11. Übung B-Teil

Nr. 49 Bestimme partikuläre Lösung der Form $u_1(x) = \frac{c}{x}$ der Riccatischen DGL $x^2u' = x^2u^2 + xu + 1$, $x \in (0,e)$, und gebe alle Lösungen mit $u(1) = 0$ an.

$$x^2u' = x^2u^2 + xu + 1 \underset{\uparrow \atop x\in(0,e)}{\Leftrightarrow} u' - \frac{1}{x}\cdot u = \frac{1}{x^2} + u^2$$

Bestimme $u_1(x) = \frac{c}{x}$: $\quad u_1'(x) = \frac{-c}{x^2}$

$$u_1' - \frac{1}{x}u_1 \overset{!}{=} \frac{1}{x^2} + u_1^2 \Leftrightarrow \frac{-c}{x^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{c}{x} \overset{!}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{c^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2c+c^2}{x^2} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{(1+c)^2}{x} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow c = -1, \text{ also } u_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

Der Ansatz $u(x) = u_1(x) + \frac{1}{v(x)}$ liefert

$$v'(x) + \left(2\cdot 1\cdot\left(\frac{-1}{x}\right) + \frac{1}{x}\right)v(x) = -1 \quad (\text{vgl. } (8.10)/(8.11))$$

$$\Leftrightarrow v' - \frac{1}{x}\cdot v = -1$$

Löse diese DGL mit Satz 6.7:

$$v(x) = \exp\left(-\int -\frac{1}{x}dx\right)\cdot\int\exp\left(\int -\frac{1}{x}dx\right)(-1)\,dx$$

$$\int -\frac{1}{x}dx \underset{\uparrow \atop x\in(0,e)}{=} -\ln(x). \text{ Damit:}$$

$$v(x) = \exp(\ln(x))\cdot\int\exp(-\ln(x))(-1)\,dx$$

$$= x\cdot\int\frac{-1}{x}dx = -x(\ln(x) + C)$$

$$\Rightarrow u(x) = u_1(x) + \frac{1}{v(x)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{-x(\ln(x)+C)}$$

Es soll gelten: $u(1) = 0$:

$$u(1) = -1 + \frac{1}{-C} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = -1$$

Also: $u(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x(\ln(x)-1)}$

Nr. 50 Sei $Lu := u'' - \frac{x}{x-1} u' + \frac{1}{x-1} u$.
Zeige, dass $u_1(x) = e^x$ Lösung von $Lu = 0$ ist und bestimme damit alle Lösungen von $Lu = x-1$ $(x \in (1,\infty))$

i) zz.: $u_1(x) = e^x$ löst $Lu = 0$

$$Lu_1 = e^x - \frac{x}{x-1} e^x + \frac{1}{x-1} e^x = e^x\left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)$$

$$= 0 \ \forall x \in (1,\infty).$$

ii) Bestimme Lösungsmenge der homogenen Gleichung $Lu=0$
Wegen $u_1(x) = e^x \neq 0 \ \forall x$ ist Satz 9.3 anwendbar:

$$u_h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_1(x) \int \frac{1}{u_1^2} \exp\left(-\int -\frac{x}{x-1}\,dx\right) dx$$

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx = \int (x + \ln(x-1))'\,dx = x + \ln(x-1)$$

$$\int \frac{1}{u_1^2(x)} \exp(x + \ln(x-1))\,dx = \int e^{-2x} \cdot e^x \cdot (x-1)\,dx$$

$$= \int x e^{-x}\,dx - \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx - \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x}$$

$$\Rightarrow u_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cdot (-xe^{-x})$$

$$= c_1 e^x - c_2 x \qquad \text{mit } c_1, c_2 \text{ bel. aus } \mathbb{R}.$$

iii) Bestimme eine partikuläre Lösung von $Lu = x-1$.
$u_1(x) = e^x$ und $u_2(x) = x$ $(c_1 = 0, c_2 = -1)$ sind Lösungen von $Lu = 0$ mit

$$W(x) = u_1 \cdot u_2' - u_1' \cdot u_2 = e^x \cdot 1 - e^x \cdot x$$

$$= (1-x)e^x \neq 0 \ \forall x \in (1,\infty)$$

Dann ist nach 9.6

$$u_0(x) = u_1(x)\int \frac{-(x-1)u_2(x)}{W(x)}\,dx + u_2(x)\int \frac{(x-1)u_1(x)}{W(x)}\,dx$$

partikuläre Lösung von $Lu = x-1$.

