5. Übung B-Teil

Nr. 22 Berechne für $a>1$ das Integral $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$ mittels Riemannscher Zwischensummen.

Hinweis: $\frac{a^h-1}{h} \to \log(a)$ für $h \to 0$.

dazu: zeige zunächst den Hinweis:

nach HöMa II gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (Differenzenquotient)

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{\exp(\ln(a)\cdot h)-1}{h}$$

$$= \ln(a)\cdot \frac{\exp(\ln(a)\cdot h)-1}{\ln(a)\cdot h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \ln(a)\cdot 1$$, denn wenn $h\to 0$, gilt auch $\ln(a)\cdot h \to 0$.

Berechne nun $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$.

$f(x)=\frac{1}{x}$ ist stetig auf $[1,a] \Rightarrow f(x)$ ist R-int'bar.

$\Rightarrow \int_1^a f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta_k$ für bel. Folge von Zerlegungen mit zugehörigen Besetzungen.

Wähle nun Zerlegung E_n mit

$E_n := \{\sqrt[n]{a}^k ;\ k\in\{0,\dots,n\}\}$

und $\xi_k := \sqrt[n]{a}^k$ für $k\in\{0,\dots,n-1\}$.

Dann gilt:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{a}^{-k}\left[\sqrt[n]{a}^{k+1} - \sqrt[n]{a}^{k}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \underset{h=\frac{1}{n}}{\overset{}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \underset{\text{s.o.}}{=} \ln(a)$$

Nr. 23 Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]$.

Zeige: $$\left(\int_0^1 (f(x))^2 \, dx\right)^{-1} \leq \int_0^1 \frac{1}{(f(x))^2} \, dx$$

Beweis:

$$1 = \left(\int_0^1 1 \, dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \left|\frac{f(x)}{f(x)}\right| dx\right)^2$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{|f(x)|^2} \, dx$$

$$\Longleftrightarrow \left(\int_0^1 (f(x))^2 \, dx\right)^{-1} \leq \int_0^1 \frac{1}{(f(x))^2} \, dx$$

$\square$

Nr. 24

Zeige: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi j}{2n}\right) = 1$$

dazu: Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle äquidistante Zerlegung E_n von $[0, \frac{\pi}{2}]$ mit $E_n = \{ x_j = \frac{\pi j}{2n}, j = \{0, \ldots, n\}\}$ und Zwischenstellen $\xi_k = x_k$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Dann $|E_n| = \Delta_j = \frac{\pi j}{2n} - \frac{\pi(j-1)}{2n} = \frac{\pi}{n \cdot 2}$

d.h. $|E_n| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$.

Definiere nun $f(x) := \sin(x)$.

Da $f(x)$ stetig ist, ist $f(x)$ R-int'bar auf $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/2} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta_j$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi j}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n}$$

Berechne also $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -0 - (-1) = 1$$

Also: $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi j}{2n}\right) = 1$ $\square$

Nr. 25

Zeige: $0 < \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^n\right) dx < \frac{\pi}{2(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

dazu: i) $\sin(\frac{\pi}{2}x^n)$ ist stetig auf $[0,1]$,

$\sin(\frac{\pi}{2}x^n) \geq 0$ auf $[0,1]$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$

$$\underset{\text{A-Teil Nr. 27}}{\Longrightarrow} \int_0^1 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x^n\right) dx > 0.$$

ii) Sei $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, dann ex. nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$, so daß:

$$\sin(x) = \sin(x) - \sin(0) = \sin'(\xi)\cdot(x-0)$$

$$= \cos(\xi)\cdot x < 1\cdot x, \text{ da } \xi \in (0,\tfrac{\pi}{2}) \text{ und } 1 = \cos(0).$$

$\Longrightarrow \sin(x) < x$ für $x \in (0,\frac{\pi}{2})$.

$$\Longrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}x^n\right) < \frac{\pi}{2}x^n \quad \text{für } x \in (0,1).$$

Dann gilt:

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)dx < \int_0^1 \frac{\pi}{2}x^n\,dx$$

