

1 Einführung

Größe	International	DIN
Istwert / Regelgröße	y	X
Sollwert / Führungsgröße	w	W
Regeldifferenz	e	X_d
Stellgröße	u	Y
Störgröße	z, d, n	Z

2 Differentialgleichungen

Variation der Konstanten

$$u'(x) + a(x)u(x) = f(x)$$

$$L_{inh} = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot f(x) dx$$

3 Laplace-Transformation

- Verschiebungssatz:**

$$\mathcal{L}[x(t - T_t)] = e^{-sT_t} \cdot X(s)$$
- Dämpfungssatz:**

$$\mathcal{L}[x(t)e^{-at}] = X(s + a)$$
- Ähnlichkeitssatz:**

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$
- Differentiationssatz:**

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = -x(0^-) + s \cdot X(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n X(s) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s^\nu x^{(n-1-\nu)}(0^-)$$
- Integrationssatz:**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} X(s)$$
- Faltungssatz:**

$$[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s) \cdot X_2(s)$$
- Grenzwertsätze**

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

$$\dot{x}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} -sx(0^+) + s^2 \cdot X(s)$$




$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$







$$\dot{x}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot X(s)$$
- Partialbruchzerlegung**

$$B_{\nu_i} = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left((s-s_\nu)^r \frac{Z(s)}{N(s)} \right) \Big|_{s=s_\nu}$$

4 Modellbildung im Frequenzbereich

Impedanzen

Name	Symbol	Impedanz ($Z = \frac{U}{I}$)
Kapazität		$\frac{1}{Cs}$
Widerstand		R
Induktivität		Ls

Name	Symbol (Transl.)	Symbol (Rot.)	Impedanz ($Z_M = \frac{F}{sX}$)	Impedanz ($Z_\theta = \frac{T}{s\theta}$)
Feder			$\frac{K}{s}$	$\frac{K}{s}$
Dämpfer			d	D
Trägheit			ms	Js

Newton

- 1. Newtonsches Gesetz: $\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}$
- 2. Newtonsches Gesetz: $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$
- 3. Newtonsches Gesetz: $\vec{F}_T = \vec{F}^{(e)}$

Getriebe

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Transformation: Impedanzen kann man auf die Antriebsseite abbilden, indem man mit $\left(\frac{N_{\text{Antrieb}}}{N_{\text{Abtrieb}}}\right)^2$ multipliziert.

Gleichstrommotor

$$T_m = K_t \cdot I_a, U_{ind} = K_b \cdot s\theta_m$$

$$T_m|_{\omega_m=0} = T_{m,\text{halte}} = \frac{K_t}{R_a} u_a$$

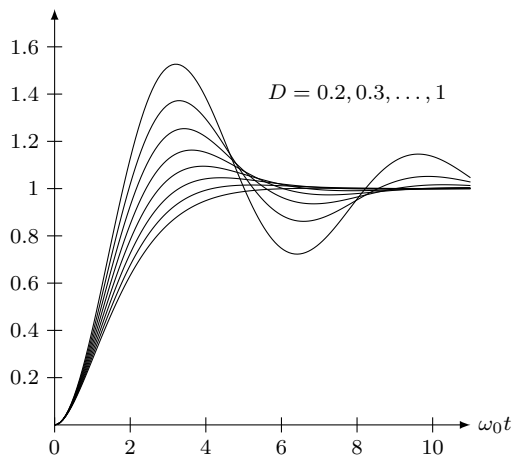
$$\omega_m|_{T_m=0} = w_{m,\text{leer}} = \frac{u_a}{K_b}$$

5 Dynamisches Verhalten

Systeme zweiter Ordnung

- $s_{1,2} = -a_{1,2}$ $D > 1$ aperiodisch gedämpft
- $s_{1,2} = -a$ $D = 1$ aperiodischer Grenzfall
- $s_{1,2} = -a \pm j\omega_r$ $0 < D < 1$ periodisch gedämpft
- $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ $D = 0$ ungedämpft
- $s_{1,2} = a \pm j\omega_r$ $-1 < D < 0$ instabil
- $s_{1,2} = a_{1,2}$ $D \leq -1$ instabil

- Pole: $-D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2} = -a \pm j\omega_r$



- Anstiegszeit T_r : Zeit für den Übergang von 10 % zu 90 %
- Überschwingzeit: Zeit bis zum Erreichen des ersten Maximums der Sprungantwort ($T_p \simeq \text{Imaginärteil}$)

