Übung 8

Aufgabe A40

$$\begin{cases} u'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}\,u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, & x \in (0,\infty) \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

Dies ist eine lineare inhomogene Differentialgl.

(Variation der Konstanten)

vgl. (6.28)
$$\begin{cases} u'(x) + a(x)\,u(x) = f(x), & x \in (x_0, \beta) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

hier: $a(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x_0 = 0$, $u_0 = 7$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist nach Satz 6.8 gegeben durch

$$u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{\int_{x_0}^{\xi} a(\eta)\,d\eta}\, d\xi + u_0 \right)$$

Berechne zunächst $\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi$:

$$\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi = -\int_0^x \frac{2\xi}{1+\xi^2}\,d\xi = -\log(1+\xi^2)\Big|_0^x = -\log(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{\int_{x_0}^{\xi} a(\eta)\,d\eta}\, d\xi = \int_0^x \frac{2\xi}{1+\xi^2}\, e^{-\log(1+\xi^2)}\,d\xi$$

$$= \int_0^x \frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi \underset{\substack{y = 1+\xi^2 \\ dy = 2\xi d\xi}}{=} \int_1^{1+x^2} \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y}\Big|_1^{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + 1$$

Damit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = e^{\log(1+x^2)} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} + 7\right)$$

$$= (1+x^2)\left(8 - \frac{1}{1+x^2}\right) = 8(1+x^2) - 1$$

$$= 8x^2 + 7$$

Aufgabe A41

$I = (x_0, \beta)$, $u_0 \in J \subset \mathbb{R}$, $a : \overline{I} \to \mathbb{R}$ stetig
$f : \overline{J} \to \mathbb{R}$ stetig

$u : \overline{I} \to \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.) u ist auf I stetig diffbar & Lösung von

$$u'(x) = a(x) f(u(x)) \quad , \quad u(x_0) = u_0$$

2.) u ist auf I stetig & Lösung von

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} a(t) f(u(t))\, dt$$

1.) $\Rightarrow$ 2.) u ist stetig diffbar $\Rightarrow$ u ist stetig

Es gilt $u'(x) = a(x) f(u(x))$. Integriere diese Gleichung von x_0 bis x:

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} a(t) f(u(t))\, dt$$

$$\Rightarrow u(t) \Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} a(t) f(u(t))\, dt$$

$$\Rightarrow u(x) - \underbrace{u(x_0)}_{= u_0} = \int_{x_0}^{x} a(t) f(u(t))\, dt$$

2.) $\Rightarrow$ 1.) u ist stetig und es gilt: $u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} a(t) f(u(t))\, dt$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist differenzierbar, also auch u.

Differentiation ergibt: $u'(x) = a(x) f(u(x))$.

Den Anfangswert erhalten wir, indem wir x_0 in die Integralgleichung einsetzen:

$$u(x_0) = u_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} a(t) f(u(t))\, dt}_{= 0} = u_0$$

Nr. A42

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad x > 0$$

[Nach Satz 6.10
$g(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{|u(x)|}}$
$f(x) = 1$
Beachte g ist in 0 nicht def.]

$u(x) = 0$ löst die DGL ✓

$u(x) > 0$ $\quad u' = \sqrt{u}$

$$\Leftrightarrow \int_0^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^x dt$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t}\Big|_0^{u(x)} = x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{u(x)} = x$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$ ✓

Nun testen wir noch, ob dieses u tatsächlich die ODE löst:

$$u(x) = \frac{x^2}{4}, \quad u'(x) = \frac{x}{2}$$

also

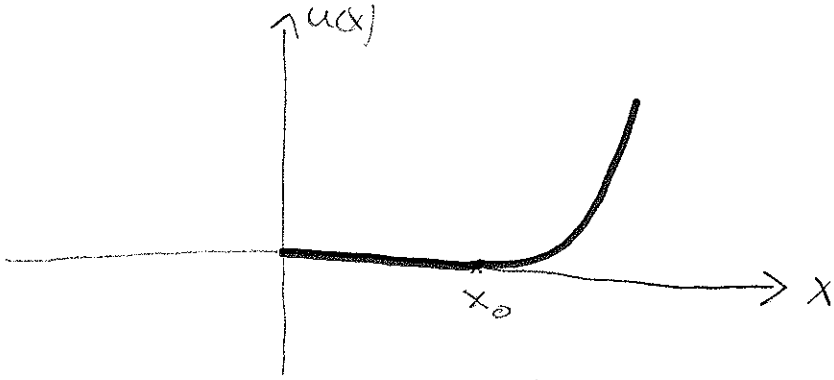
$$u'(x) = \frac{x}{2} = \sqrt{\left|\frac{x^2}{4}\right|} = \frac{|x|}{2} = \sqrt{|u(x)|} \quad \forall\ x \geq 0.$$

Wegen $u(0) = 0$ ist u ebenfalls Lösung des Anfangswertproblems

Als dritte Lösung können wir eine Kombination der beiden bereits bekannten nehmen:

für beliebiges $x_0 \in [0, \infty)$

$$u_{x_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [0, x_0], \\ \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{für } x \in (x_0, \infty). \end{cases}$$



Als Lösungen können wir also beispielsweise

$$0, \quad u(x) = \frac{x^2}{4}, \quad u_1 \qquad \text{nehmen,}$$

Bemerkung

An dieser Aufgabe sieht man auch, daß die Bedingung

f Lipschitz-stetig

aus Aufgabe 43 scharf ist (d.h. es ex. ein f, welches nicht Lipschitz-stetig ist und für welches das Anfangswertproblem mehrere verschiedene Lösungen besitzt.)

