EMF I Großübung

Christian Lautensack
Mitschrift: Marius Geis

21. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

- Christian Lautensack
- cl@ithe.rwth-aachen.de
- 0241-80-23904

Blatt 1

Aufgabe 1

1. $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{J}$
2. $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$
3. $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$
4. $\operatorname{div}\vec{B} = 0$
5. $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$
6. $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu\vec{H}$
7. $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$

1.-4.: Maxwell'sche Gleichungen
5.-6.: lineare, isotrope Materialgleichungen
7.: Ohm'sches Gesetz

a) unendlich ausgedehntes, homogenes, lineares, isotropes Medium mit Materialkonstanten ε, μ & σ. Ladungsverteilung für $t = 0$ ist:

$$\rho(r,0) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

elektrische Feldenergie:

$$W_{\mathrm{el}} = \int\limits_V w_{\mathrm{el}}\,\mathrm{d}V$$

mit w_{el} der Energiedichte des elektrischen Feldes. Satz von Gauß:

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{A} = \oint\limits_F \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{F}$$

mit Gl. 3 folgt:

$$\int\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = \oint\limits_F \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{F} \text{ (Integralform der 3. Maxwellschen Gleichung)}$$

Ansatz:

$$\vec{D} = D_r(r)\cdot\vec{e}_r \text{ (Symmetrie)}$$

$$\begin{aligned}\oint\limits_F \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{F} &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_r(r)\cdot\vec{e}_r\cdot\underbrace{r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\cdot\vec{e}_r}_{\mathrm{d}\vec{F}} \\ &= D_r(r)\cdot r^2\cdot\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi\cdot 2\cdot D_r(r)\cdot r^2\end{aligned}$$

$$\int\limits_V \rho(r)\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^r \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \rho(r)\,\underbrace{r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}V}$$
$$= \begin{cases} \rho_0 4\pi \frac{r^3}{3} & r \leq a \\ \rho_0 4\pi \frac{a^3}{3} & r > a \end{cases}$$

Gleichsetzen:

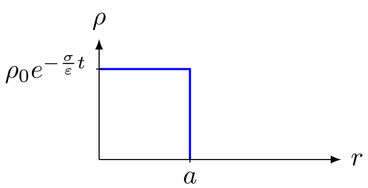
$$\cancel{4\pi} r^2 D_r(r) = \begin{cases} \rho_0 \cancel{4\pi} \frac{r^3}{3} & r \leq a \\ \rho_0 \cancel{4\pi} \frac{a^3}{3} & r > a \end{cases}$$
$$\Rightarrow D_r(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{3} & r \leq a \\ \rho_0 \frac{a^3}{3r^2} & r > a \end{cases}$$
$$W_{\mathrm{el}} = \int\limits_V w_{\mathrm{el}}\,\mathrm{d}V = \int\limits_V \frac{1}{2\varepsilon} D_r(r)^2\,\mathrm{d}V$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\varepsilon} D_r(r)^2 \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r$$
$$= \int\limits_0^a \frac{4\pi}{2\varepsilon} \left(\rho_0 \frac{r}{3}\right)^2 r^2\,\mathrm{d}r + \int\limits_a^\infty \frac{4\pi}{2\varepsilon} \left(\rho_0 \frac{a^3}{3r^2}\right)^2 r^2\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{4\pi\rho_0^2}{18\varepsilon} \int\limits_0^a r^4\,\mathrm{d}r + \frac{4\pi\rho_0^2 a^6}{18\varepsilon} \int\limits_a^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{90\varepsilon_0} + \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{18\varepsilon} = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon}$$

b) Berechne $\rho(r,t)$ für $t > 0$:

Gleichung 1:

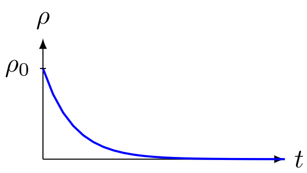
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$
$$\overset{\text{Gleichung 3}}{\Rightarrow} \underbrace{\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H})}_{=0} = \mathrm{div}\,\vec{J} + \underbrace{\mathrm{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}\rho(r,t)}$$
$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(,t)$$
$$\overset{\text{Gleichung 7}}{\Rightarrow} \mathrm{div}(\sigma\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(r,t)$$
$$\overset{\text{Gleichung 5}}{\Rightarrow} \frac{\sigma}{\varepsilon}\,\mathrm{div}\,\vec{D} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(r,t)$$
$$\overset{\text{Gleichung 3}}{\Rightarrow} \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho(r,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(r,t)$$
$$\Rightarrow \rho(r,t) = \rho(r, t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \begin{cases} \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

1) $t = \mathrm{const}$



2) $r = \mathrm{const}$

$r \leq a$: $r > a$:



c) $E_r(r,t) = \frac{1}{\varepsilon} D_r(r,t)$

$D_r(r,t)$ muss $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ erfüllen. Mit

$$\rho(r,t) = \begin{cases} \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

ist dies mit

$$D(r,t) = D_r(r, t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

erfüllt.

Aus Symmetrigründen ist nur ein Magnetfeld denkbar dessen ϑ und φ-Komponenten verschwinden und dessen r-Komponente nur vom Radius abhängt.

Da $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ immer gilt, muss auch diese Komponente verschwinden.

rechnerisch:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{D}}_{=0 \text{ für } \vec{D} = D_r(r) \cdot \vec{e}_r} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

mit $\vec{B}(t=0) = 0$ folgt $\vec{B}(t) = 0$

d) Freiwerdende Wärmeenergie:

$$W_J = \int\limits_0^\infty P_J \, \mathrm{d}t$$

mit $P_J = \int\limits_V p_J \, \mathrm{d}V$ und $p_J = \vec{J} \cdot \vec{E}$:

$$p_J = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \vec{D}^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D_r(r,t)^2$$

mit $D_r(r,t) = D_r(r) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_J &= \int\limits_V p_J \, \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \int\limits_V D_r(r)^2 e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon} t} \, \mathrm{d}V \\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon^2} e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon} t} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{a} \left(\rho_0 \frac{r}{3} \right)^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_a^{\infty} \left(\rho_0 \frac{a^3}{3r^2} \right)^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \right) \\ &= \frac{8\pi a^5 \sigma \rho_0^2}{15\varepsilon^2} \cdot e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon} t} \\ \Rightarrow W_J &= \int\limits_0^\infty P_J \, \mathrm{d}t = \left[\frac{8\pi a^5 \sigma \rho_0^2}{15\varepsilon^2} \left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma} \right) \cdot e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon} t} \right]_0^\infty \\ &= \frac{4\pi a^5 \rho_0^2}{15\varepsilon} = W_{\mathrm{el}} \big|_{t=0} \end{aligned}$$

Leistungsbilanz:

$$-\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

Wärmeenergie kommt aus der Abnahme der Feldenergie.

Aufgabe 2

a) Quasistationäre Näherung:

ω ist so klein, dass kein Skineffekt auftritt. Alle zeitlichen Ableitungen in den Maxwell'schen Gleichungen werden vernachlässigt und der Strom ist homogen über den Querschnitt verteilt.

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 \cos \omega t \\
\vec{J}_{\text{innen}} &= \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_z = \frac{I}{\pi r_i^2} \cdot \vec{e}_z \text{ (Innenleiter)} \\
\vec{J}_{\text{aussen}} &= \frac{-I}{\pi \left(r_{a_2}^2 - r_{a_1}^2\right)} \cdot \vec{e}_z \text{ (Außenleiter)}
\end{aligned}
$$

b) Wähle Zylinderkoordinaten

Aufgrund von Symmetrie hat die magn. Feldstärke $\vec{H}$ nur eine H_φ-Komponente.

$$
\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{F} \text{ (1. Maxwell'sche Gleichung)}
$$

1) $r < r_i$

$$
\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = 2\pi r \cdot H_\varphi(r) = \frac{I}{\pi r_i^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\varphi = I \frac{r^2}{r_i^2}
$$

$$
\Rightarrow H_\varphi(r) = \frac{r \cdot I}{2\pi r_i^2}
$$

2) $r_i < r < r_{a_1}$

$$
\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = 2\pi r \cdot H_\varphi(r) = \underbrace{\frac{I}{\pi r_i^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} r'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\varphi}_{I} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r} 0\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\varphi}_{0}
$$

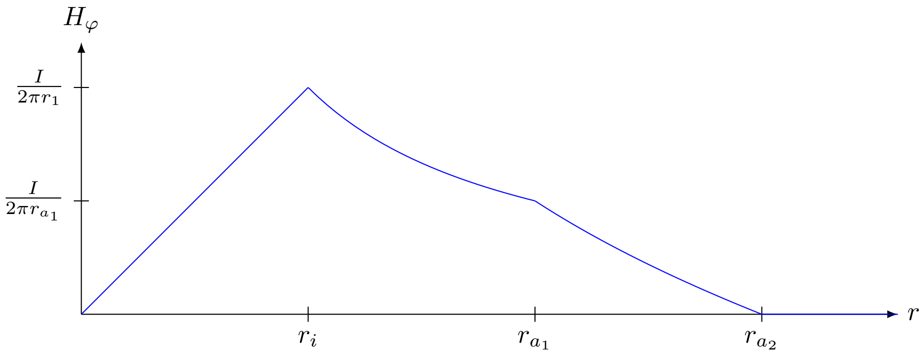
$$
\Rightarrow H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r}
$$

3) $r_{a_1} < r < r_{a_2}$

$$
\begin{aligned}
2\pi r \cdot H_\varphi(r) &= \frac{I}{\pi r^2} \int_0^{r_i} \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r - \int_{r_{a_1}}^{r} \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi (r_{a_2}^2 - r_{a_1}^2)} r'\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r' \\
&= I - \frac{2\pi I}{\pi (r_{a_2}^2 - r_{a_1}^2)} \left[\frac{r'^2}{2}\right]_{r_{a_1}}^{r} \\
H_\varphi(r) &= \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - r_{a_1}^2}{r_{a_2}^2 - r_{a_1}^2}\right)
\end{aligned}
$$

4) $r > r_{a_2}$

$$
2\pi r \cdot H_\varphi(r) = 0 \Rightarrow H_\varphi(r) = 0
$$

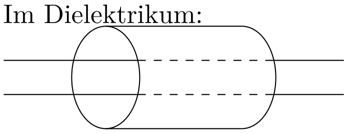


c) Potentialdifferenz zu Innen & Außenleiter: $V_i - V_a = R \cdot I$

$\vec{D}$ und $\vec{E}$ haben nur eine radiale Komponente ($\vec{D} = D_r(r) \cdot \vec{e}_r$)

$\rho = 0$ im Dielektrikum, nur Ladung auf dem Inneleiter und auf der Innenseite des Außenleiters.

Im Dielektrikum:



$$\underbrace{\int_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{=\rho} \, \mathrm{d}V}_{\text{const}} = \oint_A \vec{D} \, \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\Rightarrow D_r \sim \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{c}{r}$$

$$V_i - V_a = \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r} = c \int_{r_i}^{r_{a_1}} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r = c \cdot \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right) \stackrel{!}{=} R \cdot I$$

$$\Rightarrow c = \frac{R \cdot I}{\ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \Rightarrow E_r = \frac{R \cdot I}{r \cdot \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)}$$

d) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E_r(r) \cdot \vec{e}_r, \vec{H} = H_\varphi(r) \cdot \vec{e}_\varphi \\
\Rightarrow \vec{S} &= E_r(r) \cdot \vec{e}_r \times H_\varphi(r) \cdot \vec{e}_\varphi \\
&= E_r(r) \cdot H_\varphi(r) \cdot \vec{e}_z \\
&= \frac{R \cdot I}{r \cdot \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_z \\
&= \frac{R \cdot I^2}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \cdot \vec{e}_z \\
\vec{S}(t) &= \frac{R \cdot I_0^2 \cos^2 \omega t}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

e) In Wärme ungesetzte Leistung

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot I_0^2 \\
\overline{\vec{S}} &= \frac{R \cdot I_0^2}{4\pi r^2 \cdot \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\int_A \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_{a_1}} \frac{R\cdot I_0^2}{4\pi r^2 \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{2\pi R I_0^2}{4\pi \ln\left(\frac{r_{a_1}}{r_i}\right)} \cdot \int_{r_i}^{r_{a_1}} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{2}\cdot R\cdot I_0^2$$

Blatt 2

Aufgabe 3

Zur Aufgabenstellung Die Welle ist: (Def 2.1 Skript S. 21)

1) eben $\Rightarrow$ Flächen konstanter Phase ($t = \text{const}$) sind Ebenen ($\vec{k}_e = \text{const}$)
2) harmonsich $\Rightarrow$ Feldgrößen haben eine harmonische Zeitabhängigkeit (cos & sin)
3) homogen $\Rightarrow$ Welle ist auf der Phasenfläche homogen ($E_{e0} \neq f(\vec{r}), E_{e0} = \text{const}$)
4) linear polarisiert $\Rightarrow$ für $\vec{r} = \text{const}$ liegt der Feldgrößenvektor für alle t auf einer Geraden.

Im Skript (Kap 2.3) wurde die allgemeine Form einer ebenen, homogenen, harmonischen elektromagnetischen Welle in homogener, isotroper Materie mit $\rho = 0, \sigma = 0$ hergeleitet:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}_0 e^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\}$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{H}}_0 e^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\}$$

($\underline{\vec{E}}_0, \underline{\vec{H}}_0$ sind beliebige komplexe Vektoren)

$$\vec{k} = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu_0}\cdot\omega\cdot\underbrace{\vec{n}}_{\text{Ausbreitungsrichtung}}$$

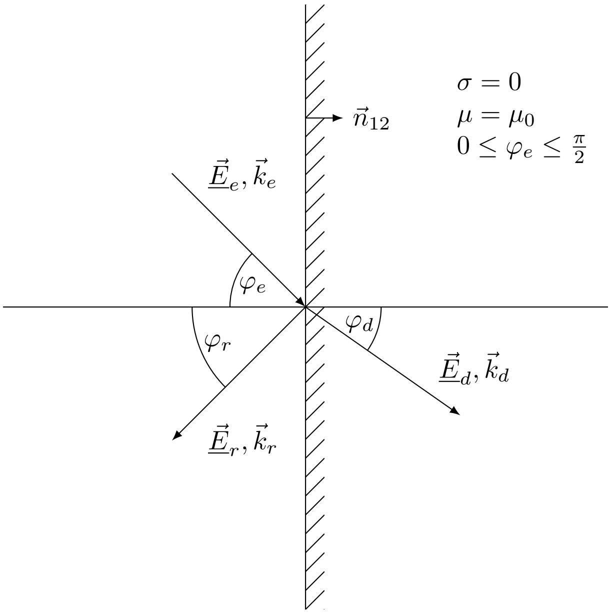
$\vec{H}$ & $\vec{E}$ erfüllen die Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon(\omega)\cdot\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}, \quad \vec{H} \text{ analog}$$

TEM-Welle

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_0\cdot\vec{k} = 0, \quad \underline{\vec{H}}_0\cdot\vec{k} = 0 \tag{1}$$
$$\underline{\vec{H}}_0 = \frac{\vec{k}\times\underline{\vec{E}}_0}{k\cdot Z_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{2}$$

a) Ansatz einer reflektierten (Index r) und einer durchgehenden (Index d) Welle, die die Wellengleichung und die Maxwellgleichungen erfüllen.



$$\vec{E}_r(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{\underline{E}}_{r0} \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}\}; \quad \vec{\underline{E}}_{r0} \cdot \vec{k}_r = 0$$
$$\vec{E}_d(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{\underline{E}}_{d0} \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}_d \vec{r})}\}; \quad \vec{\underline{E}}_{d0} \cdot \vec{k}_d = 0$$

mit

$$\vec{k}_r^2 = \vec{k}_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1(\omega)\mu_0$$
$$\vec{k}_d^2 = \vec{k}_2^2 = \omega^2 \varepsilon_2(\omega)\mu_0$$

Die Unbekannten $\vec{\underline{E}}_{r0}$, $\vec{\underline{E}}_{d0}$, $\vec{k}_r$ und $\vec{k}_d$ folgen nun aus den Grenzbedingungen, da die Maxwellgleichungen per Ansatz erfüllt sind.

$$\mathrm{Rot}\, \vec{E} = \vec{0}$$
$$\mathrm{Rot}\, \vec{H} = \vec{J}_f = \vec{0}$$
$$\mathrm{Div}\, \vec{D} = \rho_F = 0$$
$$\mathrm{Div}\, \vec{B} = 0$$

E-Feld berechnen:

$$\mathrm{Rot}\, \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$\Rightarrow$ Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ sind unmittelbar links & rechts der Grenzfläche gleich.

$$\Rightarrow \vec{n}_{12} \times \left(\vec{\underline{E}}_{e0} e^{-\mathrm{j}\vec{k}_e \vec{r}_g} + \vec{\underline{E}}_{r0} e^{-\mathrm{j}\vec{k}_r \vec{r}_g} - \vec{\underline{E}}_{d0} e^{-\mathrm{j}\vec{k}_d \vec{r}_g} \right) = 0 \tag{3}$$

Allgemein gilt: $\vec{\underline{E}}_{e0/r0/d0} \neq 0$. Damit (3) $\forall \vec{r}_g \in$ Grenzfläche gilt muss gelten:

$$\vec{k}_e \cdot \vec{r}_g = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_g = \vec{k}_d \cdot \vec{r}_g \ \forall \vec{r}_g \in \text{Grenzfläche} \tag{4}$$

$\Rightarrow e^{-\mathrm{j}\vec{k}_{e/r/d} \cdot \vec{r}_g}$ kann aus Gleichung (3) gekürzt werden.

$$\Rightarrow \vec{n}_{12} \times (\vec{\underline{E}}_{e0} + \vec{\underline{E}}_{r0} - \vec{\underline{E}}_{d0}) = 0 \tag{5}$$

Für ein beliebiges $\vec{r}$ ist $\vec{r}_g = \vec{r} \times \vec{n}_{12} \in$ Grenzfläche.
Mit $\vec{k}_{e/r/d}(\vec{r} \times \vec{n}_{12}) = \vec{r}(\vec{n}_{12} \times \vec{k}_{e/r/d})$ wird (4) zu

$$\vec{r}(\vec{n}_{12} \times \vec{k}_e) = \vec{r}(\vec{n}_{12} \times \vec{k}_r) = \vec{r}(\vec{n}_{12} \times \vec{k}_d)$$

$\vec{r}$ ist beliebig

$$\Rightarrow \vec{n}_{12} \times \vec{k}_r = \vec{n}_{12} \times \vec{k}_r = \vec{n}_{12} \times \vec{k}_d$$

$\Rightarrow$ Tangentialkomponenten von $\vec{k}_{e/d/r}$ sind gleich.
Aus $|\vec{k}_e| = |\vec{k}_r| = k_1$ und $0 \leq \varphi_{e/r} \leq \frac{\pi}{2}$ folgt:

$$\vec{k}_e = -k_1 \sin\varphi_e \vec{e}_y + k_1 \cos\varphi_e \vec{e}_z \tag{6}$$

$$\vec{k}_r = \underbrace{-k_1 \sin\varphi_r \vec{e}_y}_{\substack{\text{Tangentialkomponente} \\ \Rightarrow \varphi_e = \varphi_r \text{(Reflexionsgesetz)}}} - k_1 \cos\varphi_r \vec{e}_z \tag{7}$$

$$\vec{k}_d = -k_2 \sin\varphi_d \vec{e}_y + k_2 \cos\varphi_d \vec{e}_z \tag{8}$$

Tangentialkomponente von $\vec{k}_e$ & $\vec{k}_d$ gleich.

$$\Rightarrow k_2 \sin\varphi_d = k_1 \sin\varphi_e$$

mit $k_{1/2} = \sqrt{\varepsilon_{1/2}(\omega) \cdot \mu_0}$ folgt

$$\sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin\varphi_d = \sqrt{\varepsilon_1} \sin\varphi_e$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_d = \sin\varphi_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{9}$$

mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt:

$$\cos\varphi_d = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi_e \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

(9) in (8) einsetzen und Tangentialkomponenten mit (6) vergleichen:

$$\Rightarrow k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Fall 1: $\sin^2\varphi_e \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 1$:
$\Rightarrow \cos\varphi_d$ ist reell

$$\Rightarrow k_2 \cos\varphi_d = \pm k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\varphi_e \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

$$= \pm k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_d = -k_1 \sin\varphi_e \cdot \vec{e}_y + k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} \cdot \vec{e}_z \tag{10}$$

pos. Vorzeichen, da Welle in Dielektrikum II hineinläuft.

Fall 2: $\sin^2\varphi_e \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 1$:
$\Rightarrow \cos\varphi_d$ ist imaginär

$$\Rightarrow k_2 \cos\varphi_d = \pm k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{(-1) \cdot \left(\sin^2\varphi_e \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

$$= -\mathrm{j} k_1 \sqrt{\sin^2\varphi_e - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

neg. Vorzeichen, da Dämpfung in z-Richtung

$$\Rightarrow \vec{k}_d = -k_1 \sin\varphi_e \vec{e}_y - \mathrm{j} k_1 \sqrt{\sin^2\varphi_e - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cdot \vec{e}_z \tag{11}$$

Wellencharakter in z-Richtung geht verloren
$\Rightarrow$ Welle dringt nicht in Gebiet II ein!

Fall 3: $\sin^2\varphi_e \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1 \Rightarrow \cos\varphi_d = 0$
$\Rightarrow \sin\varphi_d = 1$ daraus folgt mit (9) (Brechungsgesetz: $\frac{\sin\varphi_e}{\sin\varphi_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} =: \frac{n_2}{n_1}$)

$$\sin \underbrace{(\varphi_{e,\text{grenz}})}_{\text{Grenzwinkel der Totalreflexion}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

E-Feld bestimmen
Analog zu Gleichung (5) für H-Feld:

$$\vec{n}_{12} \times (\underline{\vec{H}}_{e0} + \underline{\vec{H}}_{r0} - \underline{\vec{H}}_{d0}) = \vec{0}$$
$$\vec{n}_{12} \times (\vec{k}_e \times \underline{\vec{E}}_{e0} + \vec{k}_r \times \underline{\vec{E}}_{r0} - \vec{k}_d \times \underline{\vec{E}}_{d0}) = \vec{0} \tag{12}$$

mit Gleichung (1):

$$\underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

und Gleichung (5)

$$\vec{n}_{12} \times (\underline{\vec{E}}_{e0} + \underline{\vec{E}}_{r0} - \underline{\vec{E}}_{d0}) = 0$$

erhält man ein vollständiges Gleichungssystem zur Bestimmung von $\underline{\vec{E}}_{r0}$ und $\underline{\vec{E}}_{d0}$ bei bekannten $\vec{k}_r$ und $\vec{k}_d$.
Aus (1):

$$\underline{\vec{E}}_{r0} \cdot \vec{k}_r = 0 \tag{13}$$
$$\underline{\vec{E}}_{d0} \cdot \vec{k}_d = 0 \tag{14}$$

