

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sei $f(x+iy) = |x| - i|y|$. Untersuchen Sie, für welche $z = x+iy \in \mathbb{C}$ die Funktion f holomorph ist und für welche nicht.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Berechnen Sie eine Laurent-Entwicklung von

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 3}{(z-2)(z^2 - 3z + 2)}$$

um $z = 1$, so dass die Laurent-Entwicklung für $z = -\frac{1}{2}$ konvergiert. Geben Sie ferner das maximale Gebiet an, auf dem die berechnete Reihe konvergiert.

Aufgabe 3 [3+4 Punkte]

(a) Berechnen Sie $\int_{|z|=\alpha} z^n dz$ für $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_{|z|=1} \frac{e^{\bar{z}}}{z} dz \right| \leq 2\pi e.$$

Aufgabe 4 [2+13 Punkte]

Gegeben sei das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2 - 5x + 6} dx \quad \text{mit } t > 0.$$

(a) Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals und geben Sie, an in welchem Sinne Sie es verstehen.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals.