Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Klausur zur Höheren Mathematik I
09.03.2012

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Beweisen Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

gilt.

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Untersuchen Sie folgende rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls existent, den Grenzwert:

$$a_1 := -\frac{1}{4}, \quad a_{n+1} := a_n^2 + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 [8 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \text{ definiert durch } f(x) = \frac{3x}{2+x}$$

im Intervall $(0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Ist die folgende Funktion in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar?

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & x \in (0,\infty) \\ e^{-x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Aufgabe 4 [16 Punkte]

(a) Geben Sie ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ an.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+7n^2+9}.$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.$$

bitte wenden!

Aufgabe 5 [11 Punkte]

Sei

$$A := \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & a & 3 \\ -2 & -3 & a \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A. (Überprüfung: für $a = 1$ gilt $\det(A) = 15$)

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat A vollen Rang?

(c) Geben Sie für $a = 0$ den Rang von A sowie die Dimension des Kerns von A an.

(d) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung?

(ii) genau eine Lösung?

(iii) mehr als eine Lösung? Geben Sie in diesem Fall die Menge der Lösungen an.

Viel Erfolg!