Ansatz:

$$\underline{\vec{E}}_{e0} = E_{e0} \cdot \vec{e}_x \text{ (Aufgabenstellung)}$$
$$\underline{\vec{E}}_{r0} = \underline{E}_{rx} \cdot \vec{e}_x + \underline{E}_{ry} \cdot \vec{e}_y + \underline{E}_{rz} \cdot \vec{e}_z$$
$$\underline{\vec{E}}_{d0} = \underline{E}_{dx} \cdot \vec{e}_x + \underline{E}_{dy} \cdot \vec{e}_y + \underline{E}_{dz} \cdot \vec{e}_z$$

aus (5) folgt:

$$E_{e0} + \underline{E}_{rx} - \underline{E}_{dx} = 0 \tag{15}$$
$$\underline{E}_{ry} - \underline{E}_{dy} = 0 \tag{16}$$

Einsetzen in Gleichung (13)

$$\Rightarrow \sin\varphi_e \underline{E}_{ry} + \cos\varphi_e \underline{E}_{rz} = 0 \tag{17}$$

$\vec{k}_1$ aus Fall 1 einsetzen in (14):

$$\Rightarrow -\sin\varphi_e \underline{E}_{dy} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} \underline{E}_{dz} = 0 \tag{18}$$

Für Gleichung 12:

$$\vec{k}_e \times \underline{\vec{E}}_{e0} = E_{e0}(k_1 \cos\varphi_e \vec{e}_y + k_1 \sin\varphi_e \vec{e}_z)$$
$$\vec{k}_r \times \underline{\vec{E}}_{r0} = \vec{e}_x(-k_1 \sin\varphi_e \underline{E}_{rz} + k_1 \cos\varphi_e \underline{E}_{ry}) + \underline{E}_{rx}(-k_1 \cos\varphi_e \vec{e}_y + k_1 \sin\varphi_e \vec{e}_z)$$
$$\vec{k}_d \times \underline{\vec{E}}_{d0} = \vec{e}_x \left(-k_1 \sin\varphi_e \underline{E}_{dz} - k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} \underline{E}_{dy}\right) + \underline{E}_{dx}\left(k_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_2} \vec{e}_y + k_1 \sin\varphi_e \vec{e}_z\right)$$

Gleichung 12: $\vec{n}_{12} \times \overrightarrow{(\dots)} = \vec{0}$ mit $\vec{n}_{12} = n_{12} \cdot \vec{e}_z \Rightarrow (\dots)_x = 0, (\dots)_y = 0$

$$(\dots)_x = -\cancel{k_1} \sin\varphi_e \underline{E}_{rz} + \cancel{k_1} \cos\varphi_e \underline{E}_{ry} + \cancel{k_1} \sin\varphi_e \underline{E}_{dz} + \cancel{k_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} \cdot \underline{E}_{dy} \tag{19}$$

$$(\dots)_y = E_{e0} \cos\varphi_e - \underline{E}_{rx} \cos\varphi_e - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} \cdot \underline{E}_{dx} = 0 \tag{20}$$

Aus (20) folgt durch Einsetzen von Gleichung (15):

$$\underline{E}_{dx} = \frac{2\cos\varphi_e}{\cos\varphi_e + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}} \cdot E_{e0}$$

$$\underline{E}_{rx} = \frac{\cos\varphi_e - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}{\cos\varphi_e + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}} \cdot E_{e0} \tag{21}$$

Mit Gleichung (16), (17), (18) folgt aus Gleichung (19):

$$\underline{E}_{dy} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\cos\varphi_e}}_{>0} + \underbrace{\frac{\sin^2\varphi_e}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}}_{>0} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}_{>0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{dz} = \underline{E}_{ry} = \underline{E}_{rz} = 0$$

b) Reflexion: k **Brechungsgesetz** siehe a)
Fresnel'sche Formel für senkrechte Polarisation ableiten ($\underline{\vec{E}} \perp \vec{k}_e, \underline{\vec{E}} \perp \vec{n}_{12}$):
Allgemein: Reflexionsvermögen der Wand:

$$R \coloneqq \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_e|}$$

Skript Gl. (2.56):

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0 k}|\underline{\vec{E}}_0|^2 \cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow R_\perp = \frac{|\underline{\vec{E}}_r|^2}{|\underline{\vec{E}}_e|^2}$$

mit $|\underline{\vec{E}}_e|^2 = E_{e0}^2$ und Gl. (21) folgt:

$$R_\perp = \left| \frac{\cos\varphi_e - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}{\cos\varphi_e + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}} \right|^2$$

Fall 1: $\sin^2\varphi_e < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

$$\cos\varphi_e \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} \overset{(9)}{=} \cos\varphi_e \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1 - \sin^2\varphi_d}$$

$$\overset{(9)}{=} \cos\varphi_e \pm \frac{\sin\varphi_e}{\sin\varphi_d} \cdot \cos\varphi_d$$

$$\Rightarrow R_\perp = \left| \frac{\sin\varphi_d\cos\varphi_e - \sin\varphi_e\cos\varphi_d}{\sin\varphi_d\cos\varphi_e + \sin\varphi_e\cos\varphi_e} \right|^2$$

mit $\sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \sin(x \pm y)$:

$$= \frac{\sin^2(\varphi_d - \varphi_e)}{\sin^2(\varphi_d + \varphi_e)} \qquad \textbf{Fresnel'sche Formel}$$

für senkrechte Polarisation. Existiert $R_\perp = 0$ im Fall 1?

$$R_\perp = 0 \Rightarrow \varphi_d = \varphi_e \overset{\text{Gl. (9)}}{\Rightarrow} \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$\Rightarrow$ Reflektierter Anteil verschwindet nur, wenn **kein** Medienübergang vorhanden ist.
Fall 2: $\sin^2\varphi_e > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

$$\Rightarrow R_\perp = \left| \frac{\cos\varphi_e + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\varphi_e - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\varphi_e - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\varphi_e - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} \right|^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Totalreflexion an der Wand!

c) siehe Unterpunkt a)

d) $\underline{\vec{E}}_{e0} = E_{e0}(\cos\varphi_e\vec{e}_y + \sin\varphi_e\vec{e}_z)$ aus (5):

$$\underline{E}_{rx} - \underline{E}_{dx} = 0 \tag{22}$$

und

$$E_{e0}\cos\varphi_e + \underline{E}_{ry} - \underline{E}_{dy} = 0 \tag{23}$$

$$(13),(17) \Rightarrow \sin\varphi_e \underline{E}_{ry} + \cos\varphi_e \underline{E}_{rz} = 0 \tag{24}$$

$$(14),(18) \Rightarrow -\sin\varphi_e \underline{E}_{dy} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}\,\underline{E}_{dz} = 0 \tag{25}$$

für Gl. (12):

$$\begin{aligned}
\vec{k}_e \times \underline{\vec{E}}_{e0} &= \vec{e}_x(-E_{e0}\cdot k_1 \sin^2\varphi_e - E_{e0}\cdot k_1\cos^2\varphi_e) \\
&= -E_{e0}k_1\vec{e}_x \\
\vec{k}_r \times \underline{\vec{E}}_{r0} &= \vec{e}_x(-k_1\sin\varphi_e\underline{E}_{rz} + k_1\cos\varphi_e\underline{E}_{ry}) + \underline{E}_{rx}(-k_1\cos\varphi_e\vec{e}_y + k_1\sin\varphi_e\vec{e}_z) \\
\vec{k}_d \times \underline{\vec{E}}_{d0} &= \vec{e}_x\left(-k_1\sin\varphi_e\underline{E}_{dz} - k_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}\,\underline{E}_{dy}\right) + \underline{E}_{dx}\left(k_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}\cdot\vec{e}_y + k_1\sin\varphi_e\cdot\vec{e}_z\right)
\end{aligned}$$

$$(\dots)_x = 0$$

$$\Rightarrow -E_{e0}\cancel{k_1} - \cancel{k_1}\sin\varphi_e\underline{E}_{rz} + \cancel{k_1}\cos\varphi_e\underline{E}_{ry} + \sin\varphi_e\underline{E}_{dz} + \cancel{k_1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}\cdot\underline{E}_{dy} = 0 \tag{26}$$

$$(\dots)_y = 0$$

$$\Rightarrow -\cancel{k_1}\cos\varphi_e\underline{E}_{rx} - \cancel{k_1}\underline{E}_{dx}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e} = 0 \tag{27}$$

aus (22) & (27) folgt:

$$\left(\underbrace{\cos\varphi_e}_{>0} + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}_{>0}\right)\cdot\underline{E}_{rx} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{rx} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{E}_{dx} = 0$$

aus (25) & (26) mit $A = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}$

$$\begin{aligned}
E_{e0} + \sin\varphi_e\underline{E}_{rz} - \cos\varphi_e\underline{E}_{ry} &= \left(\frac{\sin^2\varphi_e}{A} + A\right)\underline{E}_{dy} \\
\overset{(23)}{\Rightarrow} E_{e0} + \sin\varphi_e\underline{E}_{rz} - \cos\varphi_e\underline{E}_{ry} &= \left(\frac{\sin^2\varphi_e}{A} + A\right)(E_{e0}\cos\varphi_e + \underline{E}_{ry}) \\
\overset{(24)}{\Rightarrow} E_{e0} - \left(\frac{\sin^2\varphi_e}{\cos\varphi_e} + \cos\varphi_e\right)\underline{E}_{ry} &= \left(\frac{\sin^2\varphi_e}{A} + A\right)(E_{e0}\cos\varphi_e + \underline{E}_{ry}) \\
\Rightarrow \underline{E}_{ry} &= -B\cdot\cos\varphi_e \text{ mit } B = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_e - A}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_e + A}\cdot E_{e0} \\
\underline{E}_{rz} &= B\cdot\sin\varphi_e
\end{aligned}$$

aus (23):

$$\underline{E}_{dy} = E_{e0}\cdot\cos\varphi_e + \underline{E}_{ry}$$

$\underline{E}_{ry}$ einsetzen & vereinfachen mit

$$C = \frac{2E_{e0}\cos\varphi_e}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_e + A}$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{dy} = C\cdot A$$
$$\underline{E}_{dz} = C\cdot\sin\varphi_e$$

$$R_\parallel = \frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_e|^2} = \left|\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_e - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\varphi_e + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\varphi_e}}\right|^2$$

Brechungsgesetz $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\sin^2\varphi_e}{\sin^2\varphi_d}$ einsetzen & vereinfachen

$$\Rightarrow R_\parallel = \left|\frac{\sin\varphi_e\cos\varphi_e - \sin\varphi_d\cos\varphi_d}{\sin\varphi_e\cos\varphi_e + \sin\varphi_d\cos\varphi_d}\right|^2$$

mit $\sin x \cos x = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ & $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$$R_\parallel = \frac{\tan^2(\varphi_e - \varphi_d)}{\tan^2(\varphi_e + \varphi_d)} \qquad \textbf{Fresnel'sche Formel}$$

Existiert ein Fall mit $R_\parallel = 0$? $R_\parallel = 0 \Rightarrow \varphi_e + \varphi_d = \frac{\pi}{2}$
Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin\varphi_e}{\sin\varphi_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

daraus folgt mit $\varphi_d = \frac{\pi}{2} - \varphi_e$, $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

$$\Rightarrow \varphi_{e,3} = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \qquad \textbf{Brewsterscher Polarisationswinkel}$$

$\Rightarrow$ Fällt eine beliebig polarisierte Welle unter diesem Winkel ein, so ist die reflektierte Welle linear polarisiert mit $\vec{E}_r \perp$ Einfallebene. Totalreflexion wie gehabt:

$$R_\parallel = 1 \text{ für } \sin^2\varphi_e > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Aufgabe 4

a) $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}$
$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{H}}(\vec{r}) \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}$
$\vec{J}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{J}}(\vec{r}) \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}$