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} = \frac{\pi}{\omega_r}$$
- Ausregelzeit: Zeit bis zum erstmaligen Erreichen und Verbleiben im Intervall $\pm 2\%$ vom Endwert ($T_s \simeq \text{Realteil}$)

$$T_{s,2\%} = -\frac{\ln(0,02\sqrt{1-D^2})}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0} = \frac{4}{\alpha}$$

$$T_{s,5\%} = -\frac{\ln(0,05\sqrt{1-D^2})}{D\omega_0} \approx \frac{3}{D\omega_0} = \frac{3}{\alpha}$$
- %OS: Maximales Überschwingen ($\%OS \simeq D = \cos \theta$)

$$\%OS = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}}$$
- zusätzliche negative Nullstellen machen das System schneller
- positive Nullstellen machen das System nicht-minimalphasig

6 Dynamisches Verhalten linearer Regelsysteme

- Phasenminimales Verhalten
 - Alle Nullstellen in der linken Halbebene
 - keine Totzeit
 - stabile oder grenzstabile Pole
- Elementare Übertragungsglieder
 - Übertragungsglied ($PII D_m T_n$)

$$G(s) = K \cdot \frac{(1 + T_{D1}s) \cdot (1 + T_{D2}s) \cdot \dots \cdot (1 + T_{Dm}s)}{s^l \cdot (1 + T_1s) \cdot (1 + T_2s) \cdot \dots \cdot (1 + T_ns)}$$

$$= \frac{K}{s^l} \cdot \frac{1 + (T_{D1} + \dots + T_{Dm})s + \dots + (T_{D1} \dots T_{Dm})s^m}{1 + (T_1 + \dots + T_n)s + \dots + (T_1 \dots T_n)s^n}$$

- Proportionalglied (P -Glieder): K_P
- Integrierglied (I -Glieder): $\frac{K_I}{s}$
- Differenzierglied (D -Glieder): $K_D s$
- Zusammengesetztes \ddot{U} -Glieder (PID -Glieder): $K \left(\frac{1}{T_I s} + 1 + T_D s \right)$
- Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT_1 -Glieder): $\frac{K}{1+s \cdot T}$
- Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2 -Glieder): $\frac{K \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2D\omega_0 \cdot s + s^2}$
- Verzögerungsglied n -ter Ordnung (PT_n -Glieder): $\frac{K}{1+a_1 s + \dots + a_n s^n}$
- Vorhaltglieder: $K(1 + T_{D1}s + T_{D2}^2 s^2 + \dots + T_{Dm}^m s^m)$
- Vorhaltglied 1. Ordnung (PD -Glieder): $K \cdot (1 + T_{D1}s)$
- Vorhaltglied mit Verzögerung (DT_1 -Glieder): $\frac{K_D s}{1+sT_1}$
- Verzögerndes Integrierglied (IT_1 -Glieder): $\frac{1}{s} \cdot \frac{K_I}{1+sT_1}$

Eigenschaften geregelter Systeme

- Dynamischer Regelfaktor (Empfindlichkeitsfunktion): $R(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}$
- Parameteränderung: $G_2 \rightarrow G_2 + \Delta G_2$
 - * ohne Rückkopplung: $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_2}{G_2}$
 - * mit Rückkopplung: $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_2}{G_2} \cdot R(s)$
 - * Empfindlichkeit: $S_{G_2} = R(s)$
- Parameteränderung: $G_3 \rightarrow G_3 + \Delta G_3$
 - * ohne Rückkopplung: $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_3}{G_3}$
 - * mit Rückkopplung: $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_3}{G_3} \cdot -\frac{G_0}{1+G_0}$
 - * Empfindlichkeit: $S_{G_3} = \frac{G_0}{1+G_0}$
- Charakteristische Gleichung: $1 + G_0(s) = 0$
- Zum verhindern bleibender Regelabweichung:

Prozess	Sprung am Eingang	Störung am Prozessausgang	Störung am Prozesseingang
P	I -Verhalten	I -Verhalten	I -Verhalten
I	P -Verhalten	P -Verhalten	I -Verhalten

7 Stabilität

- Definition: $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$
- System ist stabil, wenn die Antwort auf Anfangsbedingungen abklingt
- BIBO-Stabil: every bounded input produces a bounded output
- Stabilität bei LTI-Systemen
 - asymptotisch stabil: nur Pole in der linken Halbebene
 - instabil: mehrfach-Pol auf der imaginären Achse oder Pol in der rechten Halbebene
 - grenzstabil: einer oder mehrere einfach-Pole auf der imaginären Achse, keine Pole in der rechten Halbebene

