39. Aufgabe Es sei $x \neq -3$.

$$\int \frac{1}{(x+3)^2\left(\sqrt{x^2+6x+10}\right)^3}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2\left(\sqrt{(x+3)^2+1}\right)^3}\,dx \qquad [y=x+3]$$

$$= \int \frac{1}{y^2\left(\sqrt{y^2+1}\right)^3}\,dy \qquad [y=\sinh(t),\ dy=\cosh(t)dt]$$

$$= \int \frac{1}{\sinh^2(t)\cdot\cosh^3(t)}\cosh(t)\,dt$$

$$= \int \frac{1}{(\sinh(t)\cosh(t))^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\right)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})\right)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sinh(2t)\right)^2}\,dt$$

$$= 2\coth(2t)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$= \underline{\underline{2\coth(2\cdot\operatorname{arsinh}(x+3))+c,\ c\in\mathbb{R}}}$$

40. Aufgabe

$\int f^{-1}(y)\,dy =$ $\quad [y = f(x)\ ,\ dy = f'(x)\,dx]$

OK da f stetig diff.bar und invertierbar

$\int f^{-1}(f(x))\, f'(x)\,dx =$

$\int x \cdot f'(x)\,dx = x f(x) - \int 1 \cdot f(x)\,dx$

$= x f(x) - F(x) + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$

$= \underline{\underline{f^{-1}(y) \cdot y - F(f^{-1}(y)) + C\ ,\ C \in \mathbb{R}}}$

Typische Aufgabe zu Taylorreihen

zu zeigen: (*) $\underbrace{ax^5+bx^3+c}_{=P(x)} \leq f(x)$ für $x \in I$

Lösung:
- Entwicklungspunkt x_0 wählen (typisch $x_0=0$).
- Entwicklungsgrad n wählen (typisch $n=$ Grad P, aber manchmal höher!)
- Ist f n-mal differenzierbar in x_0?
- Taylorreihe von f um x_0 bis zum n'ten Grades entwickeln:

(**) $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

- Aus (**) die Ungleichung (*) zeigen.

41. Aufgabe $\quad f(x) := \int_0^x \log\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) dt \;, \quad D(f) = \mathbb{R}$

zu zeigen: $-\frac{1}{24}x^4 \le f(x) - \frac{1}{2}x^2 \le 0$ für $x \in \mathbb{R}$

Bew:

- Wir entwickeln die Taylorreihe von f um $\underline{x_0 = 0}$ bis zum <u>4'ten Grades</u>.

- Ist f 4 mal in 0 diffbar? Ja, denn $\log(t+\sqrt{1+t^2})$ ist stetig in einer Umgebung um 0. Also ist z.B.

$$f(x) = \underbrace{\int_{-87}^{x} \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)dt}_{\text{diffbar in 0 nach 1. HDI}} - \underbrace{\int_{-87}^{0} \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)dt}_{=\text{ Konstante}}$$

und somit f unendlich oft in 0 diffbar.

- Taylorreihenentwicklung:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \frac{1}{24}f''''(\xi)x^4$$

für ein ξ zwischen 0 und x.

- $f(0) = 0$

$$f'(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad f'''(0) = 0$$

$$f''''(x) = -(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - x\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{-(1+x^2) + 3x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$$

- Also ist

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{24} \cdot \frac{2\xi^2-1}{(1+\xi^2)^{5/2}} x^4$$; für ein ξ zwischen 0 und x.

- Es folgt:

$$f(x) - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{2\xi^2-1}{(1+\xi^2)^{5/2}} x^4 \geq \frac{1}{24} \cdot \frac{-1}{(1+\xi^2)^{5/2}} \cdot x^4 \geq \frac{1}{24} \frac{-1}{1} \cdot x^4$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{f(x) - \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{-1}{24}x^4}}$$

- Mit $x_0 = 0$ und $n = 3$ folgt aus der Taylorformel:

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\left(-\xi(1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}}\right)x^3$$ für ein ξ zwischen 0 und x.

