8. Übung B-Teil

Nr. 38 Berechne die Integrale

a) $$\int \frac{1}{\sin^2(x)+4\cdot\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)+4\cdot\cos^2(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\cdot\frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+4}\,dx = \int \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+\tan^2(x)}{\frac{1}{4}\tan^2(x)+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

Sub.: $u=\frac{1}{2}\tan(x)$
$u'=\frac{1}{2}(1+\tan^2(x))$

$$= \frac{1}{2}\arctan(u)+C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan(x)\right)+C.$$

b) $$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{2\tan(\frac{x}{2})}\,dx$$

Sub.: $y=\tan(\frac{x}{2})$
$y'=\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))$

$$= 2\int \frac{1}{2y}\,dy = \ln|y|+C$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$$

Nr. 39 Berechne mittels Partialbruchzerlegung.

$$\int \frac{x^6}{(x-1)^2(x-3)}\,dx \quad \text{in } \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$$

Da Zählergrad größer als Nennergrad führe zunächst eine Polynomdivision durch:

$$\left[\ (x-1)^2(x-3) = x^3-5x^2+7x-3\ \right]$$

$$x^6 = (x^3-5x^2+7x-3)(x^3+5x^2+18x+58)+179x^2-352x+174$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^6-5x^5+7x^4-3x^3} \\
5x^5-7x^4+3x^3 \\
\underline{5x^5-25x^4+35x^3-15x^2} \\
18x^4-32x^3+15x^2 \\
\underline{18x^4-90x^3+126x^2-54x} \\
58x^3-111x^2+54x \\
\underline{58x^3-290x^2+406x-174} \\
179x^2-352x+174
\end{array}$$

Also: $$\frac{x^6}{(x-1)^2(x-3)} = x^3+5x^2+18x+58+\frac{179x^2-352x+174}{(x-1)^2\ (x-3)}$$

Nun Partialbruchzerlegung für den noch verbleibenden Bruch: Der Nenner hat die Nullstellen 3 und 1, wobei 1 eine doppelte Nullstelle ist.

$$\Rightarrow \frac{179x^2-352x+174}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A = \frac{179\cdot 3^2-352\cdot 3+174}{(3-1)^2} = \frac{729}{4}$$

$$C = \frac{179-352+174}{1-3} = \frac{-1}{2}$$

Damit: $\dfrac{179x^2-352x+174}{(x-1)^2(x-3)} = \dfrac{729}{4(x-3)} + \dfrac{B}{x-1} - \dfrac{1}{2(x-1)^2}$

Um B zu erhalten setze x z.B gleich Null:

$$\frac{174}{-3} = -\frac{179}{12} - B - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{13}{4}$$

Damit erhält man insgesamt:

$$\frac{x^6}{(x-1)^2(x-3)} = x^3+5x^2+18x+58+\frac{729}{4(x-3)} - \frac{13}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2}$$

Berechne nun das gesuchte Integral:

$$\int \frac{x^6}{(x-1)^2(x-3)}\,dx = \int x^3+5x^2+18x+58+\frac{729}{4(x-3)} - \frac{13}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 9x^2 + 58x + C + \frac{729}{4}\int\frac{1}{x-3}\,dx - \frac{13}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 9x^2 + 58x + \frac{729}{4}\ln|x-3|$$
$$- \frac{13}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + C$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Nr. 40 Zeige mit Hilfe der Taylor-Formel

$$-\frac{x^3}{2} \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \quad \text{in } (0,\pi),$$

wobei $f(x) = \int_0^x \arctan(\sin(t))\,dt \quad , x \in \mathbb{R}.$

dazu: $g(t) := \arctan(\sin(t))$ ist definiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und auch diff'bar $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Entwickle $g(t)$ um $t_0 = 0$:

$$g'(t) = \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \quad , \; g'(0) = 1$$

$$g''(t) = \frac{-\sin(t)(1+\sin^2(t)) - \cos(t)2\sin(t)\cos(t)}{(1+\sin^2(t))^2}$$

$$= \frac{-\sin(t)}{1+\sin^2(t)} - \frac{2\cos^2(t)\sin(t)}{(1+\sin^2(t))^2}$$

$$\Longrightarrow g(t) = g(0) + g'(0)\cdot t + \frac{1}{2}t^2 g''(\xi) \quad , \; \xi \in (0,t) \text{ bzw } (t,0)$$

$$= 0 + t + \frac{1}{2}t^2 g''(\xi) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

für $\xi \in (0,\pi)$ gilt:

i) $\sin(\xi) > 0, \; \cos^2(\xi) \geq 0$

$\Rightarrow g''(\xi) \leq 0$

ii) $\sin(\xi), \; \cos^2(\xi) \leq 1$

$\Rightarrow g''(\xi) \geq -3$

Das heißt: Für $t \in (0,\pi)$ gilt

i) $\arctan(\sin(t)) = t + \frac{1}{2}t^2 g''(\xi)$

$$\leq t + \frac{1}{2}t^2 \cdot 0 = t$$

ii) $\arctan(\sin(t)) = t + \frac{1}{2}t^2 g''(\xi)$

$$\geq t - \frac{3}{2}t^2$$

Damit für $x \in (0,\pi)$:

i) $f(x) = \int_0^x \arctan(\sin(t))\,dt \leq \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$

$\Leftrightarrow \quad f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0$

ii) $f(x) = \int_0^x \arctan(\sin(t))\,dt \geq \int_0^x t - \frac{3}{2}t^2\,dt$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x^3 \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2$

Insgesamt also:

$$-\frac{1}{2}x^3 \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \qquad \forall\, x \in (0,\pi).$$

$\square$

Alternative Lösung:

Entwickle f um 0.