Hurwitz-Kriterium

- Notwendige Bedingung: $a_i > 0 \forall i$
- Hurwitz-Determinanten:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0/a_1 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_0/a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

D_{Hi} : i -te Hauptuntermatrix

Kriterium: $a_i > 0$ und $D_{Hi} > 0$ für alle $i \leq n$

Routh-Hurwitz-Kriterium

Routh-Schema:

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$-\frac{a_4 a_2}{a_3 a_1} = b_1$	$-\frac{a_4 a_0}{a_3 a_1} = b_2$	$-\frac{a_4 0}{a_3 0} = 0$
s^1	$-\frac{a_3 a_1}{b_1 b_2} = c_1$	$-\frac{a_3 0}{b_1 0} = 0$	$-\frac{a_3 0}{b_1 0} = 0$
s^0	$-\frac{b_1 b_2}{c_1 0} = d_1$	$-\frac{b_1 0}{c_1 0} = 0$	$-\frac{b_1 0}{c_1 0} = 0$

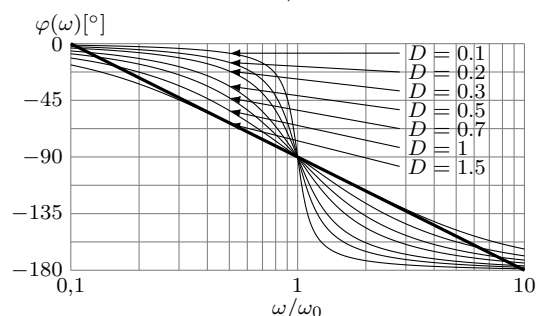
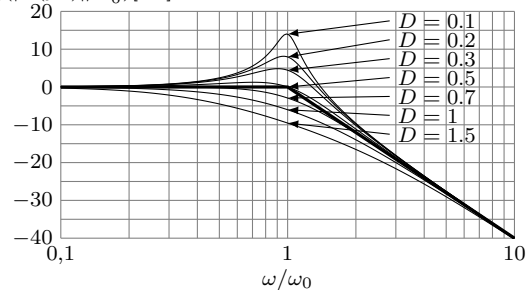
- Kriterium: Die Zahl der Pole in der rechten Halbebene ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel in der 1. Spalte des Routh-Schemas
- 1. Spezialfall: Nulleinträge in der ersten Spalte. Lösung: ε -Methode
- 2. Spezialfall: Nulleinträge in einer Zeile. Lösung:
 - * Bilde Hilfspolynom mit Koeffizienten aus Zeile über Nullzeile. Höchste Potenz ist die dieser Zeile zugeordnete Potenz. Potenzen fallen in 2-er Schritten.
 - * Differenziere Hilfspolynom. Trage dies anstelle der Nullzeile ein.

8 Frequenzgang und Bode-Diagramm

Ortskurven

- PT_1 : Halbkreis
 - $G(j\omega)|_{\omega=0} = K$
 - $G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = -j \cdot \frac{K}{2D}$
- PT_2
 - $G(s) = \frac{K}{1+T_1 s + T_2^2 s^2 + T_3^3 s^3}$
 - Schnittpunkt mit imaginären Achse
 $\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{T_2}$
 - Schnittpunkt mit reellen Achse
 $\omega_3 = 0$ oder $\omega_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}$
- PT_n : $\varphi_{\max} = -n \cdot \frac{\pi}{2}$
- D -Glieder: positive imaginäre Achse
- I -Glieder: negative imaginäre Achse
- IT_1 -Glieder: $G(s) = K_I \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+T_1 s}$, $G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = -K_I T_1 - j\infty$
- Totzeitglied: Kreise im mathematisch negativem Sinn

$20 \log(|G(j\omega)|/\omega_0^2) [\text{dB}]$



9 Nyquist-Kriterium

- Die Anzahl der instabilen Pole des geschlossenen Kreises ergibt sich aus der Differenz von instabilen Polen des offenen Kreises und der Anzahl U der mathematisch positiven Umläufe um $(-1, 0)$.

