3. Übung B-Teil

Nr. B1 Berechne die Ableitungen von folgenden Funktionen

i) $f_1(x) = a^{\tan(x)}$ $\quad (a>0, x\in\mathbb{R}, x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z})$

$$= \exp(\ln a \cdot \tan x)$$

$$f_1'(x) = \exp(\ln a \cdot \tan x) \cdot \ln a \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= a^{\tan(x)} \cdot \frac{\ln a}{\cos^2 x}$$

ii) $f_2(x) = (1+e^{2x})^{\ln(1+\arctan(x^2))}$

$$= \exp(\ln(1+e^{2x}) \cdot \ln(1+\arctan(x^2)))$$

$$f_2'(x) = \exp(\ln(1+e^{2x}) \cdot \ln(1+\arctan x^2)) \cdot \left[\frac{1}{1+e^{2x}} \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot \ln(1+\arctan x^2) + \frac{1}{1+\arctan x^2} \cdot \frac{2x}{1+x^4} \cdot \ln(1+e^{2x})\right]$$

$$= (1+e^{2x})^{\ln(1+\arctan x^2)} \left[\frac{2e^{2x}\ln(1+\arctan x^2)}{1+e^{2x}} + \frac{2x\ln(1+e^{2x})}{(1+\arctan x^2)(1+x^4)}\right]$$

iii) $f_3(x) = \ln(a \cdot \sqrt[6]{|x|})$ $\quad , a>0 \quad , x\neq 0$.

- $x>0$, dann: $f_3(x) = \ln(a\sqrt[6]{x})$

$$f_3'(x) = \frac{1}{a\cdot\sqrt[6]{x}} \cdot a \cdot \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^5} = \frac{1}{6x}$$

- $x<0$, dann: $f_3(x) = \ln(a\sqrt[6]{-x})$

$$f_3'(x) = \frac{1}{a\sqrt[6]{-x}} \cdot a \cdot \frac{1}{6} \cdot (-x)^{-\frac{5}{6}} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x}$$

Also für $x\neq 0$ $\quad f_3'(x) = \frac{1}{6x}$

iv) $f_4(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (-1 < x < 1)$

$$f_4'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}^3}$$

<u>Nr. B12</u> Zeige, dass h diff'bar ist, aber h' nicht stetig in $x=0$.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

<u>dazu:</u> in $x \neq 0$ ist h diff'bar, da x^2 als Polynom diff'bar, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ als Verknüpfung diff'barer Fkten diff'bar und h somit als Produkt diff'barer Fkten wieder diff'bar. Prüfe Diff'barkeit in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{beschränkt}} = 0$$

Also h in $x=0$ diff'bar mit $h'(0)=0$.

Für $x \neq 0$ gilt: $h'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{(-1)}{x^2}$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Wäre h' stetig in $x=0$, dann würde gelten:
Für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \to 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} h'(x_n) = h'(0).$$

Nimmt man aber z. B. die Folge $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, dann gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} h'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} 1 = -1 \neq h'(0) = 0$$

$\Rightarrow$ h' ist nicht stetig in $x = 0$.

$\square$

Nr. B13 Bestimme g mit $D(g) = [0,1]$, so daß

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x \in (-\infty, 0) \\ g(x) & , x \in [0,1] \\ 1 & , x \in (1, \infty) \end{cases}$$

differenzierbar ist.

dazu: Damit f diff'bar ist muß

i) f stetig sein, dh. g muß stetig sein auf $[0,1]$ und $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ muß gelten

ii) g diff'bar sein auf $(0,1)$ und f muß diff'bar sein in 0 und 1.

Die linksseitige Abl von f in 0 und die rechtsseitige Abl. von f in 1 sind schon bekannt, denn:

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{-1-(-1)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow f'_-(0) = 0$$

$$\lim_{x\searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} \frac{f(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} \frac{1-1}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = 0.$$