Zeige dazu zunächst, dass f differenzierbar ist.

dazu def. $h(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$, $x \in (-\pi,\pi)$ (g wie oben)

Dann ist h nach dem Hauptsatz der Integralrechnung differenzierbar. Es gilt:

$$h(x) = \int_{-\pi}^{0} g(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = \text{const} + f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ diff'bar, da $h(x)$ diff'bar für $x \in (-\pi,\pi)$

Entwickle nun $f(x)$ um 0:

$f'(x) = g(x)$, $f'(0) = g(0) = 0$

$f''(x) = g'(x)$, $f''(0) = g'(0) = 1$

$f'''(x) = g''(x)$.

$$\Longrightarrow \quad f(x) = f(0) + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 g''(\xi) \quad \text{für } \xi \in (0,x) \text{ bzw } (x,0)$$

$$= \int_0^0 g(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 g''(\xi)$$

$$= 0 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 g''(\xi)$$

für $\xi \in (0,\pi)$ gibt (wie oben)

$$-3 \leq g''(\xi) \leq 0$$

Damit: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x^2$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x^3 \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0$$

$\square$

Nr. 41 Beweise mit der Taylorschen Formel, dass
$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dazu: es gilt: $\frac{d^n}{dx^n}\cosh(x) = \begin{cases} \sinh(x) & , n \text{ ungerade} \\ \cosh(x) & , n \text{ gerade} \end{cases}$

Nach Def. 5.5 ist die Taylorreihe von $\cosh(x)$ um $x_0 = 0$ gegeben durch
$$T(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}\cosh(0) \cdot \frac{1}{n!}(x-0)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n!} \cdot x^n, \text{ mit } a_n = \begin{cases} \sinh(0) = 0 & , n \text{ ung.} \\ \cosh(0) = 1 & , n \text{ ger.} \end{cases}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Zeige: $T(x;0)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$
mit Quotientenkriterium: $\left|\frac{(2n)!}{(2(n+1))!}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow T(x;0)$ konvergiert für $|x^2|^n < \infty$

$\Rightarrow T(x;0)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Allerdings konvergiert $T(x;x_0,f)$ i.a. <u>nicht</u> gegen f.
Zu zeigen ist also noch $T(x;0) = \cosh(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

dazu: es ist $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$$\underset{\text{Bsp. 5.13}}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n\right)$$
$$\underset{\substack{\text{beide Reihen}\\\text{absolut}\\\text{konvergent}}}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+(-1)^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = T(x;0)$$

Also gilt: $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Nr. 42 Berechne die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x) - 3\cos(x) + 2 + e^x}{x^2 + \tan(x)}$

$f(x) := \sin(x) - 3\cos(x) + 2 + e^x$ und $g(x) := x^2 + \tan(x)$

sind diff'bar auf $\mathbb{R}$ als Summe diff'barer Fkten.

$g'(x) = 2x + 1 + \tan^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Außerdem gilt:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 - 3 + 2 + 1 = 0$

und $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 + 0 = 0$

Damit ist die L'Hospitalsche Regel anwendbar und es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{+\cos(x) + 3\sin(x) + e^x}{2x + 1 + \tan^2(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$

$f(x) := \ln(\cos(ax))$ und $g(x) := \ln(\cos(bx))$ sind beide definiert in $(-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c})$ mit $c = \max\{|a|, |b|\}$ und dort diff'bar als Verkettung diff'barer Funktionen.

$g'(x) = \frac{-b\sin(bx)}{\cos(bx)} \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2c}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2c})$

Außerdem gilt:

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\downarrow 0} g(x) = 0 = \lim\limits_{x\nearrow 0} g(x)$

$$\underset{\text{L'Hospital}}{\Longrightarrow} \lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{a\sin(ax)\cdot\cos(bx)}{b\sin(bx)\cdot\cos(ax)}$$

und $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{a \sin(ax)\cos(bx)}{b \cos(ax)\sin(bx)}$

Es gilt aber:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g'(x).$$

Wende daher L'Hospitalsche Regel noch mal an. Das ist möglich, da

$$g''(x) = b^2 \cos(ax)\cos(bx) - ab \sin(ax)\sin(bx) \neq 0$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c}\right)$.

Also: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^2 \cos(ax)\cos(bx) - ab\sin(ax)\sin(bx)}{b^2 \cos(ax)\cos(bx) - ab\sin(ax)\sin(bx)}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a^2}{b^2}$$

c) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)}$

$f(x) := \ln(1+x) - x$ und $g(x) := x \cdot \ln(1+x)$ sind diff'bar auf $(0, \infty)$ als Verknüpfung diff'barer Funktionen.

$$g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

Außerdem:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x\downarrow 0} g(x)$$

Damit ist L'Hospital anwendbar:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - x}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{-x}{(x+1)\ln(x+1) + x}$$

Hier gilt jedoch wieder mit $u(x) = (x+1)\ln(x+1) + x$ und $h(x) := -x$: $\lim_{x \downarrow 0} h(x) = 0 = \lim_{x \downarrow 0} u(x)$.

Wegen $u'(x) = \ln(x+1) + 2 \neq 0 \ \forall x \in (0, \infty)$ ist aber L'Hospital wieder anwendbar:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{u(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{h'(x)}{u'(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{-1}{\ln(x+1) + 2} = \frac{-1}{2}$$

Insgesamt also:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{u(x)} = \frac{-1}{2}.$$

d) $$\lim_{x \to 1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$f(x) := (1-x)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ und $g(x) := \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ sind diffbar auf $\mathbb{R}$ als Verknüpfung diff'barer Funktionen.

$g'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) \neq 0 \ \forall x \in (0,2)$

Außerdem gilt:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1} g(x)$$

$$\underset{\text{L'Hospital}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(1-x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}.$$