$$r_g = r_o - U \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

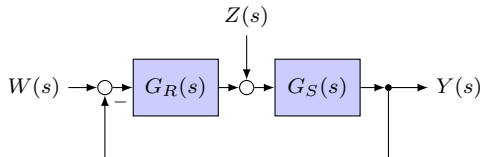
- Der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil, wenn die vollständige Ortskurve des offenen Kreises $G_0(j\omega)$ den kritischen Punkt $(-1, 0)$ $r_o + \frac{a_0}{2}$ mal im Gegenuhrzeigersinn umkreist.

$$r_g + \frac{a_g}{2} = r_o + \frac{a_0}{2} - U \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

- U = Anzahl der Umläufe. Für $0 < \omega < \infty$ muss die Zahl halbiert werden.
- Einfache Version: $r_o = 0, a_o = 0$
- Phasenrand $\alpha_{Rd} = 180^\circ + \varphi(\omega_D)$ mit $|G_0(j\omega_D)| = 1$
- Amplitudenrand $A_{Rd} = |G_0(j\omega'_D)|$ mit $\varphi(\omega'_D) = 180^\circ$. Günstig: -20 dB bis -8 dB

10 Entwurf von Regelkreisen

- Standard-Regelkreis



$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \cdot W(s) + \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)} \cdot Z(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot W(s) - \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)} \cdot Z(s)$$

- Stationärer Fehler:

Systemtyp	Stationärer Fehler $e(\infty)$ für		
N	$W(s) = \frac{A}{s}$	$W(s) = \frac{B}{s^2}$	$W(s) = \frac{C}{s^3}$
0	$\frac{A}{1+K_0}$	∞	∞
1	0	$\frac{B}{K_0}$	∞
2	0	0	$\frac{C}{K_0}$

- 2. Ordnung

- Amplitudenüberhöhung: $\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2D^2}$,
 $A_{\max}(\omega) = A(\omega_R) = \frac{K}{2D\sqrt{1-2D^2}} \cdot \frac{1}{\omega_0^2}$
- $G_{\text{ges}}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$
 $\Rightarrow G_0(s) = \frac{\omega_0^2}{s \cdot (s + 2D\omega_0)} \Rightarrow \omega_D = \omega_0 \sqrt{\sqrt{4D^4 + 1} - 2D^2}$
- $\Rightarrow \alpha_{Rd} = \tan^{-1} \left(\frac{2D}{\sqrt{\sqrt{4D^4 + 1} - 2D^2}} \right) \approx 0,01 \alpha_{Rd} / \text{Grad}$
für $0 \leq \alpha_{Rd} < 70^\circ$

- Strukturstable Regelkreise

Regelstrecke	Regler
P	P, I, PI
PT_1	P, I, PI
PT_2	P
I	P, PI
IT_1	P
I_2	PD

- Ziegler-Nichols:

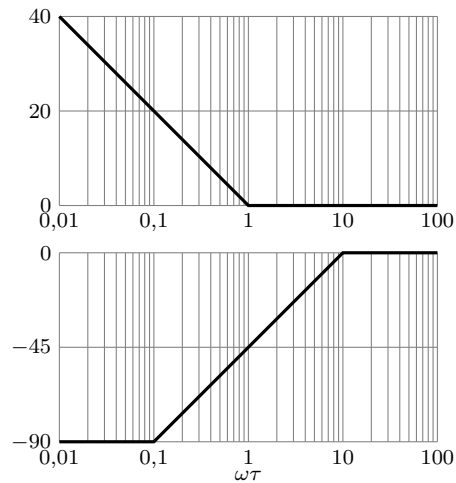
- Methode 1: G_s durch Totzeit T_t und PT_1 mit Zeitkonstante T und Endwert K_s approximieren
- Methode 2: Schwingversuch: Regelkreis mit P -Regler schließen, und K auf $K_{p,\text{krit}}$ erhöhen, bei der eine Dauerschwingung mit Periode T_{krit} auftritt

- Chien, Hrones, Reswick: Approximation wie bei Methode 1 oben.