Damit f in 1 und 0 diff'bar ist, muß gelten: $f'_+(0) = g'_+(0) = 0$

und $f'_-(1) = g'_-(1) = 0$

Suche jetzt eine Funktion $\tilde{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$\tilde{g}$ diff'bar und $\tilde{g}'(0) = \tilde{g}'(1) = 0$.
Das erfüllt z. B. $\tilde{g}(x) = c_1(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) + c_2$,
denn: $\tilde{g}$ diff'bar als Polynom und

$$\tilde{g}'(x) = c_1(x^2 - x)$$

$$\Rightarrow \tilde{g}'(0) = 0 \text{ und } \tilde{g}'(1) = 0$$

Außerdem soll $\tilde{g}$ noch $\tilde{g}(0) = -1$ und $\tilde{g}(1) = 1$
erfüllen: $\tilde{g}(0) = c_2 \overset{!}{=} -1 \Rightarrow c_2 = -1$
damit: $\tilde{g}(1) = c_1(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - 1$

$$= -\frac{1}{6}c_1 - 1 \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = -12$$

Also erfüllt $\tilde{g}(x) = -12(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) - 1 = -4x^3 + 6x^2 - 1$
$\tilde{g}(0) = -1$, $\tilde{g}(1) = 1$ und $\tilde{g}$ ist diff'bar auf $\mathbb{R}$ mit
$\tilde{g}'(0) = \tilde{g}'(1) = 0$. (*)
Def. $g(x) := \tilde{g}|_{[0,1]}(x)$, dann ist g diff'bar auf
$(0,1)$ und es gilt (wegen (*)):

$$g'_+(0) = 0 \quad , g'_-(1) = 0$$

Damit ist f diff'bar auf $\mathbb{R}$ mit diesem g.

$\square$

Nr. B14

Zeige mit Mittelwertsatz:

$$\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x} \quad \forall x \geq 0$$

Beweis: Sei $f(x) := \log(1+x)$, $x \geq 0$,
dann ist f diff'bar auf $(0,\infty)$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Sei nun $x > 0$, dann gilt nach
MWS: $f(x) - f(0) = f'(\xi)\cdot(x-0)$ für ein $\xi \in (0,x)$

$$\Leftrightarrow \log(1+x) = \frac{1}{1+\xi}\cdot x \underset{\text{da } \xi < x}{>} \frac{x}{1+x}$$

Also für $x > 0$: $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$

Für $x = 0$: $\log(1) = 0 = \frac{0}{1}$

$$\Rightarrow \text{für } x \geq 0: \log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$$

$\square$

Nr. B15

Zeige, dass $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$, $p > 1$, konvex ist und für $a, b > 0$ gilt:

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Beweis:

i) f ist diff'bar auf $(0,\infty)$ mit $f'(x) = p\cdot x^{p-1}$.
Wegen $p > 1$ und $p-1 > 0$ ist f' streng monoton wachsend auf $(0,\infty)$

$\Rightarrow f$ ist strikt konvex

ii)

$$\begin{aligned}(a+b)^p &= f(a+b) = f\left(2a\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot 2b\right)\\ &\overset{\text{strikt konvex}}{<} \tfrac{1}{2}f(2a) + \tfrac{1}{2}f(2b)\\ &= \tfrac{1}{2}(2^p a^p + 2^p b^p)\\ &= 2^{p-1}(a^p + b^p)\end{aligned}$$

Aufg. B16

1. Die Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} + C_+ & : x > 0 \\ \frac{1}{x} + C_- & : x < 0 \end{cases}$

ist für $C_+ \neq C_-$ ein Gegenbeispiel. $\longrightarrow$ falsch

2. Nach Satz 3.4 ist $f' \geq 0$ sogar äquivalent zu Monotonie. $\longrightarrow$ wahr

3. $x \mapsto x^3$ ist offenbar streng monoton wachsend mit Ableitung null an der Stelle $x = 0$. $\longrightarrow$ falsch

4. Eine Funktion $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Minimum [Maximum] an der Stelle $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \mathcal{D}(f)$ die Bedingung $f(x_0) \leq f(x)$ [$f(x_0) \geq f(x)$] gilt.
Ein lokales Extremum ist entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.
Sofern f differenzierbar ist, gilt an einem lokalen Extremierer x_0 die Gleichung $f'(x_0) = 0$ oder x_0 ist Randpunkt von $\mathcal{D}(f)$.
Demnach ist $[0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \mapsto x$ ein Gegenbeispiel. $\longrightarrow$ falsch

5. Seien I_1, I_2 disjunkte offene Intervalle und C_1, C_2 reelle Zahlen mit $C_1 \neq C_2$.
Offenbar ist $x \mapsto \begin{cases} C_1 & : x \in I_1 \\ C_2 & : x \in I_2 \end{cases}$
eine nicht-konstante Funktion mit verschwindender Ableitung. $\longrightarrow$ wahr