10. Übung

'Riccati':
$u'(x) + a(x)u(x) = b(x) + c(x)u^2(x)$

hier: $a(x) = -2x$, $b(x) = 2$, $c(x) = 1$

Aufgabe A49

$$y' - y^2 - 2xy = 2 \qquad (*)$$

Riccatische Differentialgleichung

zeige: $y_0(x) = -\frac{1}{x}$ ist partikuläre Lösung

$y_0'(x) = \frac{1}{x^2}$. Setze dies in (*) ein:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \iff 2 = 2 \Rightarrow y_0 \text{ ist part. Lösung}$$

Ansatz: $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{v(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{v(x)}$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{v(x)^2} v'(x)$$

Setze dies in (*) ein:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{v(x)^2} v'(x) - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x\,v(x)} + \frac{1}{v(x)^2}\right) - 2x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{v(x)}\right) = 2$$

$$\iff -v'(x) + \frac{2}{x} v(x) - 1 + 2v(x)^2 - 2xv(x) = 2v(x)^2$$

$$\iff v'(x) + \underbrace{\left(2x - \frac{2}{x}\right)}_{\tilde{a}(x)} v(x) = \underbrace{-1}_{\tilde{f}(x)}$$

lineare DGL 1. Ordnung

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \tilde{a}(x)\,dx \\ &= x^2 - 2\ln|x| \\ &= x^2 - \ln(x^2) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow v(x) = e^{-\int \tilde{a}(x)dx} \cdot \int \tilde{f}(x)\, e^{\int \tilde{a}(x)dx}\, dx$$

$$= -e^{-x^2} \cdot x^2 \cdot \int \frac{e^{x^2}}{x^2}\, dx$$

$$= -x^2 e^{-x^2}\left(-\frac{1}{x} e^{x^2} + 2\int e^{x^2} dx\right)$$

„Fehlerfunktion"
"error function"

$$= x - 2x^2 e^{-x^2} \int e^{x^2} dx$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2x^2 e^{-x^2}\int e^{x^2} dx}$$

Aufgabe A50

$$u'' + \left(\frac{\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2}{\varphi^2}\right) u = 0 \qquad , \; x \in [a, b]$$

Hinweis: Löse $\alpha' - \alpha^2 = \left(\frac{\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2}{\varphi^2}\right)$ Riccatische DGL

Nach Satz 9.2 ist die allgemeine Lösung von

$u'' + (\alpha' - \alpha^2) u = 0$ von der Form

$$u(x) = c_1 e^{-A(x)} + c_2 e^{-A(x)} \int_a^x e^{2A(\xi)} d\xi \qquad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$A(x) = \int_a^x \alpha(\xi) d\xi$$

Nun ist (Hinweis)

$$\alpha' - \alpha^2 = \left(\frac{\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2}{\varphi^2}\right) = \frac{\varphi\varphi'' - \varphi'\varphi'}{\varphi^2} - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)'}_{\alpha'} - \underbrace{\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2}_{\alpha^2} \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

$$\Rightarrow A(x) = \int_a^x \frac{\varphi'}{\varphi} dt = \log(\varphi(t))\Big|_a^x = \log(\varphi(x)) + C$$

Mit Satz 9.2 gilt jetzt:

$$u(x) = c_1 e^{-\log(\varphi(x))} + c_2 e^{-\log(\varphi(x))} \int_a^x e^{2\log(\varphi(\xi))} d\xi$$

$$= \frac{c_1}{\varphi(x)} + \frac{c_2}{\varphi(x)} \int_a^x \varphi^2(\xi) d\xi \qquad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe A51

$$u''(x) + a(x)\,u'(x) + b(x)\,u(x) = 0 \qquad (*)$$

$0 \neq u_1$ Lösung von $(*)$ $\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_1(x) \int \frac{1}{u_1^2(x)} e^{-\int a(x)dx} dx \qquad \text{(Satz 9.3)}$$

<u>hier</u>: $u'' - \frac{2-x^2}{2x-x^2} u' + \frac{2-2x}{2x-x^2} u = 0 \qquad , x \in (2, \infty)$

<u>zeige</u>: $u_1(x) = e^x$ löst die DGL. Setze u_1 in die Gleichung ein:

$$e^x \left(1 - \frac{2-x^2}{2x-x^2} + \frac{2-2x}{2x-x^2}\right) = e^x \left(1 + \frac{x^2-2x}{2x-x^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow u_1$ ist Lösung.

