

Aufgabe 1 [3+5 Punkte]

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

gilt.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Benutzen Sie den Identitätssatz.

- (b) Ist die Exponentialfunktion eingeschränkt auf den Bereich $M = \{x+iy \mid x-\pi < y < x+\pi\}$ injektiv? Das heißt: Gilt $f(z_1) \neq f(z_2)$ für alle $z_1 \neq z_2$ aus M ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 [12 Punkte]

Berechnen Sie eine Laurent Entwicklung von

$$f(z) = \frac{4z - 2}{z(z+1)(z-1)}$$

um $z_0 = -1$ die für $z = i$ konvergiert. Geben Sie das maximale Gebiet an, auf dem die berechnete Reihe konvergiert.

Aufgabe 3 [3+9 Punkte]

Sei $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und habe in a einen Pol k -ter Ordnung.

- (a) Formulieren Sie für dieses f den Residuensatz.

- (b) Beweisen Sie diesen Satz.

Hinweis: Stellen Sie für den Beweis f durch eine geeignete Laurentreihe dar.

Aufgabe 4 [3+15 Punkte]

Gegeben sei das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{x^2 - \omega^2} dx \quad \text{mit } \xi \in \mathbb{R}, \omega > 0.$$

- (a) Geben Sie an, in welchem Sinne das Integral konvergiert.

- (b) Berechnen Sie den Wert des Integrals.