3 Übung

Aufgabe A10

Angenommen, f wäre in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar.

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = c$ existiert

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0, n \to \infty, x_n \neq 0$

existiert $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ und es gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$

Wähle z.B. $x_n := \frac{1}{n\pi}$ und $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\lim_{n \to \infty} x_n = 0 = \lim_{n \to \infty} y_n$

und $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(n\pi) = 0$

$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht

$\Rightarrow f$ ist in 0 nicht stetig ergänzbar

Aufgabe A11

Stetigkeit: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für $|x| < \delta$:

$$|g(x) - g(0)| = |x \sin(\tfrac{1}{x})| = |x| \underbrace{|\sin(\tfrac{1}{x})|}_{\leq 1}$$

$$\leq |x| < \delta = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ g ist stetig in $x_0 = 0$.

Differenzierbarkeit:

Betrachte den Differenzenquotient

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{x} = \sin(\frac{1}{x})$$

(i) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ existiert nicht.

$\Rightarrow$ g ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

Aufg. A13

(i) Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu $x, y \in I$ ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)\cdot(y-x)$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq M|x-y|.$$

(ii) Zu zeigen ist $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x,y\in I,\ |x-y|<\delta : |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
Sei L die Lipschitz-Konstante. Zu $\varepsilon>0$ setze $\delta(\varepsilon) := \varepsilon/L$, denn dann ist für $|x-y|<\delta(\varepsilon)$

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < L\delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Aufgabe A14

$f(x) = \arctan(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(MWS) $\Rightarrow f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = f'(\xi)(x-0)$ für $x \in \mathbb{R}$ und ein ξ zwischen x und 0.

$$\Rightarrow |\arctan(x)| = \underbrace{\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|}_{<1} |x| < |x|$$

Aufgabe A12

$$g'(x) = \frac{\dfrac{2\sin(e^{3x})\cos(e^{3x})\,e^{3x}\cdot 3}{1+\sin^2(e^{3x})}}{1+\left(\log\left(1+\sin^2(e^{3x})\right)\right)^2}$$

$$h(x) = x^{(x^x)} = x^{(e^{x\log x})} = e^{[(e^{x\log x})\log x]}$$

$$h'(x) = e^{[(e^{x\log x})\log x]}\left((e^{x\log x})'\log x + (e^{x\log x})\tfrac{1}{x}\right)$$

$$= x^{(x^x)}\left((e^{x\log x})(x\log x)'\log x + \tfrac{1}{x}(e^{x\log x})\right)$$

$$= x^{(x^x)}x^x\left([\log x + x\cdot\tfrac{1}{x}]\log x + \tfrac{1}{x}\right)$$

$$= x^{(x^x)}x^x\left(((\log x)+1)\log x + \tfrac{1}{x}\right)$$

Aufgabe A 15

Untersuchen Sie, ob $f(x) := \sin(\sqrt{1+x^2})$, $x \in \mathbb{R}$, Lipschitz-stetig ist.

$$f'(x) = \cos(\sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = \left| \frac{x \cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \text{ auf } \mathbb{R}$$

$\overset{A13}{\Longrightarrow}$ f ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

Aufgabe A16

Beweisen Sie $\ln(1+x) \leq x$ für alle $x > -1$ mit Gleichheit nur für $x = 0$.

Betrachte $d(x) := \ln(1+x) - x$, $x > -1$. Es ist $d(0) = 0$

und $d'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \begin{cases} > 0 & \text{für } -1 < x < 0 \\ < 0 & \phantom{\text{für }} x > 0. \end{cases}$

$\Rightarrow$ d ist streng monoton $\left\{ \begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix} \right\}$ auf $\left\{ \begin{matrix} (-1, 0] \\ [0, \infty) \end{matrix} \right\}$.

$\Rightarrow d(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (-1, 0) \cup (0, \infty) \\ = 0 & \phantom{\text{für }} x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe A17 (Leibniz'sche Regel)

Sind $f,g: (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, so ist $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar, und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) \cdot g^{(n-\nu)}(x).$$

Beweis mit vollständiger Induktion über n:

Die Aussage ist für $n=1$ wegen der Produktregel wahr.

Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Leibniz'sche Regel für n-mal differenzierbare Funktionen wahr ist. Dann gilt für $(n+1)$-mal differenzierbare f, g:

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((f \cdot g)^{(n)}(x) \right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n-\nu)}(x) \right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu+1)}(x) g^{(n-\nu)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n+1-\nu)}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n+1-\nu)}(x)$$

$$= f^{(n+1)}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{(n+1)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} \right]}_{= \binom{n+1}{\nu}} f^{(\nu)}(x) g^{(n+1-\nu)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} f^{(\nu)}(x) g^{(n+1-\nu)}(x),$$

$\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe A19

Sei $y_0 \in (f_+'(a), f_-'(b)) \Leftrightarrow f_+'(a) < y_0 < f_-'(b) \quad (*)$

Wir betrachten die Hilfsfunktion $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, mit

$$g(x) := f(x) - y_0 x$$

g ist auf $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar.

Beobachtung: In kritischen Punkten von g, d.h. Punkte $x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$ gilt

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - y_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = y_0$$

Wir müssen also nach kritischen Punkten von g suchen.

(Satz von Weierstraß) $\Rightarrow$ g nimmt auf $[a,b]$ Maximum und ihr Minimum an.

Wird das Minimum in a angenommen? Betrachte dazu für $x \in (a,b]$.

$$\frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - y_0(x-a)}{x-a}$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - y_0 \xrightarrow[x \downarrow a]{} f_+'(a) - y_0 \overset{(*)}{<} 0$$

$\Rightarrow$ In einer Umgebung von a gilt $\frac{g(x) - g(a)}{\underbrace{x-a}_{>0}} < 0$

$\Leftrightarrow g(x) < g(a)$, d.h. das Minimum wird nicht in a angenommen.

Wird das Minimum in b angenommen? Sei wieder $x \in [a,b)$.

$$\frac{g(x) - g(b)}{x-b} = \frac{f(x) - f(b)}{x-b} - y_0 \xrightarrow[x \uparrow b]{} f_-'(b) - y_0 > 0$$

$\Rightarrow$ In einer Umgebung von b gilt $\frac{g(x) - g(b)}{\underbrace{x-b}_{<0}} > 0$

$\Leftrightarrow$ $g(x) < g(b)$, d.h. das Minimum wird nicht in b angenommen.

$\Rightarrow$ Das Minimum wird in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ angenommen.

$\Rightarrow$ $g'(x_0) = 0$

<u>Aufgabe A18</u>

Wir berechnen die rechts- und linksseitige Ableitung von f im Punkt x_0:

Sei $x < x_0$. Dann gilt:

(i)+(iii) $\Rightarrow$ f ist in $[x, x_0]$ stetig und in (x, x_0) differenzierbar.

$\exists\, \xi = \xi(x) \in (x, x_0)$ so dass gilt:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\,(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

Nach Konstruktion gilt: $\xi = \xi(x) \nearrow x_0$ für $x \nearrow x_0$

(ii) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f'(\xi) = c$

$$\Rightarrow \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} f'(\xi) = c$$

$\Rightarrow$ $f'_-(x_0)$ existiert und es gilt $f'_-(x_0) = c$

Analog folgt $f'_+(x_0)$ existiert und es gilt $f'_+(x_0) = c$

$\Rightarrow$ f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = c$