$\vec{E}$ & $\vec{H}$ müssen die Helmholtzgleichung erfüllen

$$\Delta\underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \underline{\vec{k}}^2 \cdot \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = 0$$

mit $\underline{\vec{k}}^2 = \omega^2\mu_0\underline{\varepsilon}_{\text{ges}}(\omega)$ (Skript S.33)

$$\underline{\varepsilon}_{\text{ges}} = \underline{\varepsilon} - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

hier ε & σ reell und frequenzunabhängig.

$$\Rightarrow \underline{\varepsilon}_{\text{ges}} = \varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

Verschiebungsstrom im Blech gegenüber Leitungsstrom vernachlässigbar

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon \qquad \text{(Skript Kap 2.3.1)}$$
$$\Rightarrow \underline{\varepsilon}_{\text{ges}} = -\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$
$$\Rightarrow \underline{\vec{k}}^2 = -\mathrm{j}\omega\mu_0\sigma$$
$$\Rightarrow \Delta\underline{\vec{E}} - \mathrm{j}\omega\mu_0\sigma\underline{\vec{E}} = 0$$

Im Leiter:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\vec{J}}}{\sigma} = \frac{\underline{\vec{J}}_z}{\sigma} \cdot \vec{e}_z$$

Material gleichförmig in y-und z-Richtung ausgedehnt

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\underline{\vec{J}}_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\underline{\vec{J}}_z = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{\vec{J}}_z(x) - \mathrm{j}\omega\mu_0\sigma\underline{\vec{J}}_z(x) = 0$$

b) Lösungsansatz:

$$J_z(x) = \underline{A} \cdot e^{\underline{\beta} x}$$

Einsetzen in DGL liefert:

$$\begin{aligned}
&\underline{A} \cdot \underline{\beta}^2 \cdot \cancel{e^{\underline{\beta} x}} = \mathrm{j}\omega\mu_0\sigma \underline{A} \cdot \cancel{e^{\underline{\beta} x}} \\
\Rightarrow &\underline{\beta} = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \cdot (1+\mathrm{j}) = \pm\frac{1+\mathrm{j}}{\delta} \qquad \left(\delta =: \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}\right)
\end{aligned}$$

Symmetrie:

$$\underline{J}_z(x) = \underline{J}_z(-x)$$

Beide Lösungen überlagern:

$$\underline{J}_z(x) = \underline{A}\left(e^{\underline{\beta} x} + e^{-\underline{\beta} x}\right)$$

$\underline{A}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\underline{I} &= l \cdot 2 \cdot \int\limits_0^{d/2} \underline{J}_z(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot l \cdot \underline{A} \cdot \left(\int\limits_0^{d/2} e^{\underline{\beta} x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{d/2} e^{-\underline{\beta} x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2 \cdot l \cdot \underline{A} \cdot \left(\int\limits_0^{d/2} e^{\underline{\beta} x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-d/2}^{0} e^{\underline{\beta} x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2 \cdot l \cdot \underline{A} \cdot \int\limits_{-d/2}^{d/2} e^{\underline{\beta} x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2 \cdot l \cdot \underline{A}}{\underline{\beta}} \cdot \left(e^{\underline{\beta}\frac{d}{2}} - e^{-\underline{\beta}\frac{d}{2}}\right) \\
\underline{A} &= \frac{\underline{I} \cdot \underline{\beta}}{2 \cdot l} \cdot \left(\frac{1}{e^{\underline{\beta}\frac{d}{2}} - e^{-\underline{\beta}\frac{d}{2}}}\right) \\
\underline{J}_z(x) &= \frac{\underline{I} \cdot \underline{\beta}}{2 \cdot l} \cdot \frac{e^{\underline{\beta} x} + e^{-\underline{\beta} x}}{e^{\underline{\beta}\frac{d}{2}} - e^{-\underline{\beta}\frac{d}{2}}} \\
&= \frac{\underline{I} \cdot \underline{\beta}}{2 \cdot l} \cdot \frac{\cosh(\underline{\beta} x)}{\sinh\left(\underline{\beta}\frac{d}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\vec{H}$ berechnen:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0\sigma}\operatorname{rot}\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0\sigma} \cdot \det\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \\ 0 & 0 & J_z(x,t) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu_0\sigma}\left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}J_z(x,t)}{\mathrm{d}y} \cdot \vec{e}_x}_{=0} - \frac{\mathrm{d}J_z(x,t)}{\mathrm{d}x} \cdot \vec{e}_y\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0\sigma} \cdot \frac{\partial J_z(x,t)}{\partial x} \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_y(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \cdot \frac{\partial J_z(x,t)}{\partial x}$$

Harmonische Zeitabhängigkeit: $H_y(x,t) = \mathrm{Re}\{\underline{H}_y(x) e^{\mathrm{j}\omega t}\}$

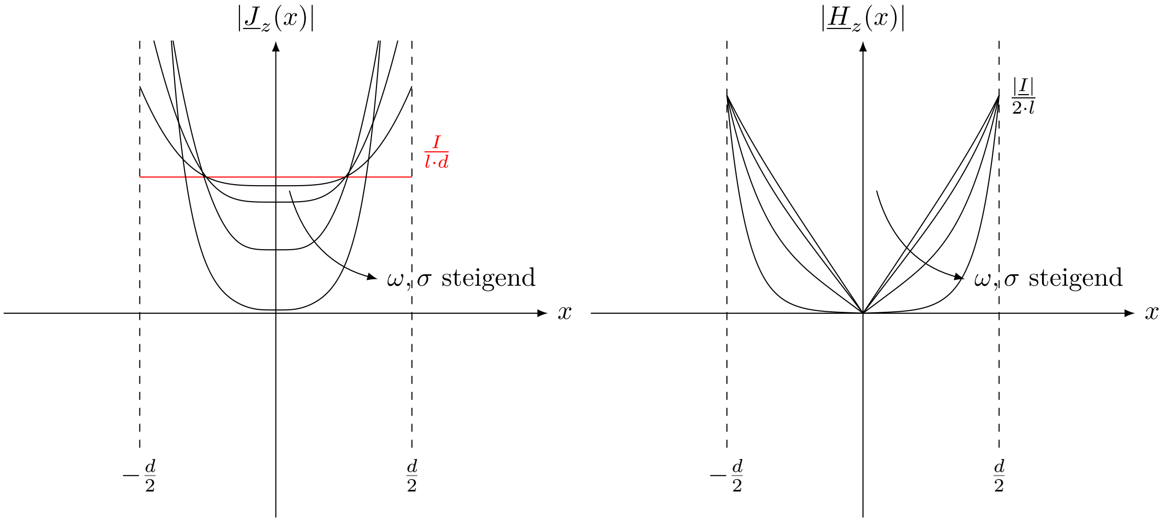
$$\Rightarrow \mathrm{j}\omega \underline{H}_y(x) = \frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\underline{J}_z(x)$$

$$= \frac{\underline{I}\underline{\beta}^2}{\mu_0\sigma \cdot 2l} \cdot \frac{\sinh(\underline{\beta}x)}{\sinh\left(\underline{\beta}\frac{d}{2}\right)}$$

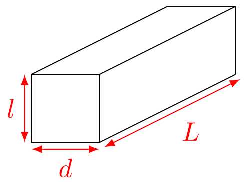
$$\underline{\beta}^2 = \mathrm{j}\omega\mu_0\sigma$$

$$\Rightarrow \underline{H}_y(x) = \frac{\underline{I}}{2l} \cdot \frac{\sinh(\underline{\beta}x)}{\sinh\left(\underline{\beta}\frac{d}{2}\right)} = \frac{\underline{I}}{2l} \cdot \frac{e^{\underline{\beta}x} + e^{-\underline{\beta}x}}{e^{\underline{\beta}\frac{d}{2}} - e^{-\underline{\beta}\frac{d}{2}}}$$

c)



d)



$$\underline{Z}_\square = \frac{\underline{E}_z(x = \pm\frac{d}{2}) \cdot l}{\underline{I}}$$

$$= \frac{\underline{\beta}}{2\sigma} \cdot \frac{1}{\tanh\left(\underline{\beta}\frac{d}{2}\right)}$$

Gleichstromfall:

$$\underline{Z}(\omega = 0) = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{\frac{1}{\sigma} \cdot L}{d \cdot l}$$

$$\underline{Z}_\square(\omega = 0) = \frac{1}{\sigma \cdot d}$$

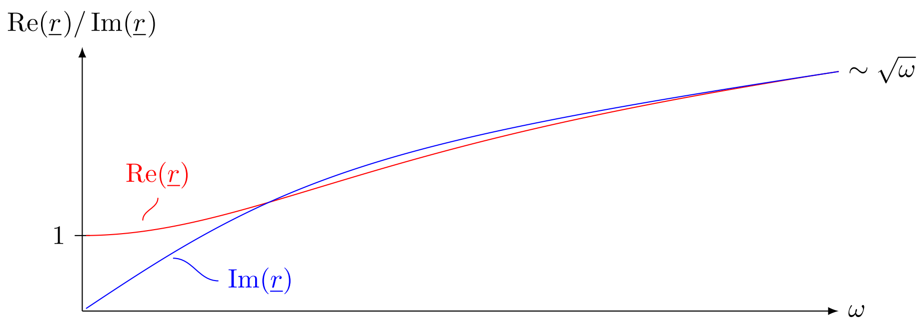
$$\frac{Z_\square}{Z_\square(\omega = 0)} = \frac{\underline{\beta} \cdot \frac{d}{2}}{\tanh\left(\underline{\beta}\frac{d}{2}\right)} = \underline{r}$$

Für $\omega = 0$ gilt $\mathrm{Re}\{\underline{r}\} = 1, \mathrm{Im}\{\underline{r}\} = 0$

$\omega \to \infty$:

$$\underline{r} = (\sigma \cdot d) \cdot \frac{\underline{\beta}}{2\sigma} \cdot \frac{e^{+\underline{\beta}\frac{d}{2}} + \cancel{e^{-\underline{\beta}\frac{d}{2}}}}{e^{+\underline{\beta}\frac{d}{2}} - \cancel{e^{-\underline{\beta}\frac{d}{2}}}} = \frac{d}{2} \cdot \underline{\beta}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{\underline{r}\} = \mathrm{Im}\{\underline{r}\} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{2\delta}$$



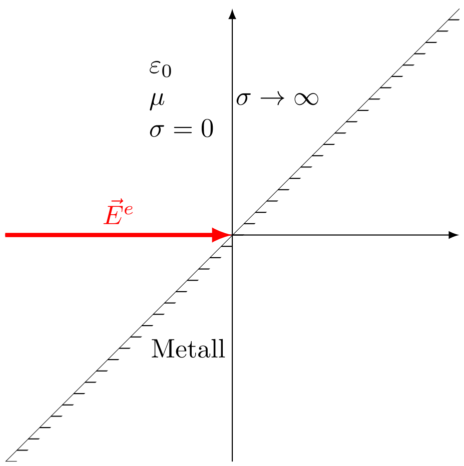
$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_\square(\omega \to \infty)\} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_\square(\omega = 0)\} \cdot \frac{d}{2\delta}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{\underline{Z}(\omega \to \infty)\} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\delta \cdot l}$$

Vorstellung: Parallelschaltung von zwei Widerständen, wenn man annimmt, dass der Strom homogen durch die Randgebiete fließt.

Blatt 3

Aufgabe 5



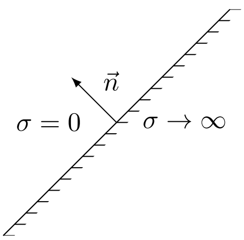
`Standard-Klausur-Einstieg`

$$\underline{\vec{E}}^e = \underline{E}^e_{0,x} \cdot e^{-\mathrm{j}kz} \cdot \vec{e}_x$$

a) $\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}$ $\quad \mathrm{div}\,\underline{\vec{D}} = 0$ $\quad \underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{H}}$

$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}$ $\quad \mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = 0$ $\quad \underline{\vec{D}} = \varepsilon_0\underline{\vec{E}}$

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{H}}_1 = 0 \text{ (idealer Leiter)}$$



(Siehe Skript S. 10/11)

$$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{E}} = \vec{n} \times \underline{\vec{E}}_2 = 0$$

$$\operatorname{Rot} \underline{\vec{H}} = \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_2 = \underline{\vec{J}}_f$$

Ansatz nach Reflexionsgesetz:

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}^e + \underline{\vec{E}}^r = \underline{E}^e_{0x} \cdot e^{-\mathrm{j}kz} \cdot \vec{e}_x + \underline{E}^r_{0x} e^{-\mathrm{j}ky} \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{n} \times \underline{\vec{E}}_2 = 0\big|_{\text{Grenzfl.}} \Rightarrow E_x = 0\big|_{\text{Grenzfläche}}$$

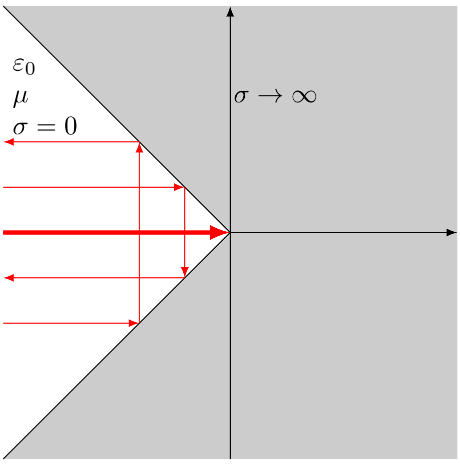
$$0 = \underline{E}^e_{0x} e^{-\mathrm{j}kz} + \underline{E}^r_{0x} e^{-\mathrm{j}ky}$$

An der Grenzfläche gilt $y = z$

$$0 = \underline{E}^e_{0x} e^{-\mathrm{j}kz} + \underline{E}^r_{0x} e^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\Rightarrow 0 = \underline{E}^e_{0x} + \underline{E}^r_{0x} \Rightarrow \underline{E}^r_{0x} = -\underline{E}^e_{0x}$$

b)



Ansatz:

$$\underline{\vec{E}} = \left(\underline{E}^e_{0x} \cdot e^{-\mathrm{j}kz} + \underline{E}^r_{0x} \cdot e^{+\mathrm{j}kz} + \underline{E}^o_{0x} e^{-\mathrm{j}ky} + \underline{E}^u_{0x} \cdot e^{+\mathrm{j}ky}\right) \cdot \vec{e}_x$$

Randbedingungen für $\vec{E}$:

Grenzfläche $y = z, y < 0$

$$\Rightarrow (\underline{E}^e_{0x} + \underline{E}^o_{0x}) \cdot e^{-\mathrm{j}kz} + (\underline{E}^r_{0x} + \underline{E}^u_{0x}) \cdot e^{+\mathrm{j}kz} = 0$$

NR: $A \cdot e^{\mathrm{j}x} + B \cdot e^{-\mathrm{j}x} = 0$

$\Rightarrow A \cos x + \mathrm{j} \sin x \cdot A + B \cos x - \mathrm{j} B \sin x = 0$

$\Rightarrow A = B \; \& \; A = -B$

$\Rightarrow A = B = 0$

$$\Rightarrow \underline{E}^e_{0x} + \underline{E}^o_{0x} = 0$$

$$\underline{E}^r_{0x} + \underline{E}^u_{0x} = 0$$

Grenzfläche $y = -z, y > 0$

$$^1(\underline{E}^e_{0x} + \underline{E}^u_{0x}) e^{-\mathrm{j}kz} + (\underline{E}^r_{0x} + \underline{E}^o_{0x}) e^{+\mathrm{j}kz} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}^e_{0x} + \underline{E}^u_{0x} = 0$$

$$\underline{E}^r_{0x} + \underline{E}^o_{0x} = 0$$

Lösung des Gleichungssystems liefert:

$$\underline{E}^o_{0x} = \underline{E}^u_{0x} = -\underline{E}^e_{0x} = -\underline{E}^r_{0x}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{E}^e_{0x} (e^{-\mathrm{j}kz} + e^{+\mathrm{j}kz} - e^{-\mathrm{j}ky} - e^{+\mathrm{j}ky}) \cdot \vec{e}_x$$

$$= 2 \cdot \underline{E}^e_{0x} (\cos(kz) - \cos(ky)) \cdot \vec{e}_x$$

c) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}$

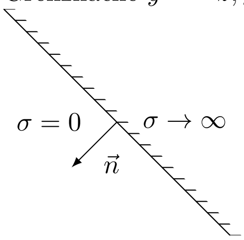
$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\cdot\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\underline{E}_x(y,z)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z}E_x(y,z)\cdot\vec{e}_y - \vec{e}_z\cdot\frac{\partial}{\partial y}E_x(y,z)\right]$$

$$= \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left[-2\underline{E}^e_{0x}\cdot k\left(\sin(kz)\cdot\vec{e}_y + \sin(ky)\cdot\vec{e}_z\right)\right]$$

$$= -\mathrm{j}2\underline{E}^e_{0x}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\left(\sin(kz)\cdot\vec{e}_y + \sin(ky)\cdot\vec{e}_z\right)$$

Grenzfläche $y = -z, y > 0$:



$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{J}}_F = \vec{n}\times\vec{H} = +\mathrm{j}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\underline{E}^e_{0x}(\sin(ky) - \sin(kz))\cdot\vec{e}_x$$

$$= \mathrm{j}2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\underline{E}^e_{0x}\sin(ky)\cdot\vec{e}_x$$

d) Zeitbereich:

$$\underline{\vec{E}}(y,z,t) = \operatorname{Re}\{\underline{\vec{E}}(y,z)\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

mit $\underline{E}^e_{0x} = |\underline{E}^e_{0x}|\cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$ folgt:

$$\underline{\vec{E}}(y,z,t) = 2\cdot|\underline{E}^e_{0x}|\cdot(\cos(kz) - \cos(ky))\cdot\cos(\omega t + \varphi)\cdot\vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{H}}(y,z,t) = \operatorname{Re}\{\underline{\vec{H}}(y,z)\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

$$= 2\cdot|\underline{E}^e_{0x}|\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot(\sin(kz)\cdot\vec{e}_y + \sin(ky)\cdot\vec{e}_z)\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$

Poynting'scher Vektor

$$\vec{S} = \vec{E}(y,z,t)\times\vec{H}(y,z,t)$$

$$= 4\cdot|\underline{E}^e_{0x}|^2\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t+\varphi)\cdot\sin(\omega t+\varphi)\cdot(\cos(kz) - \cos(ky))\cdot(\sin(kz)\cdot\vec{e}_z - \sin(ky)\cdot\vec{e}_y)$$

$$= 2\cdot|\underline{E}^e_{0x}|^2\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sin(2\omega t + 2\varphi)\cdot(\ldots)$$

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2(t,y,z)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot|\underline{E}^e_{0x}|^2\cdot(\cos(kz) - \cos(ky))^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$w_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2(t,y,z)$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\cdot 4\cdot|\underline{E}^e_{0x}|^2\cdot\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\cdot\sin^2(\omega t+\varphi)(\sin^2(kz) + \sin^2(ky))$$

$$w_{\mathrm{el}} + w_{\mathrm{mag}} = \ldots$$

Prüfe ob der Energiesatz erfüllt ist:

$$\operatorname{div}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(w_{\mathrm{mag}} + w_{\mathrm{el}})$$

Blatt 4

Aufgabe 6

a) $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{E}_y(x,z)\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}\cdot \vec{e}_y$

Telegraphengleichung für Raumgebiete 1 & 2 :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{E}_y(x,z) + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{E}_y(x,z)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{E}_y(x,z) = E(x,z)\cdot\begin{cases}-k_1^2\\ -k_2^2\end{cases}$$

1.) $k_1^2 = \omega^2\varepsilon_0/\mu_0$

2.) $k_2^2 = \omega^2\varepsilon_1/\mu_0$

Einsetzen des Produktansatzes liefert jeweils in Raumgebiet I, II:

$$\begin{aligned}
&F''_{1/2}(x)\cdot G_{1/2}(z) + F_{1/2}(x)\cdot G''_{1/2}(z) = F_{1/2}(x)\cdot G_{1/2}(z)\cdot(-k_{1/2}^2)\\
\Rightarrow &\underbrace{\frac{F''_{1/2}(x)}{F_{1/2}(x)}}_{-k_{x1/2}^2} + \underbrace{\frac{G''_{1/2}(z)}{G_{1/2}(z)}}_{=-k_{z1/2}^2} = -k_{1/2}^2\\
\Rightarrow &F''_{1/2}(x) + k_{x1/2}^2 F_{1/2}(x) = 0\\
&G''_{1/2}(z) + k_{z1/2}^2 G_{1/2}(z) = 0
\end{aligned}$$

Allgemeiner Lösungsanstaz:

$$\begin{aligned}
F_{1/2}(x,z) &= \underline{A}_{1/2}\cos(k_{x1/2}\cdot x) + \underline{B}_{1/2}\sin(k_{x1/2}\cdot x)\\
G_{1/2}(x,z) &= \underline{C}_{1/2}\cos(k_{z1/2}\cdot z) + \underline{D}_{1/2}\sin(k_{z1/2}\cdot z)
\end{aligned}$$

Raumbereich 1:

$$\underline{E}_{y1}(x,z) = [\underline{A}_1\cos(k_{x1}x) + \underline{B}_1\sin(k_{x1}x)]\cdot[\underline{C}_1\cdot\cos(k_{z1}z) + \underline{D}_1\sin(k_{z1}z)]$$

mit $k_{x1}^2 + k_{z1}^2 = k_1^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$

Raumbereich 2:

$$\underline{E}_{y2}(x,z) = [\underline{A}_2\cos(k_{x2}x) + \underline{B}_2\sin(k_{x2}x)]\cdot[\underline{C}_2\cdot\cos(k_{z2}z) + \underline{D}_2\sin(k_{z2}z)]$$

mit $k_{x2}^2 + k_{z2}^2 = k_2^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$

b) $\sigma\to\infty$ gilt am Innenrand des Resonators:

$$\vec{E}_{\text{tang,Rand}} = 0 \Rightarrow \underline{E}_{y,\text{Rand}} = 0$$

An den einzelnen Wänden gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{E}_{y1}(x,0) &= 0 &&\Rightarrow \underline{C}_1 = 0\\
\underline{E}_{y1}(0,z) &= 0 &&\Rightarrow \underline{A}_1 = 0\\
\underline{E}_{y1}(a,z) &= 0 &&\Rightarrow k_{x1} = \frac{n_1\cdot\pi}{a}, n_1 = 1,2,\dots\\
\underline{E}_{y2}(0,z) &= 0 &&\Rightarrow \underline{A}_2 = 0\\
\underline{E}_{y2}(a,z) &= 0 &&\Rightarrow k_{x2} = \frac{n_2\cdot\pi}{a}, n_2 = 1,2,\dots\\
\underline{E}_{y2}(x,2b) &= 0 &&\Rightarrow \underline{C}_2\cos(2bk_{z2}) + \underline{D}_2\sin(2bk_{z2}) = 0\\
& &&\Rightarrow \underline{C}_2 = \frac{-\underline{D}_2\sin(2bk_{z2})}{\cos(2bk_{z2})}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{C}_2\cos(k_{z2}z) + \underline{D}_2\sin(k_{z2}z) = -\underline{D}_2\frac{\sin(2bk_{z2})}{\cos(2bk_{z2})}\cdot\cos(k_{z2}z) + \underline{D}_2\sin(k_{z2}z)$$

definiere $\boxed{\underline{\hat{D}}_2 = \frac{\underline{D}_2}{\cos(2bk_{z2})}}$

$$= -\underline{\hat{D}}_2 \sin(2bk_{z2})\cos(k_{z2}z) + \underline{\hat{D}}_2 \cos(2bk_{z2})\sin(k_{z2}z)$$
$$= \underline{\hat{D}}_2 \sin(k_{z2}(z-2b))$$