Es folgt

$$x > 0 \Rightarrow \xi > 0 \Rightarrow \xi x^3 > 0 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{6}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}} \xi \cdot x^3 < 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow \xi \leq 0 \Rightarrow \xi x^3 \geq 0 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{6}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}} \xi \cdot x^3 \leq 0$$

und somit $\underline{\underline{f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}}}$

42. Aufgabe

zu zeigen: $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $x \in \mathbb{R}$

Bew:

- Setze $f(x) := \sinh(x)$. Dann ist

$$f'(x) = \cosh(x) \quad f''(x) = \sinh(x) \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sinh(x); & n \text{ gerade} \\ \cosh(x); & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Nach Taylorformel gilt ($x_0 = 0$ und $n \in \mathbb{N}$):

$$f(x) = f(0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

für ein ξ zwischen 0 und x. Also:

$$f(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 + \frac{f^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\cosh(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

- Da $\left| \frac{\cosh(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \leq \cosh(x) \cdot \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$; cosh ist pos. und mon. wachsend auf $[0,\infty)$ und mon. fallend auf $(-\infty, 0]$ Ψ

ξ hängt von n ab und muss somit abgeschätzt werden bevor wir zur Grenze $n \to \infty$ gehen können! $\to 0$ für $n \to \infty$; $\frac{x^k}{k!} \to 0$ für $k \to \infty$ nach HM I.

folgt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\square$

43. Aufgabe

a) zu bestimmen: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\tan(x)}$

- Setze $f(x) = e^x - 1$ $\qquad g(x) = \tan(x)$

- $f(x) \to 0$ für $x \to 0$ $\qquad g(x) \to 0$ für $x \to 0$

  $f'(x) = e^x \to e^0 = 1$ für $x \to 0$ $\qquad g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \to 1$ für $x \to 0$

- Es gilt $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung um 0.

- Nach L'Hospitalschen Regel folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

b) zu bestimmen: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin(x)} \right)$

- $\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin(x)} = \frac{\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}}{x \cdot \arcsin(x)} := \frac{f(x)}{g(x)}$

- $f(x) \to 0$ für $x \to 0$ $\qquad g(x) \to 0$ für $x \to 0$

- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$ $\qquad g'(x) = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

  $= \frac{1-(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \to 0$ für $x \to 0$

  $= \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow 0$ für $x \to 0$

$$f''(x) = 4x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x^2\left(-\tfrac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) \to 0 \quad \text{für } x \to 0$$

$$g''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) \to 2 \quad \text{für } x \to 0$$

- Es gilt $g''(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung um 0.
- Nach L'Hospitalschen Regel folgt:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \underline{\underline{0}}$$

c) Zu bestimmen: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

- $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\log(x)}$ · Setze $f(x) = \log(x)$ $\quad g(x) = x$
- $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ $\qquad g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

  $f'(x) = \frac{1}{x} \to 0$ für $x \to \infty$ $\qquad g'(x) = 1 \to 1$ für $x \to \infty$
- Es gilt $g'(x) \neq 0$ in (M, ∞) für M groß.
- Nach L'Hospitalschen Regel folgt

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\log(x)}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

d) zu bestimmen: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

- $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log(1+\frac{1}{x})} = e^{\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{1/x}}$

Setze $f(y) = \log(1+y)$ $\qquad g(y) = y$

- $f(y) \to 0$ für $y \to 0$ $\qquad g(y) \to 0$ für $y \to 0$

$f'(y) = \frac{1}{1+y} \to 1$ für $y \to 0$ $\qquad g'(y) = 1 \to 1$ für $y \to 0$

- Es gilt $g'(y) \neq 0$ in einer Umgebung um 0.
- Nach L'Hospitalschen Regel folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{1/x}}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{\frac{\log(1+y)}{y}}$$

$$= e^{\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}}$$

$$= e^{\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{g(y)}} = e^{\lim_{y\to 0}\frac{f'(y)}{g'(y)}} = \underline{\underline{e^1}}$$

44. Aufgabe

- $f(x) = x + \sin(x)\cos(x)$ $\qquad g(x) = (x + \sin(x)\cos(x))\, e^{\sin(x)}$

- $f'(x) = 1 + \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x)$

$$g'(x) = 2\cos^2(x) \cdot e^{\sin(x)} + (x + \sin(x)\cos(x))\, e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

$$= e^{\sin(x)} \left(2\cos^2(x) + x\cos(x) + \sin(x)\cos^2(x) \right)$$

- $$\left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| = \left| e^{\sin(x)} \left(1 + \frac{x}{2\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\sin(x)}}{\cos(x)} + e^{\sin(x)} \left(1 + \frac{\sin(x)}{2} \right) \right|$$

$$\geq \frac{|x|}{2} \frac{|e^{\sin(x)}|}{|\cos(x)|} - |e^{\sin(x)}| \cdot \left| 1 + \frac{\sin(x)}{2} \right|$$

$$\geq \frac{|x|}{2} \cdot \frac{e^{-1}}{1} - e^{1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \underline{\underline{\infty}} \text{ für } x \to \infty$$

- $\frac{f(x)}{g(x)} = e^{\sin(x)}$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to \infty$, denn mit $x_n = 2\pi \cdot n$ und $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$ sind zwei Folgen gegeben mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = e^0 \neq e^1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)}$.