$$\int \frac{-(x-1)u_2(x)}{W(x)}\,dx = \int \frac{-(x-1)\cdot x}{(1-x)e^x}\,dx = \int xe^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$\int \frac{(x-1)u_1(x)}{W(x)}\,dx = \int \frac{(x-1)e^x}{(1-x)e^x}\,dx = -\int 1\,dx = -x$$

$$\Rightarrow u_0(x) = x\cdot(-x) + e^x(-xe^{-x} - e^{-x})$$
$$= -x^2 - x - 1$$

iv) Nach Satz 9.5 ist dann eine Lösung von $Lu = x-1$ von der Form

$$u(x) = u_0(x) + u_h(x)$$
$$= -(x^2+x+1) + c_1 e^x - c_2 x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nr. 51 Löse die DGLs. (vgl. A-Teil Nr. 56)

a) $u'' + 6u' + 18u = 0$

Die charakerishsche Gleichung des zugehörigen Systems lautet: $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-18} = -3 \pm 3i$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -3+3i \;,\; \lambda_2 = -3-3i$$

Ein komplexes Fundamentalsystem ist dann gegeben durch: $u_1(x) = e^{(-3+3i)x}$

$$u_2(x) = e^{(-3-3i)x}$$

Ein reelles FS ist gegeben durch:

$$\tilde{u}_1(x) = \cos(3x)e^{-3x}$$

$$\tilde{u}_2(x) = \sin(3x)\,e^{-3x}$$

b) $u'' + 8u' + 16u = 0$

char. Gleichung: $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda+4)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -4 \;, \lambda_2 = -4$

Dann bilden $u_1(x) = e^{-4x}$ und $u_2(x) = xe^{-4x}$ ein Fundamentalsystem.

c) $u'' - 4u' - 12u = 0$

char. Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 6 \;, \; \lambda_2 = -2$

Dann bilden $u_1(x) = e^{6x}$ und $u_2(x) = e^{-2x}$ ein Fundamentalsystem.

Nr. 52 Löse die DGL

$$u'' - 4u' + 4u = e^x \cdot \sin(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$

durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$e^x(\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)).$$

$u(x) = e^x(\alpha \sin(x) + \beta\cos(x))$

$u'(x) = e^x(\alpha\sin(x) + \beta\cos(x) + \alpha\cos(x) - \beta\sin(x))$

$\quad = e^x((\alpha-\beta)\sin(x) + (\alpha+\beta)\cos(x))$

$u''(x) = e^x((\alpha-\beta)\sin(x) + (\alpha+\beta)\cos(x) + (\alpha-\beta)\cos(x) - (\alpha+\beta)\sin(x))$

$\quad = e^x(-2\beta\sin(x) + 2\alpha\cos(x))$

$u'' - 4u' + 4u \overset{!}{=} e^x \cdot \sin(x)$

$\Leftrightarrow e^x((-2\beta - 4(\alpha-\beta) + 4\alpha)\sin(x) + (2\alpha - 4(\alpha+\beta) + 4\beta)\cos(x)) \overset{!}{=} e^x\sin(x)$

$\Leftrightarrow e^x(2\beta\sin(x) - 2\alpha\cos(x)) \overset{!}{=} e^x\sin(x)$

$\Rightarrow \quad \alpha = 0$ und $2\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = \frac{1}{2}$

$u(x) = \frac{1}{2}e^x\cos(x)$ ist eine partikuläre Lösung.

Löse die homogene Gleichung

$$u'' - 4u' + 4u = 0.$$

Die char. Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $u_1(x) = e^{2x}$ und $u_2 = xe^{2x}$

$\Rightarrow$ Die allg. Lösung der DGL lautet

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2}e^x\cos(x)$$ für

Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.