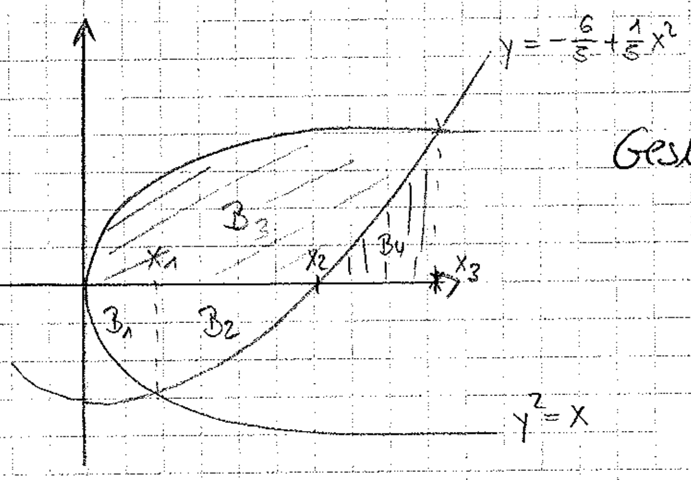
$$= \left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Also insgesamt:

$$0 < \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)dx < \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\square$

Nr. 26 Berechne den Flächeninhalt des von den Kurven $y^2 = x$ und $y = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5}x^2$ berandeten Bereichs.



Gesucht: $B_1 + B_2 + B_3$

Bestimme zunächst x_1 und x_3:

dazu bestimme Schnittpunkte der beiden Kurven.

$$y^2 = x \quad \wedge \quad y = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5}x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = x \quad \wedge \quad y = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5}x^4\, y^4$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = x \quad \wedge \quad y^4 - 5y - 6 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = x \quad \wedge \quad (y-2)(y+1)(y^2+y+3) = 0$$

nach Polynomdivision

$$\Longrightarrow \quad y^2 = x \ \wedge \ (y=-1 \vee y=2)$$

$$\Longrightarrow \ (y=-1,\ x=1) \ \vee \ (y=2 \wedge x=4)$$

also: $\underline{x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 4}$

<u>Bestimme x_2 = Nullstelle von $y = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5}x^2$</u>

$$0 = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5}x^2 \iff 6 = x^2$$

$$\Longrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

also $x_2 = \sqrt{6}$ (denn $x_2 > 0$)

<u>Bestimme nun B_1, B_2, B_3+B_4, B_4:</u>

$$B_1 = \int_0^{x_1} |-\sqrt{x}|\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$B_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left|-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}x^2\right| dx = \int_1^{\sqrt{6}} \left|-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}x^2\right| dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{6}} \frac{6}{5} - \frac{1}{5}x^2\,dx = \left(\frac{6}{5}x - \frac{1}{15}x^3\right)_1^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{6}{5}(\sqrt{6}-1) - \frac{1}{15}(\sqrt{6}^3 - 1)$$

$$B_3+B_4 = \int_0^{x_3} \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$B_4 = \int_{x_2}^{x_3} \left|-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}x^2\right| dx = \int_{\sqrt{6}}^4 -\frac{6}{5}+\frac{1}{5}x^2\,dx = \left[-\frac{6}{5}x + \frac{1}{15}x^3\right]_{\sqrt{6}}^4$$

$$= -\frac{6}{5}(4-\sqrt{6}) + \frac{1}{15}(64 - \sqrt{6}^3)$$

$$\Rightarrow \quad B_1 + B_2 + B_3$$
$$= \quad B_1 + B_2 + (B_3 + B_4) - B_4$$
$$= \quad \frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{6}{5}\sqrt{6} - \frac{6}{15}\sqrt{6} + \frac{1}{15} + \frac{16}{3} + \frac{24}{5} \quad \frac{6}{5}\sqrt{6} - \frac{64}{15} + \frac{6}{15}\sqrt{6}$$
$$= \quad \frac{27}{5}.$$

<u>Nr. 27</u> Zeige, dass $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ keine Stammfunktion hat.

<u>dazu:</u> Angenommen, F ist Stammfunktion von f, also $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $F' = f$.

Für $a < 0 \leq b$ gilt dann:

F ist stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b) und

$F'_+(a) = F'(a) = f(a) = 0$, $F'_-(b) = F'(b) = f(b) = 1$.

Dann gilt nach (Ü4 A-Teil Nr. 23):

$\forall\, y_0 \in (F'_+(a), F'_-(b))\ \exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = y_0$.

Also hier:

$\forall\, y_0 \in (0,1)\ \exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = f(x_0) = y_0$

Das ist aber für kein $y_0 \in (0,1)$ möglich!

Denn $f(x_0) \in \{1,0\}$ und $y_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 1$.

$\Rightarrow$ Annahme falsch!

$\Rightarrow$ f hat keine Stammfunktion. $\square$