Bestimme hieraus alle Lösungen:

Berechne zunächst $\int a(x) dx$:

$$\int a(x) dx = \int \frac{x^2-2}{2x-x^2} dx = \int -1 + \frac{2x-2}{2x-x^2} dx = -x - \log(x^2-2x) + c$$

$$\Rightarrow e^{-\int a(x)dx} = \tilde{c}\, e^x (x^2-2x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u_1^2(x)} e^{-\int a(x)dx} dx = \tilde{c} \int \frac{x^2-2x}{e^x} dx = \tilde{c}\left(-\frac{x^2}{e^x} + \tilde{\tilde{c}}\right) \qquad \text{2x partiell integrieren}$$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x) = c_1 e^x - c_2 x^2$$

Aufgabe A52

(*) $u'' + a u' + b u = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.

<u>Lösungsansatz</u>: $u(x) := e^{\lambda x}$ in (*) einsetzen ergibt:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \overset{e^{\lambda x}>0}{\Leftrightarrow} \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}_{\text{charakteristische Gleichung}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$\lambda_{1/2}$ entspricht den Eigenwerten des zugehörigen Systems 1. Ordnung:

$\underline{u}' = A\underline{u}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) = -\lambda(-a-\lambda) + b$
$= \lambda^2 + a\lambda + b$

Der Lösungsraum von (*) ist zweidimensional

Fall 1.) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Dann bilden $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $u_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ ein Fundamentalsystem

b) $\lambda_1 = \lambda_2$

Dann bilden $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $u_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$ ein Fundamentalsystem

Fall 2.) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Dann muss gelten $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, es ist $\lambda_1 = c + id$, $c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$

Die Funktionen $u_1(x) = e^{(c+id)x}$, $u_2(x) = e^{(c-id)x}$ bilden ein komplexes Fundamentalsystem

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$ ..

Dann erhalten wir ein reelles FS durch

$\tilde{u}_1 = \mathrm{Re}(u_1)$, $\tilde{u}_2 = \mathrm{Im}(u_1)$

$\Rightarrow \tilde{u}_1(x) = \cos(dx) e^{cx}$, $\tilde{u}_2(x) = \sin(dx) e^{cx}$

Damit lösen wir

a) $u'' + 6u' + 9u = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$

Also Fall 1.) b) , $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

d.h. $u_1(x) = e^{-3x}$, $u_2(x) = x e^{-3x}$ bilden FS

---

b) $u'' - 4u' + 13u = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

Also Fall 2.) $\lambda_1 = 2+3i$, $\lambda_2 = 2-3i$

komplexes FS : $u_1(x) = e^{(2+3i)x}$, $u_2(x) = e^{(2-3i)x}$

reelles FS : $\tilde{u}_1(x) = e^{2x}\cos(3x)$, $\tilde{u}_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$

---

c) $u'' + u' - 2u = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

Also Fall 1.) a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$

$\Rightarrow u_1(x) = e^{x}$, $u_2(x) = e^{-2x}$ bilden FS

Aufgabe A53

$$u'' + u = x^2 + 1 \qquad (*)$$

1.) Lösen der homogenen Gleichung $u'' + u = 0$

char. Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_1 = i, \; \lambda_2 = -i$

Also bilden $e^{ix} = u_1(x)$, $u_2(x) = e^{-ix}$ ein kompl. FS

und $\tilde{u}_1(x) = \cos(x)$, $\tilde{u}_2(x) = \sin(x)$ ein reelles FS

Die Lösungsgesamtheit von $(*)$ ist gegeben durch

$$u(x) = c_1 \tilde{u}_1(x) + c_2 \tilde{u}_2(x) + u_0(x) \qquad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(Satz 9.5),

wobei u_0 eine partikuläre Lösung von $(*)$ ist.

2.) Auffinden einer partikulären Lösung:

Ansatz vom Typ der rechten Seite: $u_0(x) = ax^2 + b$

$\Rightarrow u_0''(x) + u_0(x) = 2a + ax^2 + b \overset{!}{=} x^2 + 1$

Koeffizientenvergleich: $a = 1$ und $2a + b = 1 \Rightarrow b = -1$

$\Rightarrow u_0(x) = x^2 - 1$ ist part. Lösung

$\Rightarrow$ Die allgemeine Lösung ist damit

$$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x^2 - 1 \qquad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$