gl. $\lambda^2 + 1 = 0$ → $\lambda = \pm i$

reelles Fundamentalsystem $\underbrace{\mathrm{Re}\{e^{ix}\}}_{\cos(x)}, \underbrace{\mathrm{Im}(e^{ix})}_{\sin(x)}$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \qquad =: u_1(x) \qquad =: u_2(x)$$

$\Rightarrow$ jede Lsg. der hom. Gl. ist von der Form

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) Wronski - Def.

$$W(x) = u_1(x)\, u_2'(x) - u_2(x)\, u_1'(x)$$
$$= \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0$$

Part. Lsg. (Satz 9.6)

$$u_0(x) = u_1(x) \int^x \frac{-f(\xi)\, u_2(\xi)}{W(\xi)}\, d\xi + u_2(x) \int^x \frac{+f(\xi)\, u_1(\xi)}{W(\xi)}$$

$$= \cos(x) \int^x \frac{\sin(\xi)}{-\sin(\xi)}\, d\xi + \sin(x) \int^x \underbrace{\frac{\cos \xi}{\sin \xi}}_{= (\log(\sin(x)))'}\, d\xi$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \log(\sin(x))$$

3) Allg. Lsg.

$$u(x) = \underline{\underline{c_1}}\, u_1(x) + \underline{\underline{c_2}}\, u_2(x) + u_0(x)$$

$$= c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \sin(x) \log(\sin(x)) - x \cos(x)$$

A58 $\quad u' = f\left(\frac{u}{x}\right) \quad (8.14)$ $\quad$ (3)

Ansatz $v(x) := \frac{u(x)}{x} \quad \to \quad v'(x) = \frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2}$

$$= \frac{1}{x} \cdot \underbrace{f(v)}_{= u'} - \frac{v}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\left(f(v) - v\right) \qquad (8.15)$$

Seperation der Variablen ($f(v) \neq v$)

$$\frac{v'(x)}{f(v) - v} = \frac{1}{x} \quad \Big| \int dx$$

$$\int \frac{v'(x)}{f(v(x)) - v(x)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overset{y = v(x)}{=} \int \frac{dy}{f(y) - y} = \log(x) + C$$

In unserem Fall:

$$x^3 + u^3 - 3xu^2 = 0$$

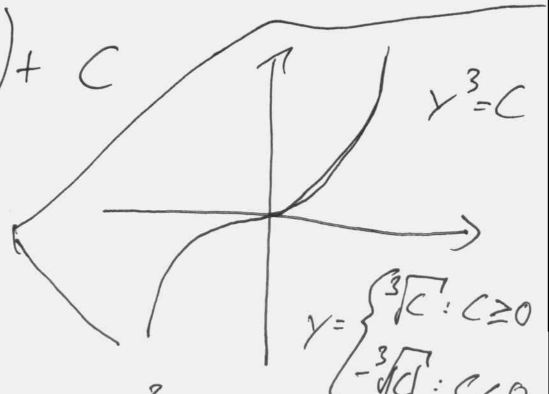
$$\Rightarrow u' = \frac{x^3 + u^3}{3x u^2} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{x^2}{u^2}\right) + \frac{u}{x}\right)$$

$$= f\left(\frac{u}{x}\right) \text{ mit } f(y) := \frac{1}{3}\left(y^{-2} + y\right)$$

Zunächst $\int \frac{dy}{f(y) - y}$

$$= 3 \int \frac{dy}{y^{-2} - 2y} = \frac{3}{-6} \int \frac{(-6)y^2}{1 - 2y^3}\, dy$$

$$= -\frac{1}{2} \log\left|1 - 2y^3\right| + C = \log\left(\frac{1}{\sqrt{|1 - 2y^3|}}\right) + C$$



Verketten mit der Exponential Fkt.

$$\to a|x| = \frac{1}{\sqrt{|1 - 2y^3|}}, \quad a > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 x^2} = \left|1 - 2y^3\right| \quad \Rightarrow \quad \pm \frac{1}{a^2 x^2} = 1 - 2y^3$$

$$\Rightarrow 2y^3 = 1 \pm \frac{1}{a^2 x^2} \quad \Rightarrow \quad y^3 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{a^2 x^2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{a^2 x^2}\right)} \quad ; \sqrt[3]{-a} := -\sqrt[3]{a} \quad \forall a \geq 0$$

Wegen $y(x) = v(x) = \frac{u(x)}{x}$ erhalten wir mit

$$\mu := \pm \frac{1}{2a^2} \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{u(x) = x \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\mu}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} x^3 + \mu x} \quad , \mu \in \mathbb{R}}$$

mit obiger Konvention für negative Radianten

Der Fall $\mu = 0$ entspricht dem Sonderfall $f(v) = v$.