Raumbereich 1

$$\underline{E}_{y1}(x,z) = \underbrace{\underline{B}_1\underline{D}_1}_{\underline{E}_1} \cdot \sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right) \cdot \sin(k_{z1}\cdot z)$$

$\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + k_{z1}^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \quad n_1 = 1, 2, \ldots$

Raumbereich 2

$$\underline{E}_{y2}(x,z) = \underbrace{\underline{B}_2\underline{\hat{D}}_2}_{\underline{E}_2} \cdot \sin\left(\frac{n_2\pi}{a}x\right) \cdot \sin(k_{z2}\cdot(z-2b))$$

$\left(\frac{n_2\pi}{a}\right)^2 + k_{z2}^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \quad n_2 = 1, 2, \ldots$

c) Das $\vec{H}$-Feld folgt aus der Maxwell'schen Gleichung $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{\vec{B}}$ und der Materialgleichung $\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{H}}$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \operatorname{Re}\{\underline{\vec{H}}(x,z)\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\}$$
$$\underline{\vec{H}}(x,z) = j\frac{1}{\omega\mu_0}\operatorname{rot}(\underline{E}_y(x,z)\cdot\vec{e}_y)$$
$$= j\frac{1}{\omega\mu_0}(\nabla\times\underline{E}_y(x,z)\cdot\vec{e}_y)$$
$$= j\frac{1}{\omega\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{E}_y(x,z)\cdot\vec{e}_z - \frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_y(x,z)\cdot\vec{e}_x\right)$$

Raumbereich 1

$$\underline{\vec{H}}_1(x,z) = \frac{\underline{E}_1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left[k_{z1}\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)\cos(k_{z1}z)\cdot\vec{e}_x - \frac{n_1\pi}{a}\cos\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)\sin(k_{z1}z)\cdot\vec{e}_z\right]$$

Raumbereich 2

$$\underline{\vec{H}}_2(x,z) = \frac{\underline{E}_2}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left[k_{z2}\sin\left(\frac{n_2\pi}{a}x\right)\cos(k_{z2}(z-2b))\cdot\vec{e}_x - \frac{n_2\pi}{a}\cos\left(\frac{n_2\pi}{a}x\right)\sin(k_{z2}(z-2b))\cdot\vec{e}_z\right]$$

d) $\operatorname{Rot}\underline{\vec{E}}\big|_{z=b} = 0 \Rightarrow \underline{E}_{y1}(x,b) = \underline{E}_{y2}(x,b)$ für alle x

$$\Rightarrow \underline{E}_1\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)\cdot\sin(k_{z1}b) = -\underline{E}_2\sin\left(\frac{n_2\pi}{a}x\right)\cdot\sin(k_{z2}b)$$
$$\Rightarrow n_1 = n_2, \underline{E}_1\sin(k_{z1}b) = -\underline{E}_2\sin(k_{z2}b)$$

$\operatorname{Rot}\underline{\vec{H}}\big|_{z=b} = 0 \Rightarrow \underline{H}_{x1}(x,b) = \underline{H}_{x2}(x,b)$ für alle x

$$\Rightarrow n_1 = n_2, k_{z1}\cdot\underline{E}_1\cos(k_{z1}b) = k_{z2}\cdot\underline{E}_2\cos(k_{z2}b)$$

Bei gegebenem n liegen k_{z1} und k_{z2} fest über

$$k_{z1}^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$
$$k_{z2}^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$
$$\Rightarrow \underline{E}_2 = -\underline{E}_1\frac{\sin(k_{z1}b)}{\sin(k_{z2}b)}$$

e) Grenzbedingungen für $\vec{E}$ & $\vec{H}$-Feld in d) aufgestellt:

- $\underline{E}_1 \cdot \sin(\underline{k}_{z1} b) = -\underline{E}_2 \cdot \sin(\underline{k}_{z2} b)$
- $\underline{k}_{z1} \underline{E}_1 \cos(\underline{k}_{z1} b) = \underline{k}_{z2} \underline{E}_2 \cos(\underline{k}_{z2} b)$

$$\Rightarrow \underline{k}_{z1} \cot(\underline{k}_{z1} b) = -\underline{k}_{z2} \cot(\underline{k}_{z2} b)$$

aus Unterpunkt b)

$$\underline{k}_{z1} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$
$$\underline{k}_{z2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1(\omega) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \cot\left(\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} b\right) = -\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1(\omega) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \cot\left(\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1(\omega) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} b\right)$$

Frequenzen die diese Gleichung lösen sind die Eigenschwingungsfrequenzen des Hohlraumresonators.
Grenzfall: $n = 1, \omega \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(\omega)\mu_0}} \cdot \frac{\pi}{a}$

$$\Rightarrow \underline{k}_{zi} = j \cdot k_{zi}$$

mit $\cot(jk_{zi}z) = -j \coth(k_{zi}z)$ folgt:

$$\underbrace{k_{z1} \coth(k_{z1} b)}_{>0} = -\underbrace{k_{z2} \coth(k_{z2} b)}_{>0} \lightning$$

$\Rightarrow$ keine Lösung möglich für $\omega \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(\omega)\mu_0}} \cdot \frac{\pi}{a}$.

Aufgabe 7

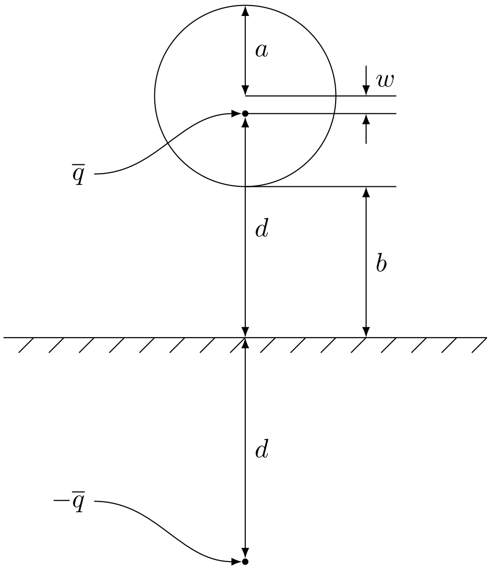
a) **Vorgehensweise**

1) Bestimmung des elektrostatischen Potentials $\underline{V}_S(x, y)$ eines zylindrischen Leiters vor einer leitenden Ebene mit Hilfe der Spiegelungsmethode (ET3).
2) TEM-Welle ergibt sich dann aus

$$V(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\{\underline{V}_S(x, y) \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k} z)}\}$$

mit $\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_{\text{ges}} \mu_0 \omega^2$

3) Berechne $\vec{E}(\vec{r}, t)$ & $\vec{H}(\vec{r}, t)$



Speiegelungsmethode für entgegengesetzte, gleichnamige Linienladungen $\pm\overline{q}$:

$$\Rightarrow a^2 = w \cdot (w + 2d)$$

aus der Skizze folgt: $b + a = w + d$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a^2 &= (a + b - d) \cdot (a + b + d) \\
&= (a + b)^2 - d^2 \\
\Rightarrow 0 &= 2ab + b^2 - d^2 \\
\Rightarrow d &= \sqrt{2ab + b^2} \\
&= b \cdot \sqrt{1 + \frac{2a}{b}}
\end{aligned}$$

Aus ET3: Elektrostatisches Potential einer Linienladung $\overline{q}$:

$$V(r) = -\frac{\overline{q}}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln(r)$$

$\underline{V}_S(x, y)$ ist die Überlagerung zweier Linienladungspotentiale an der Stelle r_1 und r_2 mit

$$\begin{aligned}
r_{1/2}^2 &= x^2 + (y \pm d)^2 \\
\Rightarrow \underline{V}_S(x, y) &= \frac{\underline{c}}{4\pi} \left(\ln\left(x^2 + (y + d)^2\right) - \ln\left(x^2 + (y - d)^2\right) \right)
\end{aligned}$$

$\underline{c}$ noch zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
\vec{\underline{E}}_0 &= -\operatorname{grad} \underline{V}_S \\
\Rightarrow \vec{\underline{E}}_0 &= \underline{E}_{0x} \cdot \vec{e}_x + \underline{E}_{0y} \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial \underline{V}_S}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial \underline{V}_S}{\partial y} \vec{e}_y \\
\Rightarrow \underline{E}_{0x} &= -\frac{\partial \underline{V}_S}{\partial x} = \frac{\underline{c}}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + (y - d)^2} - \frac{x}{x^2 + (y + d)^2} \right) \\
\Rightarrow \underline{E}_{0y} &= -\frac{\partial \underline{V}_S}{\partial y} = \frac{\underline{c}}{2\pi} \left(\frac{y - d}{x^2 + (y - d)^2} - \frac{y + d}{x^2 + (y + d)^2} \right) \\
\vec{H} &= -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0} \cdot \operatorname{rot} \vec{\underline{E}} \\
\operatorname{rot} \vec{\underline{E}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \\ \underline{E}_{0y} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \\ \cancel{\underline{E}_{0z} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z}} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\underline{E}_{0y} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \vec{e}_x - \underline{E}_{0x} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \vec{e}_y \right) + \vec{e}_z \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\underline{E}_{0y}}_{-\frac{\partial \underline{V}_S^2}{\partial x \partial y}} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\underline{E}_{0x}}_{-\frac{\partial \underline{V}_S^2}{\partial y \partial x}} e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \right) \right)
\end{aligned}$$

$\underline{H}_z = 0$ nach dem Schwarzschen Satz

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{\underline{E}} &= \mathrm{j}\underline{k} (\underline{E}_{0y} \vec{e}_x - \underline{E}_{0x} \vec{e}_y) \cdot e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \\
\vec{\underline{H}} &= \frac{\underline{k}}{\omega\mu_0} \left(-\underline{E}_{0y} \vec{e}_x + \underline{E}_{0x} \vec{e}_y \right) \cdot e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \\
k &= \sqrt{\underline{\varepsilon}_{\mathrm{ges}} \mu_0} \cdot \omega \\
\Rightarrow \vec{\underline{H}} &= \sqrt{\frac{\underline{\varepsilon}_{\mathrm{ges}}}{\mu_0}} \left(-\underline{E}_{0y} \vec{e}_x + \underline{E}_{0x} \vec{e}_y \right) \cdot e^{-\mathrm{j}\underline{k}z} \\
&= \frac{\vec{e}_z \times \vec{\underline{E}}}{\underline{Z}}
\end{aligned}$$

mit $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\underline{\varepsilon}_{\mathrm{ges}}}}$ (Skript Gl. 2.3.4)

b) Mit $\vec{\underline{E}}_0 = -\operatorname{grad} \underline{V}(x, y)$ ist C_2 beliebig wählbar und es lässt sich die Potentialdifferenz definieren als:

$$\underline{V}_0 = \int_{C_2} \vec{\underline{E}}_0 \, \mathrm{d}\vec{r} = \underline{V}(x = 0, y = b) - \underline{V}(x = 0, y = 0)$$

mit

$$\underline{V}(x,y) = \frac{\underline{Z} \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{x^2+(y+d)^2}{x^2+(y-d)^2}}\right)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{V}_0 &= \frac{\underline{Z} \cdot I_0}{2\pi} \cdot \left[\ln\left(\sqrt{\frac{(b+d)^2}{(b-d)^2}}\right) - \ln(1)\right] \\
&= \frac{\underline{Z} \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{d+b}{d-b}\right), \text{ da } d > b \\
&= \underline{Z} \cdot I_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{2a}{b}}+1}{\sqrt{1+\frac{2a}{b}}-1}\right)}_{g:=\text{Geometriefaktor}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{C_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = V_0 = \mathrm{Re}\{\underline{V}_0 e^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

c)