$\sqrt{\cdot}$ auf $[0,\infty)$ nicht Lipschitz-stetig

Ang. doch, dann ex. ein $L>0$:

$$\Rightarrow |\sqrt{0}-\sqrt{x}| \leq L\cdot|0-x| \quad \forall\, x\in[0,\infty)$$

dies ist aber falsch, denn dann wäre

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \leq L \quad \forall\, x\in(0,\infty)$$

Nr. A43

Es sei $f : \bar{J} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle die

⊕ Bedingung: $|f(y_1) - f(y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in J$

mit $L > 0$. (Lipschitz-Bedingung)

Sei $a : \bar{I} \to \mathbb{R}$ stetig und u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(*) \quad \begin{cases} u'(x) = a(x)\, f(u(x)) \\ u(x_0) = u_0 , \end{cases}$$

dann ist u eindeutige Lösung.

Beweis:

Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von $(*)$, dann gilt mit Aufgabe 46)

$$|u_1(x) - u_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} a(t)\, f(u_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} a(t)\, f(u_2(t))\, dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |a(t)|\, |f(u_1(t)) - f(u_2(t))|\, dt$$

$$\overset{\text{Vor. an } f}{\leq} L \int_{x_0}^{x} |a(t)|\, |u_1(t) - u_2(t)|\, dt$$

Mit der Gronwallschen Ungl. (Satz 6.5) folgt dann

$|u_1(x) - u_2(x)| \leq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow u_1(x) = u_2(x) \quad \forall x \in I$

Beachte: $f(y) = \sqrt{y}$ erfüllt auf $[0, \infty)$ die Voraussetzung ⊕ nicht!

$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ nicht beschränkt auf $(0, \infty) \Rightarrow \nexists\, L$ mit ⊕.

Nr. A44

a) $u'(x) = (u(x)-3)\cos(x)$ (*)

DGL mit getrennten Variablen

Es gilt $u'(x) = (u(x)-3)\cos(x)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u'(x)}{u(x)-3} = \cos(x)\right) \vee \left(u'(x)=0 \wedge u(x)-3=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u'(x)}{u(x)-3} = \cos(x)\right) \vee \left(u(x)=3\right)$$

Die Funktion $f(y) = y-3$ erfüllt die „Lipschitz Bedingung".
Damit gilt $u(x) \equiv 3$ ist Lösung der Dgl (*) und für jede weitere Lösung gilt $u(x) \neq 3 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nun gilt $\frac{u'(x)}{u(x)-3} = \cos(x)$

$$\Leftrightarrow \int_{u_0}^{u(x)} \frac{1}{t-3}\,dt = \int_{x_0}^{x} \cos(s)\,ds$$

$$\Leftrightarrow \log|t-3|\Big|_{u_0}^{u(x)} = \sin(s)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\Leftrightarrow \log|u(x)-3| = \sin(x) + C \quad , (C \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{u(x) = e^{\sin(x)+C} + 3}} \quad , \left(C = \log|u_0-3| - \sin(x_0)\right)$$

b) $u'(x) = 9(u(x))^2 - 4$ $(*)$

DGL mit getrennten Variablen

Es gilt $u'(x) = 9(u(x))^2 - 4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u'(x)}{9(u(x))^2-4} = 1\right) \vee \left(9(u(x))^2 - 4 = 0 \wedge u'(x) = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u'(x)}{9(u(x))^2-4} = 1\right) \vee u(x) = \pm\frac{2}{3}$$

Die Funktion $f(y) = 9y^2 - 4$ erfüllt die „Lipschitz-Bedingung"
Damit gilt: $u(x) = \frac{2}{3}$ und $u(x) = -\frac{2}{3}$ sind Lösungen der DGL $(*)$ und für jede weitere Lösung gilt $u(x) \neq \pm\frac{2}{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nun gilt

$$\frac{u'(x)}{9(u(x))^2-4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{u_0}^{u(x)} \frac{1}{9t^2-4}\,dt = \int_{x_0}^{x} 1\,ds$$

(PBZ)

$$\boxed{\frac{1}{9t^2-4} = \frac{-\frac{1}{4}}{3t+2} + \frac{\frac{1}{4}}{3t-2}}$$

(PBZ)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{u_0}^{u(x)} \frac{-\frac{1}{4}\cdot 3}{3t+2} + \frac{\frac{1}{4}\cdot 3}{3t-2}\,dt = x - x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12}\log\left(\frac{3t-2}{3t+2}\right)\Bigg|_{u_0}^{u(x)} = x - x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3u(x)-2}{3u(x)+2} = e^{12x}\cdot C \quad , (C \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1+e^{12x}\cdot C}{1-e^{12x}\cdot C}\right) \quad , \left(C = \frac{1}{12}\log\left(\frac{3u_0-2}{3u_0+2}\right) - x_0\right)$$