Allg. ist $f(v) = v \Rightarrow v' = 0 \Rightarrow v \equiv \text{const.}$

$$\Rightarrow u(x) = x \cdot C$$

Rechne zur Probe nach

$$x^3 + u^3(x) - 3x\, u^2(x)\, u'(x)$$

$$= x^3 + u^3(x) - x \frac{d}{dx} u^3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \mu x - x\left(\frac{3}{2}x^2 + \mu\right)$$

$$= x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \mu x - \frac{3}{2}x^3 - \mu x = 0$$

A56 a)

$$\int_0^1 \frac{x}{4x^2+8x+13}\,dx$$

Nenner $4x^2+8x+13$
$= 4\underbrace{\left(x^2+2x+\frac{13}{4}\right)}_{\text{Diskriminante } < 0}$

$\rightarrow$ über $\mathbb{R}$ keine Faktorisierung in Linearfaktoren möglich

$$\int_0^1 \frac{x}{4x^2+8x+13}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{8x+8}{4x^2+8x+13} - \int_0^1 \frac{1}{4x^2+8x+13}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\log|4x^2+8x+13|\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+\frac{13}{4}}}$$

Subst. $v = \frac{2}{3}(x+1)$

$= (x+1)^2 - 1 + \frac{13}{4}$
$= (x+1)^2 + \frac{9}{4}$
$\overset{!}{=} \frac{9}{4}v^2 + \frac{9}{4}$

$$= \frac{1}{8}\left(\log(25) - \log(13)\right) - \frac{1}{4}\int_{2/3}^{4/3} \frac{dv}{\frac{9}{4}(v^2+1)} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\arctan' v = \frac{1}{1+v^2}}$$

$$= \frac{2}{8}\log(5) - \frac{1}{8}\log(13) - \frac{1}{6}\left[\arctan\frac{4}{9} - \arctan\frac{2}{3}\right]$$

A56 b) $\int_0^1 \frac{3x^2+x}{x^4+x^2+1}\,dx$ (6)

Faktorisiere zunächst den Nenner

Ansatz $x^4+x^2+1 \overset{!}{=} (x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$

$$= x^4 + \underbrace{(a+b)}_{=0}x^3 + \underbrace{(2+ab)}_{\overset{!}{=}1}x^2 + \underbrace{(a+b)}_{=0}x + 1$$

$b=-a$

$\underbrace{ab}_{-a^2}=-1$ $\quad \xrightarrow{\text{z.B.}} \quad a=1, \; b=-1$

Nun Partialbruchzerlegung

$$\frac{3x^2+x}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\xrightarrow{\cdot(x^4+x^2+1)} \quad 3x^2+x = (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-x+1)$$

$$= \underbrace{(A+C)}_{=0}x^3 + \overbrace{(A+B-C+D)}^{=3}x^2 + \underbrace{(A+B+C-D)}_{=1}x + \underbrace{(B+D)}_{=0}$$

$\Rightarrow C=-A \qquad 3 = A+B-C+D = 2A \Rightarrow A=\frac{3}{2}=-C$

$D=-B \qquad 1 = A+B+C-D = 2B \Rightarrow B=\frac{1}{2}=-D$

$$= \int_0^1 \frac{3x^2+x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3x+1}{x^2-x+1} - \frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)dx \quad (*)$$

(7)

Wir berechnen ($x^2 \pm x + 1$ über $\mathbb{R}$ nicht faktorisierbar)

$$\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2 \pm x + 1}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x \pm 1}{x^2 \pm x + 1}\,dx + \left(\mp\frac{3}{2}+1\right)\int_0^1 \frac{dx}{x^2 \pm x + 1}$$

$$= \frac{3}{2}\Big[\log|x^2 \pm x + 1|\Big]_0^1 + \left(\mp\frac{3}{2}+1\right)\int_0^1 \frac{dx}{\underbrace{\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2}_{=\frac{3}{4}v^2} \underbrace{- \frac{1}{4} + 1}_{+\frac{3}{4}}}$$

Subst. $v = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x \pm \frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{3}{2}\Big(\log(2 \pm 1) - \underbrace{\log(1)}_{=0}\Big) + \left(\mp\frac{3}{2}+1\right)\sqrt{\frac{3}{4}}\int_{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right)} \underbrace{\frac{dv}{v^2+1}}_{=\arctan' v} \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \frac{3}{2}\log(2 \pm 1) + \frac{2 \mp 3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\Big[\arctan v\Big]_{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\log(2 \pm 1) + \frac{2 \mp 3}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{3x^2+x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{3}{2}\underbrace{\log(2-1)}_{=0} + \frac{5}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$- \frac{3}{2}\log(3) - \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{3}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{3}{2}\log 3 + \frac{5}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\underbrace{\arctan\sqrt{3}}_{=\frac{\pi}{3}} - \underbrace{\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}}_{=\frac{\pi}{6}}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{3}{2}\log(3) + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{3}{2}\log(3) + \sqrt{3}\,\pi\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18}\right)\Big] = \frac{11}{36}\sqrt{3}\,\pi - \frac{3}{4}\log(3)$$