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\} \tag{2.103}$$

$$\underline{\vec{H}}^* = \frac{\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}^*}{\underline{\vec{Z}}^*} \tag{3.34}$$

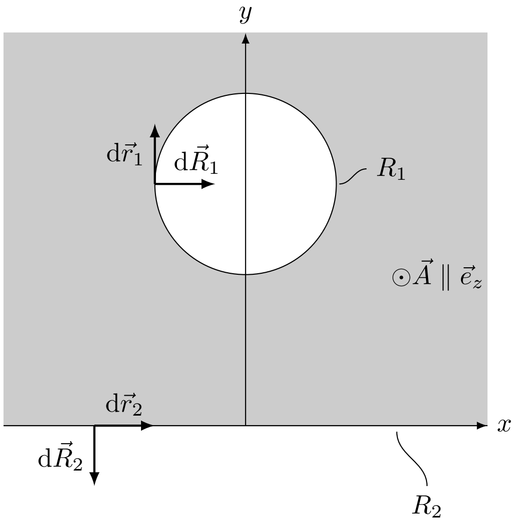
$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}} &= -\,\mathrm{grad}\,\underline{V} = -\nabla\underline{V} \\
\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* &= \frac{1}{\underline{Z}^*}\left(\underline{\vec{E}} \times \left(\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}^*\right)\right) \\
&= \frac{1}{\underline{Z}^*}\left(\nabla\underline{V} \times (\vec{e}_z \times \nabla\underline{V}^*)\right)
\end{aligned}$$

mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ folgt:

$$\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* = \frac{1}{\underline{\vec{Z}}^*}(\vec{e}_z(\nabla\underline{V} \cdot \nabla\underline{V}^*) - \nabla\underline{V}^* \underbrace{(\nabla\underline{V}\vec{e}_z)}_{=0,\text{ da } \nabla\underline{V} \perp \vec{e}_z})$$

mit $\nabla(\underline{V} \cdot \nabla\underline{V}^*) = \nabla\underline{V} \cdot \nabla\underline{V}^* + \underline{V} \underbrace{\Delta\underline{V}^*}_{=0,\text{ da } \rho = 0!}$

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* &= \frac{1}{\underline{Z}^*} \cdot \vec{e}_z \cdot \nabla(\underline{V} \cdot \nabla\underline{V}^*) \\
&= \frac{1}{\underline{Z}^*} \cdot \vec{e}_z\,\mathrm{div}(\underline{V} \cdot \mathrm{grad}\,\underline{V}^*) \\
\overline{P} &= \int\limits_A \overline{\vec{S}}\,\mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\underline{Z}^*} \cdot \vec{e}_z \cdot \int\limits_A \mathrm{div}(\underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*)\,\mathrm{d}\vec{A}\right\}
\end{aligned}$$



Verwendung des Satzes von Gauß in 2D:

$$\int\limits_V \mathrm{div}(\underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*)\,\mathrm{d}V = \oint\limits_F \underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*\,\mathrm{d}\vec{F}$$

$(\underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*)$ ist unabhängig von z und hat keine Komponente in z-Richtung

$$\Rightarrow \int\limits_V \mathrm{div}(\underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*)\,\mathrm{d}V = \int\limits_A \mathrm{div}(\underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*)\,\mathrm{d}A \cdot \int\limits_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z$$

$$\oint\limits_F \underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*\,\mathrm{d}\vec{F} = \oint\limits_R \underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*\,\mathrm{d}\vec{R} \cdot \int\limits_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \int\limits_A \mathrm{div}(\underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*)\,\mathrm{d}A = \oint\limits_R \underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*\,\mathrm{d}\vec{R}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\underline{Z}^*}\int\limits_R \underline{V}\,\mathrm{grad}\,\underline{V}^*\,\mathrm{d}\vec{R}\right\}$$

Integrale über unendlichich ferne Wege verschwinden und Wegintegrale über $R_{1/2}$ verlaufen über Äquipotentialfächen $\underline{V}\big|_{R_{1/2}} = \mathrm{const} = \underline{V}_{1/2}$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{V}_1\int\limits_{R_1}\frac{\mathrm{grad}\,\underline{V}^*}{\underline{Z}^*}\,\mathrm{d}\vec{R} + \underline{V}_2\int\limits_{R_1}\frac{\mathrm{grad}\,\underline{V}^*}{\underline{Z}^*}\,\mathrm{d}\vec{R}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}^*\cdot\underline{\vec{H}}^* &= \vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}^* \\
\Rightarrow \underline{\vec{E}}^* &= -\underline{Z}^*(\vec{e}_z \times \underline{\vec{H}}^*) \\
\mathrm{grad}\,\underline{V}^* &= -\underline{\vec{E}}^* = \underline{Z}^*(\vec{e}_z \times \underline{\vec{H}}^*)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{grad}\,\underline{V}^*}{\underline{Z}^*}\cdot\mathrm{d}\vec{R} = (\vec{e}_z \times \underline{\vec{H}}^*)\cdot(\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{e}_z) \text{ mit } \mathrm{d}\vec{R} = \mathrm{d}\vec{r}\times\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\underline{\vec{H}}_x^*\\\underline{\vec{H}}_y^*\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= -(\underline{\vec{H}}_y^*\vec{e}_x - \underline{\vec{H}}_x^*\vec{e}_y)\cdot(\mathrm{d}y\vec{e}_x - \mathrm{d}x\vec{e}_y) \\
&= -(\underline{\vec{H}}_y^*\mathrm{d}y + \underline{\vec{H}}_x^*\,dx) = -\underline{\vec{H}}^*\,\mathrm{d}\vec{r}
\end{aligned}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{-\underline{V}_1\underbrace{\int\limits_{R_1}\underline{\vec{H}}^*\,\mathrm{d}\vec{r}}_{-\underline{I}^*} - \underline{V}_2\underbrace{\int\limits_{R_2}\underline{\vec{H}}^*\,\mathrm{d}\vec{r}}_{+\underline{I}^*}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\underline{I}^*(\underline{V}_1 - \underline{V}_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\underline{I}^* \cdot \underline{V}_0\}$$

mit $\underline{I} = I_0$ und $\underline{V}_0 = I_0 \cdot \underline{Z} \cdot g$ folgt:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \cdot I_0^2 \cdot g \cdot \mathrm{Re}\{\underline{Z}\}$$

d) Leitungsgleichungen (Skript Gl. 3.110, 3.111, 3.128)

- $-\frac{\partial I}{\partial z} = (G' + \mathrm{j}\omega C') \cdot \underline{U} = \mathrm{j}\underline{k} \cdot \underline{I}$
- $-\frac{\partial U}{\partial z} = (R' + \mathrm{j}\omega L') \cdot \underline{I} = \mathrm{j}\underline{k} \cdot \underline{U}$

Hier: $\underline{U} = I_0 \cdot \underline{Z} \cdot g, \underline{I} = I_0$

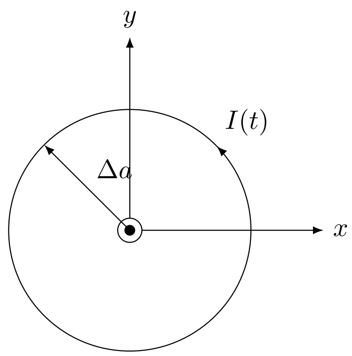
$$\Rightarrow G' + \mathrm{j}\omega C' = \frac{\mathrm{j}\underline{k}}{\underline{Z}g} = \frac{\underline{\varepsilon}_{\mathrm{ges}}\mathrm{j}\omega}{g} = \frac{\omega}{g}(\varepsilon_{\mathrm{ges,i}} + \mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{ges,r}})$$
$$R' + \mathrm{j}\omega L' = \mathrm{j}\underline{k}\underline{Z} \cdot g = \mathrm{j}\omega\mu_0 g$$
$$\Rightarrow G' = \frac{\omega\varepsilon_{\mathrm{ges},i}}{g}, \quad C' = \frac{\varepsilon_{\mathrm{ges},r}}{g}, \quad R' = 0, \quad L' = \mu_0 g$$

$$(G' + \mathrm{j}\omega C') \cdot \mathrm{j}\omega L' = -\omega^2 \underline{\varepsilon}_{\mathrm{ges}}\mu_0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}G' + C'\right) \cdot L' = \underline{\varepsilon}_{\mathrm{ges}}\mu_0$$

Blatt 5

Aufgabe 8

a)



$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$
$$\underline{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\underline{\rho}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} e^{-\mathrm{j}k_0\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,\mathrm{d}V' \overset{\rho=0}{=} 0$$
$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{\vec{J}}(\vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} e^{-\mathrm{j}k_0\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\,\mathrm{d}V' \qquad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

Lorenzeichung

$$\underline{\vec{B}} = \mathrm{rot}\,\underline{\vec{A}}$$
$$\underline{\vec{E}} + \mathrm{j}\omega\underline{\vec{A}} = -\,\mathrm{grad}\,\underline{V}$$

Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = r\cos\varphi\sin\vartheta\vec{e}_x + r\sin\varphi\sin\vartheta\vec{e}_y + r\cos\vartheta\vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r}') = \underline{I}\delta(r' - \Delta a)\frac{1}{r'}\delta\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_{\varphi'}$$

$$\int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{r'}\delta\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right) r'\,\mathrm{d}\vartheta' = 1$$

$$I = I_0\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\{I_0 e^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

$$I = \mathrm{Re}\{\underline{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\} \Rightarrow \underline{I} = I_0$$

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I_0\delta(r' - \Delta a)\cdot\frac{1}{r'}\cdot\delta\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_{\varphi'}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} e^{-jk_0\|\vec{r}-\vec{r}'\|} r'^2 \sin\vartheta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}\vartheta'$$

mit $\int \delta(x - x_0)f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int \left[\frac{e^{-\mathrm{j}k_0\|\vec{r}-\vec{r}'\|}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right]_{\substack{r'=\Delta a\\ \vartheta'=\frac{\pi}{2}}} \vec{e}_{\varphi'}\,\Delta a\,\mathrm{d}\varphi'$$

$$\Big[\|\vec{r} - \vec{r}'\|\Big]_{\substack{r'=\Delta a\\ \vartheta'=\frac{\pi}{2}}} = \Big[\sqrt{(r\cos\varphi\sin\vartheta - r'\cos\varphi'\sin\vartheta')^2 + (r\sin\varphi\sin\vartheta - r'\sin\varphi'\sin\vartheta')^2}$$

$$\overline{+(r\cos\vartheta - r'\cos\vartheta')^2}\Big]_{\substack{r'=\Delta a\\ \vartheta'=\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \sqrt{(r\cos\varphi\sin\vartheta - \Delta a\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi\sin\vartheta - \Delta a\sin\varphi')^2 + r^2\cos^2\vartheta}$$

mit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \sqrt{r^2 + \Delta a^2 - 2r\Delta a\sin\vartheta(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')} \qquad (*)$$

Abkürzung: $\sqrt{\cdots} = (*)$, $\sqrt{\cdots}\big|_{\Delta a=0} = r$

$$\left[\frac{e^{-\mathrm{j}k_0\|\vec{r}-\vec{r}'\|}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\right]_{\substack{r'=\Delta a\\ \vartheta'=\frac{\pi}{2}}} = \frac{e^{-\mathrm{j}k_0\sqrt{\cdots}}}{\sqrt{\cdots}}$$