$$G_R(s) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s \right)$$

- PI -Regler

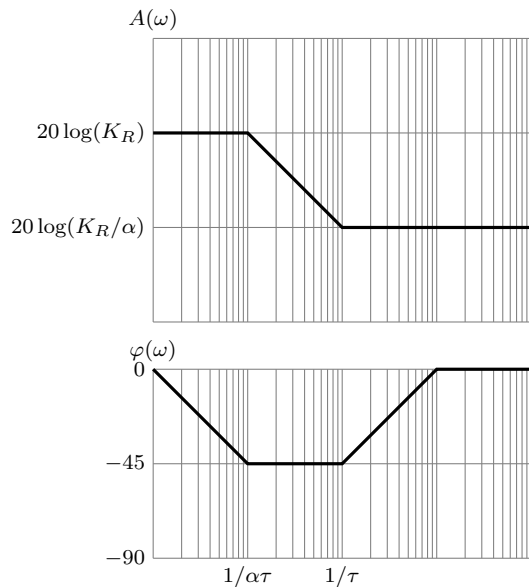
$$G_R(s) = \frac{K_R}{s} (1 + s\tau)$$



- Falls Stabil: Lege $\tau = T_1$, wobei T_1 die größte Zeitkonstante ist.
- z.B. wähle K_R so, dass α_{Rd} erfüllt wird

- Nichtidealer PI -Regler

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \alpha > 1$$

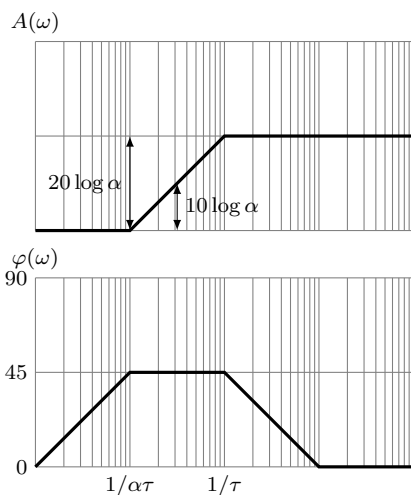


- Bestimmung von K_R so, dass stationärer Fehler innerhalb von Grenzen
- Aufzeichnen von $K_R G(s)$ im Bode-Diagramm
- Durchtrittsfrequenz ω_D bei $\alpha_{Rd} + 5^\circ$ einzeichnen
- Nullstelle von $G_R(s)$ bei $\frac{1}{\tau} = 0,1\omega_D$ festlegen
- α ergibt sich dann aus $\alpha = |G(\omega_D)|K_R$

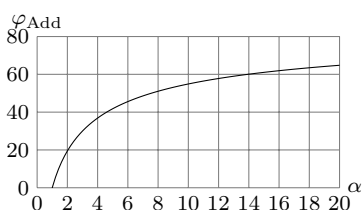
- Idealer PD -Regler: $G_K(s) = K_R(1 + T_D s)$

- Realer PD -Regler

$$G_K(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \alpha > 1$$

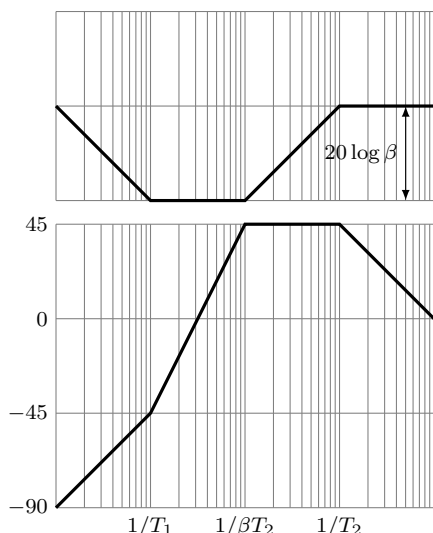


- Bestimmung von K_R so, dass stationärer Fehler innerhalb der Fehlertoleranz
- Aufzeichnen von $K_R G(s)$
- Bestimmung von α_{Rd} und φ_{Add} (+5°)
- Bestimmung von α mit $\varphi_{Add} = \arcsin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1+\sin(\varphi_{Add})}{1-\sin(\varphi_{Add})}$



- Frequenz, bei der $|K_R G(j\omega)| = -10 \log \alpha$, ist ω_D und ω_{Mitte}
- Pol: $\frac{1}{T} = \omega_D \sqrt{\alpha}$
- Nullstelle: $\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_D}{\sqrt{\alpha}}$
- Überprüfe Phasenrand, und wiederhole ggf.