Taylor-Entwicklung um $\Delta a = 0$

$$= \frac{e^{-\mathrm{j}k_0 r}}{r} + \left[\frac{e^{-\mathrm{j}k_0 r}(-jk_0)\frac{1}{2}\frac{1}{r}(-2r)\sin\vartheta(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')}{r}\right.$$

$$\left. + e^{-\mathrm{j}k_0 r}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r^2}(-2r)\sin\vartheta(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\right]\Delta a + \mathcal{O}(\Delta a^2)$$

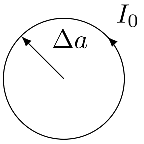
$$= e^{-\mathrm{j}k_0 r}\frac{1}{r^2}\left[r + (jk_0 r + 1)\sin\vartheta(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\Delta a\right] + \mathcal{O}(\Delta a^2)$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0\Delta a}{4\pi}\frac{e^{-\mathrm{j}k_0 r}}{r^2}\int \left[r + (jk_0 r + 1)\sin\vartheta(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\Delta a\right]$$

$$\cdot\left[-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right]\mathrm{d}\varphi' + \mathcal{O}(\Delta a^3)$$

Benutze $\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\sin\varphi'\cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = 0$, $\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = \pi$

$$\Rightarrow \underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0\Delta a}{4\pi}e^{-\mathrm{j}k_0 r}\frac{1}{r^2}(jk_0 r + 1)\sin\vartheta(\cos\varphi\pi\vec{e}_y - \sin\varphi\pi\vec{e}_x)\Delta a$$



$\underline{m} = I_0\pi\Delta a^2$

$$\Rightarrow \underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}k_0 r}\frac{1}{r^2}(jk_0 r + 1)\sin\vartheta\cdot\vec{e}_\varphi$$

b) **Wiederholung**

$\underline{V}(\vec{r}) = 0$

$\underline{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}k_0 r}\dfrac{1}{r^2}(jk_0 r + 1)\sin\vartheta\cdot\vec{e}_\varphi$

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu_0}\underline{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\underline{\vec{A}}\\
\underline{\vec{A}} &= \underline{A}_r\cdot\vec{e}_r + \underline{A}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + \underline{A}_\vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + \underline{A}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi\\
\underline{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\underline{A}_\varphi\sin\vartheta\right) - \frac{\partial\underline{A}_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{A}_\varphi\right)\right)\cdot\vec{e}_\vartheta\right.\\
&\quad\left. + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\vartheta}\right)\cdot\vec{e}_\varphi\right]\\
&= \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\underline{A}_\varphi\sin\vartheta\right)\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{A}_\varphi)\vec{e}_\vartheta\right]\\
\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\underline{A}_\varphi\sin\vartheta) &= \frac{\mu_0\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}k_0r}\frac{1}{r^2}(jk_0r+1)2\sin\vartheta\cos\vartheta\\
\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{A}_\varphi) &= \frac{\mu_0\underline{m}}{4\pi}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-\mathrm{j}k_0r}\left(jk_0+\frac{1}{r}\right)\right)\\
&= \frac{\mu_0\underline{m}}{4\pi}\sin\vartheta\left[e^{-\mathrm{j}k_0r}(-jk_0)\left(jk_0+\frac{1}{r}\right) + e^{-\mathrm{j}k_0r}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]\\
&= \frac{\mu_0\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}k_0r}\sin\vartheta\left(k_0^2 - j\frac{k_0}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\\
\Rightarrow \underline{\vec{H}} &= \frac{\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}k_0r}\left[2\cos\vartheta\left(\frac{jk_0}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_r - \sin\vartheta\left(\frac{k_0^2}{r} - j\frac{k_0}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_\vartheta\right]\\
k_0 &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \qquad \frac{1}{k_0r} = \left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-1}\\
\Rightarrow \underline{\vec{H}} &= \frac{\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi r}{\lambda_0}}k_0^3\left[2\cos\vartheta\left(j\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-2} + \left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-3}\right)\vec{e}_r\right.\\
&\quad\left. + \sin\vartheta\left(\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-3} + j\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-2} - \left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-1}\right)\vec{e}_\vartheta\right]
\end{aligned}$$

Nahfeld: $k_0r \ll 1$, $\frac{2\pi r}{\lambda_0} \ll 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{\vec{H}}_{\text{nah}} &= \frac{\underline{m}}{4\pi}k_0^3\left[2\cos\vartheta\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-3}\vec{e}_r + \sin\vartheta\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-3}\vec{e}_\vartheta\right]\\
&= \frac{\underline{m}}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\vartheta\vec{e}_r + \sin\vartheta\vec{e}_\vartheta\right)
\end{aligned}$$

Fernfeld: $k_0r \gg 1$, $\frac{2\pi r}{\lambda_0} \gg 1$

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}_{\text{fern}} &= \frac{\underline{m}}{4\pi}e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi r}{\lambda_0}}k_0^3\left(-\sin\vartheta\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-1}\vec{e}_\vartheta\right)\\
&= -\frac{\underline{m}}{4\pi}k_0^2\frac{1}{r}\sin\vartheta e^{-\mathrm{j}k_0r}\vec{e}_\vartheta
\end{aligned}$$

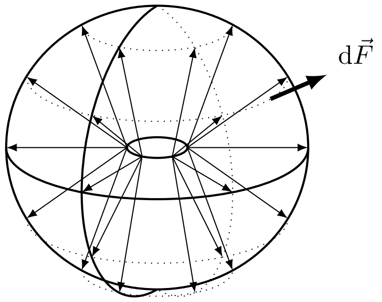
Lorenz-Eichung

$$\underline{\vec{E}} = -\operatorname{grad}\underline{V} - \mathrm{j}\omega\underline{\vec{A}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{A}} = \frac{-\mathrm{j}\omega\mu_0\underline{m}}{4\pi}k_0^2e^{-\mathrm{j}k_0r}\left(j\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-1} + \left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-2}\right)\sin\vartheta\vec{e}_\varphi$$

Nahfeld: $k_0r \ll 1$, $\frac{2\pi r}{\lambda_0} \ll 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{\vec{E}}_{\text{nah}} &= -j\frac{\omega\mu_0\underline{m}}{4\pi}k_0^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda_0}\right)^{-2}\sin\vartheta\vec{e}_\varphi = -j\frac{\overbrace{\omega\mu_0}^{k_0Z_0}\underline{m}}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{r^2}\vec{e}_\varphi = -jk_0Z_0\frac{\underline{m}}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{r^2}\vec{e}_\varphi\\
\Rightarrow \underline{\vec{E}}_{\text{fern}} &= \ldots = k_0^2Z_0\frac{\underline{m}}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{r}e^{-\mathrm{j}k_0r}\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

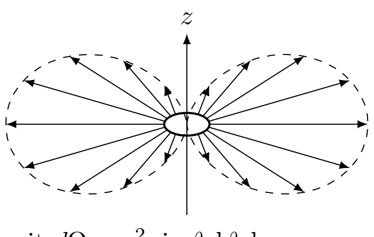
c)



$$
\begin{aligned}
\overline{\vec{S}}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\} \\
\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* &= \underline{E}_\varphi \vec{e}_\varphi \times (\underline{H}_r^* \vec{e}_r + \underline{H}_\vartheta^* \vec{e}_\vartheta) = \underline{E}_\varphi \underline{H}_r^* (\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r) + \underline{E}_\varphi \underline{H}_\vartheta^* (\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\vartheta) \\
&= \underline{E}_\varphi \underline{H}_r^* \vec{e}_\vartheta - \underline{E}_\varphi \underline{H}_\vartheta^* \vec{e}_r \\
\oint \overline{\vec{S}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{F}\Big|_{r=r_0} &= \oint \overline{\vec{S}}(\vec{r}) \vec{e}_r \,\mathrm{d}F = \oint \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{-\underline{E}_\varphi \underline{H}_\vartheta^*\}\Big|_{r=r_0} \mathrm{d}F \\
&= \oint \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0 m^2}{16\pi^2} k_0^5 \sin^2\vartheta \frac{1}{k_0^2 r_0^2}\,\mathrm{d}F \\
&= \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0 m^2}{16\pi^2} \frac{k_0^3}{r_0^2} \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, r_0^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi}_{2\pi r_0^2 \cdot \frac{4}{3}} \\
&= \frac{m^2 k_0^4}{12\pi} Z_0
\end{aligned}
$$

d) $\mathrm{d}P_S = \overline{\vec{S}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\vec{F}}_{\vec{e}_r \mathrm{d}\Omega}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}P_S}{\mathrm{d}\Omega} &= \overline{\vec{S}} \cdot \vec{e}_r\Big|_{r=1} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}\Big|_{r=1} \cdot \vec{e}_r \\
&= \frac{\underline{m}^2 k_0^4}{32\pi^2} Z_0 \sin^2\vartheta
\end{aligned}
$$



mit $d\Omega = r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

e) $P_S =: \frac{1}{2} R_S I_0^2$

$$
\begin{aligned}
R_S = \frac{2P_S}{I_0^2} &= \frac{2\,\overbrace{\underline{m}^2}^{\pi^2 \Delta a^4 I_0^2}\, k_0^4 Z_0}{12\pi I_0^2} \\
&= \frac{1}{6}\pi \Delta a^4 k_0^4 Z_0 \\
&= \frac{8}{3}\pi^5 \left(\frac{\Delta a}{\lambda}\right)^4 Z_0
\end{aligned}
$$

$k = \mathrm{Re}\{\omega\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{ges}}\mu_0}\} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Klausur:

Von diesen drei Sachen gehen alle Aufgaben voraus (auswendig können):

- Maxwell
- Materialgleichungen
- Grenzbedingungen

Themen:

- Vorallem sind die Gleichungen im HEZ wichtig, und deren Bedeutung.
- Wo kommen Wellen her? Wellengleichung. Wie leitet man die Helmholtzgleichung her?
- Wie sehen diese Wellen dann möglicherweise aus? Was beduetet HEZ? Ausbreitungsreichtung? Dämpfung? Stehende Welle? Polarisation? Wie hängen $\vec{E}$ und $\vec{H}$ aufgrund Maxwell miteinander zusammen?
- Gruppen und Phasengeschwindigkeit, Phasenflächen, was ist eine TEM-Welle?
- Unbedingt üben: Grenz und Randbedingungen, $\operatorname{Rot} H = ?$, $\operatorname{Rot} E = ?$. Unterschied zwischen Grenz und Randbedingung.
- Vorstellungsvermögen: Was macht eine endliche Leitfähigkeit mit der Welle? Welche Wellenparameter ändern sich mit der Leitfähigkeit?
- Wellenleiter: Was ist die Grundlage der Ausbreitung der Wellen in Wellenleitern? Warum sind TE und TM-Moden im Leiter möglich die im freien Raum nicht möglich sind?
- Ganz wichtig: Was wir in der Übung gemacht haben. Was für eine Wirkleistung steckt in der Welle, wo geht Energie verloren, in welche Richtung breitet sich die Energie aus?
- Leitungsgleichung: Wie kommt man darauf? Konvention mit + und - wie im Skript benutzen (Spannung von Leiter A nach Leiter B oder anders herum)?
- Dipole: Nahfeld, Fernfeld, Longitudinalkomponenten (TE-Welle im Nahfeld in A8)
- Nah- und Fernfeld allgemein
- Eichungen (erleichtern Rechnung erheblich)
- Alte Klausuren nur bedingt relevant, da Stoff in alten Semestern anders.

Rechnentechnik:

- Flächenrotation und Flächendivergenz, Kreuzprodukt
- Differentialgleichungen: Helmholtz; wie kommt man da auf stehende Wellen?
- Integration

Organisatorisches:

- Achte auf Aufgabenstellung:
  - Geben sie an: einfach hinschreiben
  - Berechnen: ausrechnen
- 1 Punkt $\equiv$ 1 Zeile (ungefähr)
- 3 Aufgaben, 90 Minuten