• PID-Regler



- $G_R(s) = \frac{K_R}{s} (1 + T_1 s) \frac{1 + \beta T_2 s}{1 + T_2 s}$
- Bestimmung von K_R so, dass stationärer Fehler innerhalb der Fehlertoleranz liegt
- Aufzeichnen von $K_R G(s)$, Bestimmung des Phasenrands α_{Rd} und der zusätzlichen notwendigen Phasenvoreilung φ_{Add}
- Bestimmung von β wie α oben. $\omega_D = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta} T_2} \Rightarrow \frac{1}{T_2} = \sqrt{\beta} \omega_D$
- $\omega_D > \frac{1}{T_1}$ und $\frac{1}{T_2} > \omega_D > \frac{1}{\beta T_2}$: $T_1 = \frac{1}{|K_R G(j\omega_D)| \sqrt{\beta}}$

• Lead-Kompensation (Phasenhebendes Korrekturglied)

- $G_R(s) = \frac{1+T_D s}{1+T_v s}$ mit $T_D > T_v$ (PDT_1)

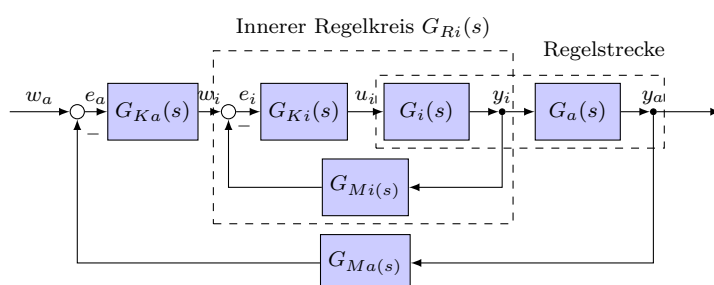
• Lag-Kompensation (Phasenabsenkendes Korrekturglied)

- $G_R(s) = \frac{1+T_D s}{1+T_v s}$ mit $T_D < T_v$ (PDT_1)

• Zusammenfassung

1. Stabilitätsreserve wird durch Phasenrand und Amplitudenrand bestimmt
2. Kreisverstärkung $G_0(0)$ beeinflusst statisches Verhalten
3. Harmonische Schwingungen mit Frequenz größer als ω_D werden gedämpft. ω_D gibt auch Anstiegszeit (Schnelligkeit) an.
4. Phasenhebung bewirkt i.A.
 - Vergrößerung der Stabilitätsreserve
 - Verringerung des Überschwingens der Regelgröße
5. Phasenabsenkung bewirkt i.A.
 - Amplitudengang wird abgesenkt und damit ω_D verringert
 - verkleinert die Stabilitätsreserve
6. Amplitudengang soll um ω_D mit 20 dB / Dekade abfallen, denn dann ist der Phasenrand $\approx 0^\circ$ bis 90°

11 Kaskadenregelung, Störgrößenaufschaltung



12 Wurzelortskurve

- Amplitudenbedingung: $|G(s)| = \frac{1}{K}$
- Phasenbedingung: $\arg[G(s)] = \pm 180^\circ (2k + 1)$

1. Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse.

2. Die WOK besteht aus n Ästen. $(n - m)$ Äste enden im Unendlichen. Alle Äste beginnen mit $K = 0$ in den Polstellen und enden mit $K \rightarrow \infty$ in den Nullstellen bzw. im Unendlichen.

3. Wurzelschwerpunkt:

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \left(\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re} s_{p_\nu} - \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Re} s_{N_\mu} \right)$$

4. Ein Punkt auf der reellen Achse gehört zur WOK, wenn die Gesamtzahl der rechts von ihm liegenden Pole und Nullstellen ungerade ist.

5. Verläuft die WOK auf der reellen Achse zwischen zwei Nullstellen, gibt es einen Vereinigungspunkt, zwischen zwei Polen einen Verzweigungspunkt.

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(s - s_{p_\nu})} = \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{(s - s_{N_\mu})}$$

6. Austritts- bzw. Eintrittswinkel:

$$\varphi_{P_{e,A}} = \frac{1}{r_{P_e}} \left(- \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq e}}^n \varphi_{P_\nu} + \sum_{\mu=1}^m \varphi_{N_\mu} \pm 180^\circ (2k + 1) \right)$$

$$\varphi_{N_{e,E}} = \frac{1}{r_{N_e}} \left(- \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq e}}^m \varphi_{N_\mu} + \sum_{\nu=1}^n \varphi_{P_\nu} \pm 180^\circ (2k + 1) \right)$$

7. Belegung der WOK mit K -Werten:

$$K = \frac{\prod_{\nu=1}^n |s - s_{p_\nu}|}{\prod_{\mu=1}^m |s - s_{N_\mu}|}$$

8. Asymptotische Stabilität für alle K liegt vor, wenn die WOK links der imaginäre Achse liegt.